УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. О. Парасюк, Б. В. Репета (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДИНАМІЧНА БІФУРКАЦІЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ У ШВИДКО-ПОВІЛЬНІЙ СИСТЕМІ

We study a dynamical counterpart of bifurcation to invariant torus for a system of interconnected fast phase variables and slowly varying parameters. It is shown that, in this system, due to the slow evolution of the parameters, we observe the appearance of transient processes from damping to multifrequency oscillations, asymptotically close to motions on the invariant torus.

Изучается динамический аналог бифуркации инвариантных торов в системе взаимосвязанных быстрых фазовых переменных и медленно изменяющихся параметров. Показано, что в такой системе вследствие медленной эволюции параметров возникают переходные процессы от затухающих к многочастотным колебаниям, асимптотически близким к движениям на инвариантном торе.

1. Вступ. У монографії М. М. Крилова і М. М. Боголюбова [1] було показано, що неконсервативні збурення пари зв'язаних гармонічних осциляторів за достатньо загальних умов спричиняють виникнення у 4-вимірному фазовому просторі такої системи локального атрактора, гомеоморфного 2-вимірному тору. Явище біфуркації інваріантного тора внаслідок втрати стійкості граничного циклу, коли при зміні параметрів системи пара комплексних мультиплікаторів перетинає одиничне коло, було досліджене в [2, 3] і стало відомим широкому загалу з появою робіт [4, 5] (див. також [6]). Математичний апарат, який давав змогу отримувати строгі результати з дослідження біфуркацій багатовимірних інваріантних торів, було розроблено в [7 – 13]. Серед інших праць із зазначеної тематики відзначимо [14 – 19].

Згадані вище результати стосуються статичної теорії біфуркацій, у якій вивчаються системи вигляду $\dot{x} = f(x, u)$, залежні від незмінних у часі параметрів $u = (u_1, \ldots, u_m)$, де $f(\cdot, \cdot)\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ — відображення певного класу гладкості. Коли стверджується, наприклад, що в такій системі при зміні параметрів u вздовж деякої кривої $u = u(s)$, $s \in (-1, 1)$, м'яко народжується k-вимірний стійкий інваріантний тор внаслідок втрати стійкості положення рівноваги, то це означає, що при $s \in (-1, 0)$ система

$$\dot{x} = f(x, u(s)) \tag{1}$$

має асимптотично стійке положення рівноваги x_*, яке для значень $s \in (0, 1)$ стає нестійким, і при цьому існує неперервне (достатньо гладке) відображення $\mathfrak{X}(\cdot, \cdot)\colon \mathbb{T}^k \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^d$ таке, що $\mathfrak{X}(\cdot, 0) \equiv x_*$ для всіх $s \in (-1, 0]$, а для кожного $s \in (0, 1)$ образ відображення $\mathfrak{X}(\cdot, s)\colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^d$ є інваріантним орбітально асимптотично стійким тороїдальним многовидом системи (1).

З певних міркувань буває доцільно сім'ю систем інтерпретувати як систему в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = 0. \tag{2}$$

Тоді описана вище біфуркація інваріантного тора характеризується тим, що ця система має інваріантну множину, перерізи якої площинами $\Pi_s := \{(x, u)\colon u = u(s)\}$ при $s \in (0, 1)$ є інваріантними тороїдальними многовидами $\mathcal{T}_s := \mathfrak{X}(\mathbb{T}^k, s) \times \{u(s)\}$. Ці многовиди при $s \to +0$

стягуються в точкову множину $\{x_*\} \times \{u(0)\}$ і кожен многовид $\mathcal{T}_s$ є локальним атрактором звуження системи (2) на площину Π_s (інваріантність цієї площини очевидна). Таким чином, коли кажуть, що описана вище біфуркація полягає у виникненні у фазовому просторі інваріантного тора, то насправді йдеться швидше про просторове, а не про динамічне явище.

