УДК 512.542

В. Н. Князина (Гос. учреждение образования „Гомел. инж. ин-т" МЧС Республики Беларусь),
В. С. Монахов (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Республика Беларусь)

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ ПОДГРУППАМИ ПОРЯДКА p^2

It is proved that a finite group with complemented subgroups of order p^2 for all p is solvable and its derived length does not exceed 4.

Доведено, що скінченна група з доповнюваними підгрупами порядку p^2 для всіх p є розв'язною і її похідна довжина не перевищує 4.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1, 2]. Как обычно, $\Phi(G)$ и G' — соответственно подгруппа Фраттини и коммутант группы G, а $G^{(n)}$ — n-й коммутант: $G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$. Наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется производной длиной разрешимой группы G и обозначается через $d(G)$. Дополнением к подгруппе H в группе G называется такая подгруппа K, что $G = HK$ и $H \cap K = 1$. Результаты о группах, как конечных, так и бесконечных, с системами дополняемых подгрупп изложены в монографии С. Н. Черникова [3].

В 1937 г. Ф. Холл [4] установил, что конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, исчерпываются сверхразрешимыми группами с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Такие группы получили название вполне факторизуемых групп. Позже Ю. М. Горчаков [5] показал, что дополняемость всех подгрупп равносильна дополняемости подгрупп простых порядков. Понятно, что производная длина вполне факторизуемой группы не выше 2.

Я. П. Сысак [6] исследовал строение конечных групп с дополняемыми элементарными абелевыми примарными подгруппами непростых порядков, которые названы им элементарно факторизуемыми группами. Группа G тогда и только тогда элементарно факторизуема, когда для всех $p \in \pi(G)$ она удовлетворяет условию дополняемости для элементарных абелевых подгрупп порядков p^2 и p^3 [7] (лемма 10). Ранг [2] (п. VI.5) разрешимой элементарно факторизуемой группы G не превышает 2 [6] (следствие 2). Разрешимые группы, у которых ранг не превышает 2, исследованы в [8]. В частности, в такой группе G существует нормальная $\{2, 3\}'$-холлова подгруппа, а $d(G/\Phi(G)) \leq 5$. Силовская 2-подгруппа неразрешимой элементарно факторизуемой группы является обобщенной группой кватернионов, а ее неабелевы композиционные факторы изоморфны $\mathrm{PSL}(2, p)$ [6] (теорема 2). Элементарно факторизуемыми группами, в частности, являются вполне факторизуемые группы и группы, не содержащие нециклические элементарные абелевы подгруппы. Конечные группы с последним свойством — это группы, силовские p-подгруппы которых при $p > 2$ циклические, а при $p = 2$ либо циклические, либо обобщенные группы кватернионов (в частности, группы кватернионов). Отметим, что разрешимые группы с указанными силовскими подгруппами описал Цассенхауз [9], а неразрешимые — Сузуки [10].

По сравнению с классом всех элементарно факторизуемых групп более широкий класс составляют все конечные группы с дополняемыми подгруппами типа (p, p) для всех p, изученные в работе Я. П. Сысака [7] и названные им (p, p)-факторизуемыми.

Теорема (Я. П. Сысак). *Конечная не элементарно факторизуемая группа G тогда и только тогда для каждого $p \in \pi(G)$ удовлетворяет условию дополняемости для абелевых подгрупп типа (p, p), когда $G = [A]B$, где A — абелева холлова подгруппа в G, у которой для* *каждого $p \in \pi(A)$ силовская p-подгруппа A_p является прямым произведением двух или более G-изоморфных минимальных нормальных подгрупп порядка p^2 группы G и фактор-группа $G/C_G(A_p)$ циклическая, а B — элементарно факторизуемая группа.*

Применяя теорему 1 из [8], отсюда можно получить оценку производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ разрешимой (p,p)-факторизуемой для всех p группы G. Она не превышает 6, а для таких групп нечетного порядка — 4.

В настоящей работе мы исследуем строение конечной группы с дополняемыми подгруппами порядка p^2 для всех $p \in \pi(G)$. Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть в группе G для каждого $p \in \pi(G)$ дополняемы все подгруппы порядка p^2. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *группа G разрешима и ее производная длина $d(G) \leq 4$; кроме того, если порядок G нечетен, то $d(G) \leq 3$*;

2) $\{2,3\}'$*-холлова подгруппа нормальна*;

3) $2'$*-холлова подгруппа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;

4) *если группа G не имеет силовской башни сверхразрешимого типа, то существует нормальная подгруппа N такая, что фактор-группа G/N изоморфна знакопеременной группе A_4 степени* 4.

1. Вспомогательные результаты. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. 1. *Пусть A и H — подгруппы группы G и $A \subseteq H$. Если A дополняема в G и все ее дополнения в H дополняемы в G, то H дополняема в G.*

2. *Пусть H — подгруппа группы G. Если все подгруппы простых порядков из H дополняемы в G, то H дополняема в G.*

Доказательство. 1. Пусть K — дополнение к подгруппе A в группе G. Тогда

$$G = AK, \qquad A \cap K = 1, \qquad H = A(H \cap K), \qquad A \cap H \cap K = 1,$$

т. е. $H \cap K$ — дополнение к A в H. По условию существует подгруппа L такая, что

$$G = (H \cap K)L, \qquad H \cap K \cap L = 1.$$

Вычислим порядок произведения подгрупп H и $K \cap L$:

$$|H(K \cap L)| = |H||K \cap L| = |A||H \cap K||K \cap L| = \frac{|G|}{|K|}\frac{|G|}{|L|}|K \cap L| = \frac{|G|^2}{|KL|} \geq |G|.$$

Поэтому $G = H(K \cap L)$ и $K \cap L$ — дополнение к подгруппе H в группе G.

2. Применим индукцию по числу $|G| + |H|$. Пусть A — подгруппа простого порядка из H. По условию существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. По тождеству Дедекинда $H = A(H \cap B)$. Если $H \cap B = 1$, то $H = A$ и H дополняема в G. Пусть $H \cap B \neq 1$. Теперь каждая подгруппа простого порядка из $H \cap B$ дополняема в G. Поскольку $|G| + |H \cap B| < |G| + |H|$, то применима индукция к группе G с подгруппой $H \cap B$, т. е. подгруппа $H \cap B$ дополняема в G. По первому утверждению доказываемой леммы подгруппа H дополняема в G.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Зафиксируем $p \in \pi(G)$. Пусть в группе G все подгруппы порядка p^2 дополняемы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H — подгруппа группы G, то в H все подгруппы порядка p^2 дополняемы*;

(2) *если N — нормальная p'-подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все подгруппы порядка p^2 дополняемы*;

(3) *силовская p-подгруппа является группой одного из следующих типов*:

(3.1) *элементарной абелевой p-группой*;

(3.2) *циклической группой порядка p или p^2*;

(3.3) *группой диэдра порядка 8*;

(3.4) *неабелевой группой порядка p^3 экспоненты p.*

Доказательство. Первые два утверждения доказываются простой проверкой.