З появою робіт [20 – 22] розпочалося систематичне вивчення власне динамічних біфуркацій — ефектів, пов'язаних з якісними перебудовами поведінки системи, які розвиваються у часі і зумовлені реальною повільною еволюцією параметрів, коли ті проходять через певні критичні значення. Один із найбільш резонансних результатів, отриманих у цьому напрямку, стосувався явища затримки втрати стійкості у так званих швидко-повільних системах вигляду

$$\dot{x} = f(x, u, \varepsilon), \quad \dot{u} = \varepsilon g(x, u, \varepsilon), \tag{3}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_d)$ — швидкі фазові змінні, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — повільно змінні параметри, а ε — малий статичний параметр [22, 23]. Не маючи змоги наводити повний перелік посилань з теорії динамічних біфуркацій, згадаємо лише роботи [24 – 27]. Зокрема, в [24] висвітлено зв'язок явища затримки втрати стійкості з теорією розв'язків-«качок» сингулярно збурених систем [28], а в [26] вивчено динамічний аналог біфуркації Андронова – Гопфа. Водночас нам невідомі результати, присвячені динамічним аналогам біфуркацій інваріантних торів.

У цій роботі розглядається $(2n+m)$-вимірна система (3) $(d = 2n)$ за припущення, що інваріантний многовид повільних рухів (і.м.п.р.) задається рівнянням $x = 0$, тобто $f(0, u, \varepsilon) \equiv$ $\equiv 0$, а для лінійної системи

$$\dot{x} = \left[f'_x(0, u, 0) + \varepsilon f''_{x,\varepsilon}(0, u, 0)\right] x,$$

яка є першим наближенням системи у варіаціях для фазових змінних відносно і.м. п. р., у просторі параметрів існують зони асимптотичної стійкості $\mathcal{D}_s$, невизначеності $\mathcal{D}_*$ та цілковитої нестійкості $\mathcal{D}_u$. При цьому характеристичний поліном оператора $f'_x(0, u, 0)$ має суто уявні корені для всіх u з об'єднання зазначених областей. Крім того, припускається, що система $\dot{u} = \varepsilon g(0, u, 0)$ конвергентна і її атрактором є точка з області $\mathcal{D}_u$. За певних додаткових умов буде показано, що в системі (3) в $O(\sqrt{\varepsilon})$-околі і.м.п.р. спостерігається динамічна біфуркація такого типу. Спочатку, поки параметри $u(t)$ протягом часу порядку $O(\varepsilon^{-1})$ рухаються в зоні $\mathcal{D}_s$, фазові компоненти $x(t)$ розв'язку описують експоненціально згасаючі коливання. Після того, як $u(t)$, пройшовши $\mathcal{D}_*$, опиняються в $\mathcal{D}_u$, амплітуда коливань починає зростати і врешті-решт при $t \to +\infty$ відповідна траєкторія системи (3) притягується до інваріантного тора, асимптотично зближуючись з певною траєкторією на ньому.

Відзначимо такі дві обставини: 1) для дослідження системи в $O(\sqrt{\varepsilon})$-околі і.м.п.р. здійснюється масштабування $x \mapsto \sqrt{\varepsilon} x$, після чого задача набуває нелокального характеру; 2) встановлення самого факту існування інваріантного тора не викликає суттєвих труднощів і здійснюється з використанням результатів [7, 10] приблизно за тією ж схемою, що й у [17, 19]; натомість значно складніше завдання полягає у визначенні нелокального басейну інваріантного тора системи, одержаної внаслідок зазначеного масштабування. Тут нам вдалося показати, що відносна міра басейну оцінюється знизу величиною порядку $1 - O(\varepsilon^{k/n})$.

Опишемо коротко структуру статті. У п. 2 сформульовано низку умов щодо досліджуваної системи, побудовано її часткову нормальну форму за фазовими змінними x та здійснено перехід до координат полярного типу. У п. 3 досліджено поведінку розв'язків системи першого наближення. У п. 4 сформульовано основний результат, обґрунтування якого випливає з низки допоміжних тверджень п. 5 та з тверджень п. 6, що стосуються існування інваріантного тора і його властивостей як атрактора.