3. В силу первого утверждения доказываемой леммы можно считать, что $G = G_p$ — p-группа. Если в G нет подгрупп порядка p^2, то $|G| = p$. Если $\Phi(G) = 1$, то G — элементарная абелева p-группа. Пусть в p-группе G имеются подгруппы порядков p^2 и $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Предположим, что $|\Phi| \geq p^2$ и P — подгруппа порядка p^2 из Φ. По условию подгруппа P дополняема в G, что невозможно по свойствам подгруппы Фраттини. Поэтому $|\Phi| = p$. Пусть A — нормальная подгруппа порядка p^2, содержащая Φ. По условию существует подгруппа B такая, что $G = [A]B$. Согласно [2] (п. III.3.12) $\Phi(B) \subseteq \Phi \subseteq A$, поэтому $\Phi(B) = 1$ и B — элементарная абелева. Подгруппа $C_B(A)$ нормальна в G. Если $C_B(A) \neq 1$, то существует подгруппа D простого порядка, содержащаяся в $C_B(A)$ и нормальная в G. По условию подгруппа $\Phi D = \Phi \times D$ дополняема в группе G, поэтому существует подгруппа H такая, что $G = [\Phi \times D]H$. Но теперь подгруппа DH будет дополнением к подгруппе Φ в группе G, что невозможно. Значит, допущение неверно, $C_B(A) = 1$ и $C_G(A) = A$. Теперь подгруппа B становится группой автоморфизмов для группы A. Если A — циклическая, то по [2] (п. I.4.6) $|B| \leq p$. Если A — элементарная абелева, то $\mathrm{Aut}A = \mathrm{GL}(2,p)$ и снова $|B| \leq p$. Итак, в любом случае $|B| \leq p$. Если $B = 1$, то $G = A$ — циклическая группа порядка p^2. Если $|B| = p$, то G становится неабелевой группой порядка p^3, строение которой известно [2] (п. I.14.10). Проверка показывает, что G — либо группа диэдра порядка 8, либо неабелева группа порядка p^3 экспоненты p.

Лемма доказана.

Понятие p-ранга p-разрешимой группы и его свойства можно найти, например, в [2] (п. VI.5).

Лемма 3. *Пусть G — p-разрешимая группа, $p \in \pi(G)$. Предположим, что в G все подгруппы порядка p^2 дополняемы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то либо N — p'-группа, либо $|N| = p$, либо $|N| = p^2$; в частности, p-ранг G не превышает* 2;

(2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то в G/N каждая подгруппа порядка p^2 дополняема.*

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что N не является p'-группой. Тогда N — элементарная абелева p-подгруппа. Допустим, что $|N| \geq p^3$ и N_1 — подгруппа порядка p^2 из N. По условию подгруппа N_1 дополняема в G, т. е. существует подгруппа H такая, что $G = [N_1]H$. Поскольку $G = NH$, то $N \cap H \neq 1$ и $N \cap H$ — нормальная в G подгруппа, собственно содержащаяся в N. Противоречие. Поэтому допущение неверно и $|N| \leq p^2$. Таким образом, каждая минимальная нормальная подгруппа является либо p'-подгруппой, либо имеет порядок p или p^2.

Теперь проверим, что если N — нормальная подгруппа группы G, то в G/N каждая подгруппа порядка p^2 дополняема. В силу индукции достаточно доказать утверждение, когда N —

минимальная нормальная подгруппа. Если N — p'-подгруппа, то утверждение справедливо по лемме 2 (2). Если $|N| = p$, то в G/N все подгруппы порядка p дополняемы. По лемме 1 (2) каждая подгруппа порядка p^2 дополняема в G/N. Остается случай, когда $|N| = p^2$. Пусть A/N — подгруппа порядка p^2. По условию подгруппа N дополняема в G, т. е. существует такая подгруппа H, что $G = [N]H$. По тождеству Дедекинда $A = [N](A \cap H)$. Поскольку $|A \cap H| = p^2$, то подгруппа $A \cap H$ дополняема в H, т. е. существует такая подгруппа K, что $H = [A \cap H]K$. Подгруппа K будет дополнением к подгруппе A в группе G и KN/N — дополнение к подгруппе A/N в фактор-группе G/N. Следовательно, если N — нормальная подгруппа группы G, то в G/N каждая подгруппа порядка p^2 дополняема.

Осталось проверить, что p-ранг G не превышает 2. Пусть K/N — главный pd-фактор группы G, т. е. K/N является минимальной нормальной pd-подгруппой в G/N. Так как G/N p-разрешима, то K/N — элементарная абелева p-подгруппа. По доказанному каждая подгруппа порядка p^2 дополняема в G/N и $|K/N| \leq p^2$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в p-разрешимой группе каждая подгруппа порядка p^2 дополняема, то* $l_p(G) \leq 1$.

Доказательство. Если в группе G нет подгрупп порядка p^2, то силовская p-подгруппа имеет порядок, не превышающий p, и $l_p(G) \leq 1$ по [2] (п. VI.6.6). Пусть в группе G имеются подгруппы порядка p^2. В силу леммы 3 (2) и индукции $l_p(G/N) \leq 1$ для каждой нормальной неединичной подгруппы N. По [2] (п. VI.6.9)

$$\Phi(G) = 1, \qquad O_{p',p}(G) = O_p(G) = F(G), \qquad N = F(G) = C_G(F(G))$$

и N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G, которая будет элементарной абелевой p-подгруппой, и N дополняема в G. Если $|N| = p$, то G/N — подгруппа циклической группы порядка $p - 1$, поэтому $l_p(G) \leq 1$. По лемме 3 (1) считаем, что $|N| = p^2$ и G/N изоморфна подгруппе из $\mathrm{GL}(2, p)$. Поэтому силовская p-подгруппа P в группе G имеет порядок p^3.

Предположим, что G не бипримарна. По [10] (п. 5.3.13) существует $\{p, q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}} = G_p G_q$ для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. По индукции $l_p(G_p G_q) \leq 1$. Поскольку $N \subseteq G_p G_q$, то

$$O_{p'}(G_p G_q) \subseteq C_G(N) = N, \qquad O_{p'}(G_p G_q) = 1$$

и G_p — нормальная подгруппа в $G_p G_q$. Теперь G_p — нормальная подгруппа в $\langle G_q \mid q \in \pi(G) \rangle = G$, т. е. $l_p(G) \leq 1$. Итак, следует считать, что G является $\{p, q\}$-группой для некоторого простого q.

Пусть P и R — различные силовские p-подгруппы группы G. Предположим, что подгруппа $\langle P, R \rangle$, порожденная ими, является собственной подгруппой в G. По индукции

$$l_p(\langle P, R \rangle) \leq 1, \qquad O_{p'}(\langle P, R \rangle) \subseteq C_G(N) = N, \qquad O_{p'}(\langle P, R \rangle) = 1,$$

и P нормальна в $\langle P, R \rangle$, $P = R$. Противоречие. Следовательно, $\langle P, R \rangle = G$, а по [8] (п. 8.6.7) фактор-группа G/N изоморфна группе $\mathrm{SL}(2, p)$. Поскольку G бипримарна, то $p \leq 3$.

Допустим, что $p = 2$. Тогда $G/N \simeq \mathrm{SL}(2, 2)$ — группа порядка 6 и $G \simeq S_4$ по [2] (п. II.6.17). Но в S_4 имеется недополняемая подгруппа A порядка 4:

$$A = \langle (12) \rangle \times \langle (12)(34) \rangle = \{1, (12), (12)(34), (34)\}.$$

Проверим этот факт. Поскольку в S_4 нет элементов порядка 6, то каждая подгруппа порядка 6 не 2-замкнута и изоморфна S_3. Поэтому она является нормализатором силовской 3-подгруппы. Значит, все подгруппы порядка 6 сопряжены между собой и их количество равно 4. Пусть B_i — стабилизатор точки $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Это все подгруппы порядка 6 в S_4. Поскольку

$$(12) \in A \cap B_3 \cap B_4, \qquad (34) \in A \cap B_1 \cap B_2,$$

то ни одна из подгрупп порядка 6 не может быть дополнением к A в S_4.

Остался случай, когда $p = 3$. Пусть H — дополнение к N в группе G. Тогда

$$G = [N]H,\ G/N \simeq SL(2,3) \simeq H = [Q]T,\ |T| = 3,\ P = [N]T,$$

а Q — группа кватернионов порядка 8. Поскольку P неабелева, то $Z = Z(P) = N \cap P$ и $P_1 = ZT = Z \times T$ — подгруппа порядка 9. Она по условию дополняема в G. Пусть K — дополнение к P_1 в G. Ясно, что $|K| = 3 \cdot 2^3$. Если $N \cap K = 1$, то $G = [N]K$, подгруппы H и K сопряжены в G. Теперь $G = P_1H$, $P_1 \cap H \supseteq T$, что невозможно. Следовательно, $N \cap K \neq 1$ и $N_1 = N \cap K$ — нормальная подгруппа порядка 3 в $V = [N]K$. По теореме Машке существует нормальная в V подгруппа N_2 такая, что $N = N_1 \times N_2$. Так как $V/C_V(N_i)$ — подгруппа порядка 1 или 2, то $V/(C_V(N_1) \cap C_V(N_2))$ — подгруппа порядка 1, 2 или 4. Но