2. Побудова нормальної форми системи за фазовими змінними та основні припущення. Далі щодо системи (3) припускаємо, що:

C_1) праві частини системи задовольняють умови гладкості та обмеженості, а саме, $f(\cdot,\cdot,\cdot) \in \in \hat{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2n}\right)$, $g(\cdot,\cdot,\cdot) \in \hat{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{m}\right)$, де через $\hat{C}^\infty(\mathcal{X}\to\mathcal{Y})$ позначено простір гладких обмежених відображень з області $\mathcal{X}$ у множину $\mathcal{Y}$, які мають обмежені похідні всіх порядків[1];

C_2) система має і.м.п.р., заданий рівнянням $x = 0$, тобто $f(0,u,\varepsilon) = 0$ для всіх $(u,\varepsilon) \in \in \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$;

C_3) при всіх $u\in\mathbb{R}^m$ оператор $f'_x(0,u,0)$ має суто уявні власні числа $\pm i\omega_j(u)$, $j = 1,\ldots,n$, причому

$$\inf_{u\in\mathbb{R}^m}\omega_j(u) > 0, \quad \inf_{u\in\mathbb{R}^m}|\omega_j(u)-\omega_k(u)| > 0, \quad j,k = 1,\ldots,n, \quad j\neq k.$$

Для довільних натуральних $N\geq 2$ та $s\geq 2$ систему (3) подамо у вигляді

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{N} F_k(u,\varepsilon)x^k + \tilde{F}_{N,s+1}(x,u,\varepsilon)x, \quad \dot{u} = \varepsilon\left[\sum_{k=0}^{N} G_k(u,\varepsilon)x^k + \tilde{G}_{N+1,s}(x,u,\varepsilon)\right]. \tag{4}$$

Тут $F_k(u,\varepsilon)x^k$ та $G_k(u,\varepsilon)x^k$ — відповідно $\mathbb{R}^{2n}$- та $\mathbb{R}^m$-значні однорідні форми степеня k щодо x і поліноми степеня s та $s-1$ щодо ε відповідно, а для залишкових членів формули Тейлора — $\tilde{F}_{N,s+1}(x,u,\varepsilon)x$ (тут $\tilde{F}_{N,s+1}(x,u,\varepsilon)$ — $(2n\times 2n)$-матриця) та $\tilde{G}_{N+1,s}(x,u,\varepsilon)$ — при $\|x\|+|\varepsilon|\to 0$ справджуються відношення підпорядкування

$$\left\|\tilde{F}_{N,s+1}(x,u,\varepsilon)\right\| = O\left(\|x\|^N+|\varepsilon|^{s+1}\right), \quad \left\|\tilde{G}_{N+1,s}(x,u,\varepsilon)\right\| = O\left(\|x\|^{N+1}+|\varepsilon|^{s}\right).$$

Без обмеження загальності міркувань можемо вважати, що для заданого натурального s і відповідного достатньо малого $\varepsilon_0 > 0$ матриця $F_1(u,\varepsilon)$ на множині $\mathbb{R}^m\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ є дійсною нормальною формою вигляду

$$J(u,\varepsilon) := \operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix}\varepsilon\bar{\alpha}_1(u,\varepsilon) & -\bar{\omega}_1(u,\varepsilon)\\ \bar{\omega}_1(u,\varepsilon) & \varepsilon\bar{\alpha}_1(u,\varepsilon)\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\varepsilon\bar{\alpha}_n(u,\varepsilon) & -\bar{\omega}_n(u,\varepsilon)\\ \bar{\omega}_n(u,\varepsilon) & \varepsilon\bar{\alpha}_n(u,\varepsilon)\end{pmatrix}\right].$$

Тут кожна з функцій $\bar{\alpha}_j(u,\varepsilon)$, $\bar{\omega}_j(u,\varepsilon)$ є поліномом щодо ε степеня, не вищого за $s-1$ та s відповідно, з гладкими щодо u коефіцієнтами класу $\hat{C}^\infty(\mathbb{R}^m\to\mathbb{R})$, причому $\bar{\omega}_j(u,0) = \omega_j(u)$. Щоб у цьому пересвідчитися, достатньо скористатися таким твердженням.

Лема 1. *Нехай* $A(\cdot,\cdot)\in\hat{C}^\infty\left(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{d\times d}\right)$, $G(\cdot,\cdot)\in\hat{C}^\infty\left(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m\right)$, *де* $\mathbb{R}^{d\times d}$ *позначає простір* $(d\times d)$*-матриць з дійсними елементами. Якщо для всіх* $u\in\mathbb{R}^m$ *матриця* $A_0(u) := A(u,0)$ *має різні власні числа* $\lambda_j(u)$, $j = 1,\ldots,d$, *причому*

[1] Оскільки подальші дослідження стосуються поведінки розв'язків системи (3) в обмеженій області змінних x, u та при малих значеннях параметра ε, то виконання умови C_1 для гладких, але необмежених відображень f та g завжди можна досягти, якщо праві частини системи домножити на гладку фінітну функцію, що дорівнює 1 в кулі, яка має достатньо великий радіус і центр якої розташовано в початку координат простору $\mathbb{R}^{2n+m+1}$.