$$C_V(N_1) \cap C_V(N_2) = C_V(N) \subseteq C_G(N) = N,$$

поэтому $|V| = 3^2 \cdot 2^3$ делит $|N| \cdot 4 = 36$, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если в группе G все подгруппы порядка 4 дополняемы, то G разрешима.*

Доказательство. Если в G нет подгрупп порядка 4, то силовская 2-подгруппа имеет порядок не выше 2 и G 2-нильпотентна. Пусть в группе G имеются подгруппы порядка 4 и P — одна из них. По условию существует подгруппа H такая, что $G = PH$ и $H \cap P = 1$. Согласно лемме 2.1 (1) все подгруппы порядка 4 из H дополняемы в H. По индукции H разрешима. Поскольку $G/\mathrm{Core}_G H$ изоморфна подгруппе из симметрической группы S_4 степени 4, то G разрешима.

Лемма 6 [11] (3.4). *Любая подгруппа в группе $GL(2, p^\alpha)$ сопряжена с подгруппой G одного из следующих типов*:

1) *G циклическая*;

2) *$G = QM$, где Q — подгруппа p-группы*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in GF(q) \right\rangle,$$

$M \subseteq N_G(Q)$ и M — подгруппа группы D всех диагональных матриц;

3) *$G = \langle C_u, s\rangle$, где u делит $q^2 - 1$, $y^s = y^{p^\alpha}$ для всех $y \in C_u$, и s^2 — скалярный 2-элемент в C_u*;

4) *$G = \langle M, s\rangle$, где $M \subseteq D$, s — антидиагональный 2-элемент, $|G : M| = 2$*;

5) *$G = \langle SL(2, p^\beta), V\rangle$ или*

$$G = \left\langle SL(2, p^\beta), V, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \epsilon b \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где V — скалярная матрица, ϵ — образующий элемент $\big(GF(p^\beta)\big)^*$, $p^\beta > 3$, β делит α. Во втором случае $|G : \langle SL(2, p^\beta), V\rangle| = 2$;

6) *$G/\langle -E\rangle$ изоморфна $S_4 \times C_u$, $A_4 \times C_u$ или $A_5 \times Z_u$ для $p \neq 5$, где C_u — скалярная подгруппа в $GL(2, p^\alpha)/\langle -E\rangle$, а E — единичная матрица*;

7) *G не является группой из пункта 6, но $G/\langle -E\rangle$ содержит $A_4 \times C_u$ в качестве подгруппы индекса 2 и A_4 в качестве подгруппы с циклической фактор-группой, C_u — группа, как в пункте 6, и u — четное число.*

Лемма 7. *Пусть G — p'-подгруппа группы $GL(2, p)$. Если для каждого $r \in \pi(G)$ все подгруппы порядка r^2 дополняемы в G, то G метабелева.*

Доказательство. Согласно лемме 5 группа G разрешима. Теперь G — группа из пунктов $1-7$ леммы 6. Группа из п. 1 абелева. Порядок группы из пп. 2 и 5 делится на p. Учитывая, что группа всех диагональных матриц является абелевой, получаем, что в пп. 3 и 4 группа G метабелева. Пусть G — группа из пп. 6, 7 леммы 6 и $A/\langle -E\rangle$ — подгруппа, изоморфная A_4, из $G/\langle -E\rangle$. По лемме 2 каждая подгруппа порядка 4 из A дополняема в A. Но этого свойства не имеет подгруппа B порядка 4 из A, содержащая $\langle -E\rangle$. Противоречие.

Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G (см. [1], глава 5, [2], п. VI.7). Произведением формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{\ G \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\ \}$, состоящий из всех групп G, у которых $\mathfrak{Y}$-корадикал принадлежит $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{X}$ называется насыщенной, если из условия $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \subseteq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ обозначаются формации всех абелевых и нильпотентных групп, а $\mathfrak{A}^k$ — произведение k копий формации $\mathfrak{A}$.

Лемма 8 [12] (VII.4, VII.5). *Если $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{H}$ — формация, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация. В частности, $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^k$ — насыщенная формация для любого натурального k.*

Определения и свойства примитивных групп изложены в [1] (4.6), [2] (II.1), [12] (I).

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и G — разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G — примитивная группа.*

Доказательство. Утверждение легко выводится из соответствующих определений.

2. Доказательство теоремы. 1. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Группа G разрешима по лемме 5. Из лемм 2, 3 и индукции следует, что каждая собственная подгруппа и каждая фактор-группа, отличная от G, принадлежит $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. По лемме 8 $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ — насыщенная формация, а по лемме 9 G — примитивная группа. Из [1] (4.6) следует, что $G = [F]M$, $F = F(G) = C_G(F)$ и F является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Пусть для определенности F является p-подгруппой. По лемме 4 F — силовская p-подгруппа группы G. Теперь $|F| = p$ или $|F| = p^2$ по лемме 3. Если $|F| = p$, то G/F абелева. Если $|F| = p^2$, то G/F изоморфна p'-подгруппе группы $GL(2, p)$ и G/N метабелева по лемме 7. Если порядок G нечетен, то G/N абелева [2] (II.7). Итак, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ в общем случае и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, когда порядок группы нечетен. Поскольку по лемме 2 порядок подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ свободен от квадратов, то $\Phi(G)$ — циклическая группа. Но $F(G)/\Phi(G)$ абелева в любой разрешимой группе, поэтому $d(F(G)) \leq 2$ и $d(G) \leq 4$ в общем случае и $d(G) \leq 3$, когда порядок группы нечетен.

2. Применим индукцию по порядку группы G. Пусть $\pi = \pi(G)\backslash\{2,3\}$ и $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. Если $O_\pi(G) \neq 1$, то по индукции подгруппа $G_\pi/O_\pi(G)$ нормальна в $G/O_\pi(G)$, поэтому G_π нормальна в G. Пусть $O_\pi(G) = 1$. Поскольку класс всех π-замкнутых групп является насыщенной формацией, то группа G примитивна по лемме 9. Теперь в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с $F(G)$, причем $G = [F(G)]H$, подгруппа Фиттинга $F(G)$ является элементарной абелевой подгруппой порядка p^n и $n \leq 2$ по лемме 2, H — максимальная подгруппа. Поскольку $O_\pi(G) = 1$, то $F(G)$ является 2- или 3-подгруппой.

Предположим, что $F(G)$ — 2-группа. Если $|F(G)| = 2$, то $|G| = 2$, а поэтому $G_\pi = 1$. Если $|F(G)| = 4$, то группа G изоморфна A_4 или S_4, поэтому $G_\pi = 1$.

Пусть $F(G)$ — 3-группа. Если $|F(G)| = 3$, то H изоморфна подгруппе циклической группы порядка 2, поэтому $G_\pi = 1$. Если $|F(G)| = 9$, то H изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$. Так как порядок группы $GL(2,3)$ равен 48, то снова $G_\pi = 1$. Таким образом, доказано, что $\{2,3\}'$-холлова подгруппа G_π нормальна в G.

3. Говорят, что группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$, имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если для каждого $i = 1,\ldots,n$ в группе G имеется нормальная подгруппа порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}$.