$$\inf_{u\in\mathbb{R}^m} |\lambda_i(u) - \lambda_j(u)| > 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, d, \quad i \neq j, \tag{5}$$

то для будь-якого натурального s *існує відображення* $T(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}^\infty\left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}\right)$ *з такими властивостями*: 1) *відображення* $\varepsilon \mapsto T(u,\varepsilon)$ *є* $\mathbb{R}^{d\times d}$*-значним поліномом степеня* s *щодо* ε, *коефіцієнти якого належать класу* $\hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d\times d}\right)$; 2) *існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що* $\inf_{(u,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)} |\det T(u,\varepsilon)| > 0$, *і внаслідок перетворення* $x \mapsto T(u,\varepsilon)x$ *система*

$$\dot{x} = A(u,\varepsilon)x, \quad \dot{u} = \varepsilon G(u,\varepsilon) \tag{6}$$

набирає вигляду

$$\dot{x} = \left[B(u,\varepsilon) + \varepsilon^{s+1}\tilde{B}(u,\varepsilon)\right]x, \quad \dot{u} = \varepsilon G(u,\varepsilon),$$

де матриця $B(u,\varepsilon) = \sum_{k=0}^s \varepsilon^k B_k(u)$ *є дійсною нормальною формою, причому*

$$B_k(\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d\times d}\right), \quad k = 0, \ldots, s, \quad \tilde{B}(\cdot,\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^m \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^{d\times d}\right).$$

Доведення. Оскільки виконано умову (5), то існує відображення $T_0(\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d\times d}\right)$ таке, що матриця $B_0(u) := T_0^{-1}(u)A_0(u)T_0(u)$ є дійсною нормальною формою. Крім того, існує стала матриця S, у загальному випадку з комплексними елементами, така, що $S^{-1}B_0(u)S$ є діагональною. Побудуємо формальну заміну змінних

$$x \mapsto \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k T_k(u)x$$

з коефіцієнтами $T_k(\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d\times d}\right)$, в результаті якої система (6) набере вигляду

$$\dot{x} = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k B_k(u)x, \quad \dot{u} = \varepsilon G(u,\varepsilon),$$

де $B_k(\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d\times d}\right)$ і $B_k(u)$ комутує з $B_0(u)$ для кожного $k \geq 1$.

З цією метою введемо в $\mathbb{R}^{d\times d}$ скалярний добуток $\langle X, Y\rangle := \operatorname{tr}(XY)$ і зауважимо, що оскільки

$$\langle ZX - XZ, Y\rangle = \operatorname{tr}\left[(ZX - XZ)Y\right] = \operatorname{tr}(YZX - ZYX) = -\langle X, ZY - YZ\rangle,$$

то для кожного $Z \in \mathbb{R}^{d\times d}$ оператор $X \mapsto \mathrm{ad}_Z X := ZX - XZ$ є кососиметричним, а отже, $\mathbb{R}^{d\times d} = \ker \mathrm{ad}_Z \oplus \mathrm{im}\, \mathrm{ad}_Z$ (сума — ортогональна та ad_Z-інваріантна). Звідси випливає, що, позначивши для довільного $Y \in \mathbb{R}^{d\times d}$ його ортогональну проекцію на $\ker \mathrm{ad}_Z$ через Y_0, рівняння $\mathrm{ad}_Z X = Y - Y_0$ з фіксованим Z можна однозначно розв'язати відносно $X \in \mathrm{im}\, \mathrm{ad}_Z$. При цьому, якщо Z має N різних власних чисел, існує невироджена матриця S (з комплексними елементами) така, що матриця $S^{-1}ZS$ є діагональною. Оператор X належить $\ker \mathrm{ad}_Z$ тоді й лише тоді, коли матриця $S^{-1}XS$ є діагональною.

Далі, нехай $\sum_{i\geq 0} \varepsilon^i A_i(u)$ та $\sum_{j\geq 0} \varepsilon^j G_j(u)$ — формальні розвинення відповідно для $A(u,\varepsilon)$ та $G(u,\varepsilon)$ за степенями ε. Зрівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε у формальній рівності

$$\varepsilon \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \frac{\partial T_i}{\partial u} \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j G_j(u) + \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i T_i(u) \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j B_k(u) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i A_i(u) \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j T_j(u),$$

яку мають задовольняти коефіцієнти $B_k(u)$ та $T_k(u)$, дістанемо співвідношення

$$T_0(u)B_0(u) = A_0(u)T_0(u),$$

$$T_k(u)B_0(u) + T_0(u)B_k(u) = A_0(u)T_k(u) + A_k(u)T_0(u) + R_k(u), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де кожен оператор $R_k(u)$ виражається через $T_i(u)$, $B_j(u)$, $A_l(u)$ з індексами, меншими за k. Поклавши $T_k(u) := T_0(u)X_k(u)$ при $k \geq 1$ та домноживши всі рівності зліва на $T_0^{-1}(u)$, матимемо

$$B_0(u) = T_0^{-1}(u)A_0(u)T_0(u),$$

$$-\mathrm{ad}_{B_0(u)}X_k(u) = T_0^{-1}(u)A_k(u)T_0(u) + R_k(u) - B_k(u), \quad k \geq 1.$$

Тепер звідси можна однозначно визначити $X_k(u) \in \mathrm{im}\,\mathrm{ad}_{B_0(u)}$, якщо за $B_k(u)$ взяти ортогональну проекцію матриці $P_k(u) := T_0^{-1}(u)A_k(u)T_0(u) + R_k(u)$ на $\ker \mathrm{ad}_{B_0(u)}$. (З викладеного вище випливає, що $B_k(u)$ дорівнює діагональній частині матриці $S^{-1}P_k(u)S$, домноженій зліва на S та справа на S^{-1}.)

Тепер зрозуміло, що шуканим неформальним перетворенням є $T(u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{s} \varepsilon^k T_k(u)$.

Лему 1 доведено.

Нехай $s_j \in \mathbb{C}^{2n}$ — власний вектор матриці $J_0(u) := F_1(u, 0) = J(u, 0)$, який відповідає власному числу $\mathrm{i}\omega_j(u)$, $k = 1, \ldots, n$. Оскільки

$$J_0(u) = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & -\omega_1(u) \\ \omega_1(u) & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & -\omega_n(u) \\ \omega_n(u) & 0 \end{pmatrix}\right],$$

то вектори s_j не залежать від u. Утворимо матрицю S, першими n стовпцями якої є вектори $s_1, \ldots, s_n$, а n останніми — відповідні комплексно-спряжені вектори, і визначимо базисні форми

$$\varsigma_{\mathbf{q}}(y) := [S^{-1}y]^{\mathbf{q}}, \quad e_{i,\mathbf{q}}(y) = \varsigma_{\mathbf{q}}(y)s_i, \tag{7}$$

де $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_{2n}) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$, $x^{\mathbf{q}} = x_1^{q_1} \ldots x_{2n}^{q_{2n}}$.

Перейдемо до побудови перетворення, яке зводить до нормальної форми за швидкими змінними N-струмінь системи (4) за додаткового припущення про відсутність резонансів певного порядку між частотами $\omega_k(u)$, $k = 1, \ldots, n$. Для того щоб сформулювати відповідний результат, визначимо $(n \times 2n)$-матрицю $I = [E_n; -E_n]$, де E_n — n-вимірна одинична матриця, покладемо

$$\omega(u) := (\omega_1(u), \ldots, \omega_n(u)), \quad |\mathbf{q}| := |q_1| + \ldots + |q_{2n}|,$$

позначимо через $\mathbf{e}_i$ i-й орт координатного простору $\mathbb{R}^{2n}$ (тобто вектор, i-а координата якого дорівнює 1, а всі інші — нулі) і для додатних ν та σ визначимо множини

$$\mathcal{A}_i(N, \nu) := \left\{u \in \mathbb{R}^m : \ |\langle \omega(u), I(\mathbf{q} - \mathbf{e}_i)\rangle| > \nu \ \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_+^{2n} : 2 \leq |\mathbf{q}| \leq N, \ I(\mathbf{q} - \mathbf{e}_i) \neq 0\right\},$$

$$\mathcal{A}_0(N, \nu) := \left\{u \in \mathbb{R}^m : \ |\langle \omega(u), I\mathbf{q}\rangle| > \nu \ \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_+^{2n} : 2 \leq |\mathbf{q}| \leq N, \ I\mathbf{q} \neq 0\right\},$$