С помощью индукции проверим, что подгруппа $G_{2'}$ имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Если $G_{2'}$ — собственная подгруппа группы G, то это справедливо по индукции. Пусть $G_{2'} = G$, т. е. G — группа нечетного порядка. Поскольку класс всех групп с силовской башней сверхразрешимого типа является насыщенной формацией, то группа G примитивна по лемме 9, $G = [F]H$, где $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, она является минимальной нормальной в G подгруппой, а по лемме 4 F совпадает с некоторой силовской p-подгруппой группы G. По лемме 3 $|F|$ делит p^2. Если $|F| = p$, то H изоморфна подгруппе циклической группы порядка $p-1$. Поэтому p — наибольший простой делитель порядка группы G и G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Если $|F| = p^2$, то H изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$. Порядок группы $GL(2,p)$ равен $p(p-1)^2(p+1)$. Если p — наибольший простой делитель порядка группы G, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Предположим, что p не является наибольшим. Тогда $q = p + 1$ — наибольший простой делитель порядка группы G. Это возможно, когда $p = 2$, $q = 3$. Противоречие. Утверждение 3 доказано.

4. Предположим, что группа G не содержит фактор-групп, изоморфных A_4. В этом случае с помощью индукции по порядку G докажем наличие силовской башни сверхразрешимого типа.

Предположим, что G не является $\{2,3\}$-группой. По доказанному в пп. 2 и 3 π-холлова подгруппа G_π нормальна в G и имеет силовскую башню сверхразрешимого типа для $\pi = \pi(G)\backslash\{2,3\}$. Пусть R — силовская r-подгруппа в G для наибольшего простого $r \in \pi(G)$. Тогда $r > 3$, $R \leq G_\pi$ и R нормальна в G. Если предположить, что фактор-группа G/R содержит нормальную подгруппу N/R такую, что $(G/R)/(N/R) \cong A_4$, то подгруппа N будет нормальной в группе G и фактор-группа $G/N \cong (G/R)/(N/R) \cong A_4$. Имеем противоречие с условием. Поэтому для фактор-группы G/R условия теоремы выполняются и G/R имеет силовскую башню сверхразрешимого типа по индукции. Из того, что r — наибольший простой делитель порядка группы G, следует, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Пусть теперь G — $\{2,3\}$-группа. Поскольку класс всех групп, имеющих силовскую башню сверхразрешимого типа, является насыщенной формацией, то группа G примитивна, $G = [F(G)]H$, где $F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, H — максимальная подгруппа. В силу леммы 4 следует считать, что $F(G)$ — силовская 2-подгруппа группы G. Теперь $|F(G)| = 4$ и H — подгруппа группы $GL(2,2) \simeq S_3$. Поскольку $F(G)$ — силовская 2-подгруппа группы G, то $|H| = 3$ и $G \simeq A_4$.

Теорема доказана.

***Пример* 1.** Пусть E_{7^2} — элементарная абелева группа порядка 7^2. Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,7)$, в которой имеется неабелева подгруппа H порядка 21. Группа $G = [E_{7^2}]H$, являющая расщепляемым расширением E_{7^2} посредством H, является группой с дополняемыми подгруппами порядка p^2. Производная длина группы G равна 3. Следовательно, оценка производной длины, полученная в теореме для группы нечетного порядка, является точной.

***Пример* 2.** Пример знакопеременной группы A_4 указывает на то, что разрешимая группа с дополняемыми подгруппами порядка p^2 не обязана иметь силовскую башню сверхразрешимого типа, а тем более быть сверхразрешимой.

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. – Минск: Вышэйш. шк., 2006.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980.
4. *Hall Ph.* Complemented group // J. London Math. – 1937. – **12**. – P. 201 – 204.
5. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – № 17. – С. 15 – 31.
6. *Сысак Я. П.* Конечные элементарно факторизуемые группы // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 1. – С. 67 – 76.
7. *Сысак Я. П.* Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами типа (p,p) // Строение групп и свойства их подгрупп: Сб. науч. трудов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 63 – 79.
8. *Монахов В. С., Трофимук А. А.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 5. – С. 1123 – 1137.
9. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1935. – **11**. – S. 187 – 220.
10. *Suzuki M.* On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes // Amer. J. Math. – 1955. – **77**. – P. 657 – 691.
11. *Bloom D.* The subgroups of $PSL(3,q)$ for odd q // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **127**, № 1. – P. 150 – 178.
12. *Gaschutz W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes Pure Math. – Canberra: Austral. Nat. Univ., 1979. – № 11.

Получено 23.07.14