$$\mathcal{A}(N, \nu) := \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i(N, \nu), \quad B_\delta^{2n}(y_0) := \{y : \|y - y_0\| < \delta\}, \quad B_\delta^{2n} := B_\delta^{2n}(0),$$

$$\mathfrak{R}_0(N) := \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_+^{2n} : 0 \le |\mathbf{q}| \le N,\ I\mathbf{q} = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{R}_i(N) := \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_+^{2n} : 2 \le |\mathbf{q}| \le N, I(\mathbf{q} - \mathbf{e}_i) = 0 \right\}.$$

Твердження 1. *Нехай виконано умови* $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3$ *і* $s \ge 2$ *— задане натуральне число. Припустимо, що для деяких* $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$, *та* $\nu > 0$ *множина* $\mathcal{A}(N,\nu)$ *непорожня. Тоді існують числа* $\delta > 0$ *та* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що в результаті заміни змінних*

$$x = y + \sum_{k=2}^{N} X_k(v,\varepsilon) y^k, \quad u = v + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} U_k(v,\varepsilon) y^k, \quad (y,v,\varepsilon) \in B_\delta^{2n} \times \mathcal{A}(N,\nu) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \tag{8}$$

де

$$X_k(v,\varepsilon) y^k = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon^j X_{k,j}(v) y^k, \quad U(v,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s-1} \varepsilon^j U_{k,j}(v) y^k$$

і

$$X_{k,j}(\cdot) y^k \in \hat{\mathrm{C}}^\infty \left(\mathcal{A}(N,\nu) \to \mathbb{R}^{2n} \right),$$

$$U_{k,j}(\cdot) y^k \in \hat{\mathrm{C}}^\infty \left(\mathcal{A}(N,\nu) \to \mathbb{R}^{m} \right) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad k = 1, \ldots, s,$$

система (4) *набирає вигляду*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= J(v,\varepsilon) y + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\mathbf{q} \in \mathfrak{R}_k(N)} H_{i,\mathbf{q}}(v,\varepsilon) e_{i,\mathbf{q}}(y) + \tilde{H}_{N,s+1}(y,v,\varepsilon) y, \\ \dot{v} &= \varepsilon \left[\sum_{\mathbf{q} \in \mathfrak{R}_0(N)} \varsigma_{\mathbf{q}}(y) C_{\mathbf{q}}(v,\varepsilon) + \tilde{C}_{N+1,s}(y,v,\varepsilon) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

При цьому

$$H_{i,\mathbf{q}}(v,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon^j H_{i,\mathbf{q},j}(v), \quad C_{\mathbf{q}}(v,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s-1} \varepsilon^j C_{\mathbf{q},j}(v),$$

де $H_{i,\mathbf{q},j}(\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty \left(\mathcal{A}(N,\nu) \to \mathbb{C} \right)$, $C_{\mathbf{q},j}(\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty \left(\mathcal{A}(N,\nu) \to \mathbb{C}^m \right)$, *а для залишкових членів формули Тейлора —* $\tilde{H}_{N,s+1}(y,v,\varepsilon) y$ *та* $\tilde{C}_{N+1,s}(y,v,\varepsilon)$ *— справджуються відношення підпорядкування*

$$\left\| \tilde{H}_{N,s+1}(y,v,\varepsilon) \right\| = O\left(\|y\|^N + \varepsilon^{s+1} \right),$$

$$\left\| \tilde{C}_{N+1,s}(y,v,\varepsilon) \right\| = O\left(\|y\|^{N+1} + \varepsilon^{s} \right), \quad \|y\| + |\varepsilon| \to 0.$$

Доведення. Розглянемо вкорочену систему

$$\dot{x} = J(u,\varepsilon) x + \sum_{k=2}^{N} F_k(u,\varepsilon) x^k, \quad \dot{u} = \varepsilon \sum_{k=0}^{N} G_k(u,\varepsilon) x^k$$

і застосуємо до неї поліноміальне перетворення (8).

Якщо

$$\dot{y} = J(v,\varepsilon)y + \sum_{k\geq 2} H_k(v,\varepsilon)y^k, \quad \dot{v} = \varepsilon \sum_{k\geq 0} C_k(v,\varepsilon)y^k$$

— перетворена система, то справджуються рівності

$$J(v,\varepsilon)y + \sum_{k\geq 2} H_k(v,\varepsilon)y^k + \sum_{j=2}^{N} \frac{\partial \left(X_j(v,\varepsilon)y^j\right)}{\partial y} \left[J(v,\varepsilon)y + \sum_{i\geq 2} H_i(v,\varepsilon)y^i\right] +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N} \frac{\partial \left(X_j(v,\varepsilon)y^j\right)}{\partial v} \left[\varepsilon \sum_{i\geq 0} C_i(v,\varepsilon)y^i\right] =$$

$$= J\left(v + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} U_j(v,\varepsilon)y^j, \varepsilon\right) \left[y + \sum_{i=2}^{N} X_i(v,\varepsilon)y^i\right] +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N} F_j\left(v + \varepsilon \sum_{l=1}^{N} U_l(v,\varepsilon)y^l, \varepsilon\right) \left[y + \sum_{i=2}^{N} X_i(v,\varepsilon)y^i\right]^j,$$

$$\sum_{k\geq 0} C_k(v,\varepsilon)y^k + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \left[U_j(v,\varepsilon)y^j\right]}{\partial y} \left[J(v,\varepsilon)y + \sum_{i\geq 2} H_i(v,\varepsilon)y^i\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \left(U_j(v,\varepsilon)y^j\right)}{\partial v} \left[\varepsilon \sum_{i\geq 0} C_i(v,\varepsilon)y^i\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} G_j\left(v + \varepsilon \sum_{l=1}^{N} U_l(v,\varepsilon)y^l, \varepsilon\right) \left[y + \sum_{i=2}^{N} X_i(v,\varepsilon)y^i\right]^j.$$

Зрівнявши однорідні форми щодо y у лівій та правій частинах, дістанемо

$$C_0(v,\varepsilon) := G_0(v,\varepsilon),$$

$$C_1(v,\varepsilon)y + U_1(v,\varepsilon)J(v,\varepsilon)y + \varepsilon \frac{\partial U_1(v,\varepsilon)y}{\partial v} C_0(v,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \frac{\partial G_0(v,\varepsilon)}{\partial v} [U_1(v,\varepsilon)y] + G_1(v,\varepsilon)y,$$

$$H_k(v,\varepsilon)y^k + \frac{\partial \left(X_k(v,\varepsilon)y^k\right)}{\partial y} J(v,\varepsilon)y + \varepsilon \frac{\partial \left(X_k(v,\varepsilon)y^k\right)}{\partial v} C_0(v,\varepsilon) =$$

$$= J(v,\varepsilon)X_k(v,\varepsilon)y^k + F_k(v,\varepsilon)y^k + M_k(v,\varepsilon)y^k, \quad k = 2,\ldots,N,$$

$$C_k(y,\varepsilon)y^k + \frac{\partial[U_k(v,\varepsilon)y^k]}{\partial y}\,J(v,\varepsilon)y + \varepsilon\,\frac{\partial\left(U_k(v,\varepsilon)y^k\right)}{\partial v}\,C_0(v,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\,\frac{\partial G_0(v,\varepsilon)}{\partial v}\,U_k(v,\varepsilon)y^k + G_1(v,\varepsilon)X_k(v,\varepsilon)y^k + G_k(v,\varepsilon)y^k + N_k(v,\varepsilon)y^k, \quad k = 2,\ldots,N,$$

де кожна з форм $M_k(u,\varepsilon)$ та $N_k(u,\varepsilon)$ визначається формами, що входять до перетворюваної та перетвореної систем, а також до самих перетворень, і мають індекси, менші за k. Форми, що входять до записаних рівностей, допускають розвинення вигляду $H_k(u,\varepsilon) \sim \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j H_{k,j}(u)$ і т. д. Після введення операторів

$$\mathfrak{L}_{J_0(v)y}\cdot := \frac{\partial\cdot}{\partial y}\,J_0(y)y - J_0(v)\cdot, \quad \partial_{J_0(v)y}\cdot := \frac{\partial\cdot}{\partial y}\,J_0(y)y$$

і зрівнювання коефіцієнтів у лівих і правих частинах дістаємо гомологічні рівняння для визначення $X_{k,j}(u)$, $H_{k,j}(u)$, $U_{k,j}(u)$, $C_{k,j}(u)$:

$$U_{1,j}(v)J_0(v)y = G_{1,j}(v)y - \sum_{i=0}^{j-1}U_{1,i}(v)J_{j-i}(v)y +$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1}\left[\frac{\partial C_{0,j-i-1}(v)}{\partial v}\,U_{1,i}(v)y - \frac{\partial U_{1,i}(v)y}{\partial v}\,C_{0,j-i-1}(v)\right] - C_{1,j}(v)y,$$

де $j = 0,\ldots,s-1$, і

$$\mathfrak{L}_{J_0(v)y}X_{k,j}(v)y^k = F_{k,j}(v)y^k + P_{k,j}(v)y^k - H_{k,j}(v)y^k,$$

$$\partial_{J_0(v)y}U_{k,j}(v)y^k = G_{1,0}(v)X_{k,j}(v)y^k + G_{k,j}(v)y^k + Q_{k,j}(v)y^k - C_{k,j}(v)y^k,$$

де $k = 2,\ldots,N$, $j = 0,\ldots,s$. Тут форми $P_{k,j}(u)$, $Q_{k,j}(u)$ будуються з використанням форм, знайдених з аналогічних рівнянь на попередньому кроці, тобто з рівнянь, у яких замість індексу k фігурує $k-1$, а форми $H_{k,j}(v)$ та $C_{k,j}(v)$ вибираємо так, щоб перетворена система мала в певному сенсі максимально просту структуру. Зауважимо, що оскільки $J_0(v)$ невироджена, то $U_{1,j}(v)$ однозначно знайдемо, поклавши $C_{1,j}(v) = 0$, $j \geq 0$. Після цього перейдемо до визначення інших шуканих форм, подавши їх у вигляді розкладів за базисними формами (7):

$$X_{k,j}(v) = \sum_{|\mathbf{q}|=k}\varsigma_{\mathbf{q}}(y)X_{\mathbf{q},j}(v) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{|\mathbf{q}|=k}X_{i,\mathbf{q},j}(v)e_{i,\mathbf{q}}(y), \quad U_{k,j}(v) = \sum_{|\mathbf{q}|=k}\varsigma_{\mathbf{q}}(y)U_{\mathbf{q},j}(v) \ \text{ і т. д.}$$

Оскільки $S^{-1}J_0(v)S := \operatorname{diag}\left[\mathrm{i}\omega_1(v),\ldots,\mathrm{i}\omega_n(v),-\mathrm{i}\omega_1(v),\ldots,-\mathrm{i}\omega_n(v)\right]$, то неважко дістати рівності

$$\partial_{J_0(v)y}\varsigma_{\mathbf{q}}(y) = [\varsigma_{\mathbf{q}}(y)]'_y J_0(v)y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left[\left(S^{-1}\mathrm{e}^{J_0(v)t}y\right)^{\mathbf{q}}\right] = \langle\omega(v), I\mathbf{q}\rangle\,\varsigma_{\mathbf{q}}(y),$$

$$\mathfrak{L}_{J_0(v)y}e_{i,\mathbf{q}}(y) = [e_{i,\mathbf{q}}(y)]'_y\,J_0(v)y - J_0(v)e_{i,\mathbf{q}}(y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{e}^{-J_0(v)t}e_{i,\mathbf{q}}\left(\mathrm{e}^{J_0(v)t}y\right) =$$

$$= \langle \omega(v), I(\mathbf{q} - \mathbf{e}_i) \rangle \, e_{i,\mathbf{q}}(y),$$

тоді рівняння для визначення коефіцієнтів шуканих форм набирають вигляду

$$\langle \omega(v), I(\mathbf{q} - \mathbf{e}_i) \rangle \, X_{i,\mathbf{q},j}(v) = F_{i,\mathbf{q},j}(v) - P_{i,\mathbf{q},j}(v) - H_{i,\mathbf{q},j}(v),$$

$$\langle \omega(v), I\mathbf{q} \rangle \, U_{\mathbf{q},j}(v) = G_{1,0}(v) X_{\mathbf{q},j}(v) + G_{\mathbf{q},j}(v) + Q_{\mathbf{q},j}(v) - C_{\mathbf{q},j}(v).$$

Якщо $v \in \mathcal{A}_i(N,\nu)$, $i \neq 0$, то у випадку $I(\mathbf{q} - \mathbf{e}_i) = 0$ покладаємо $H_{i,\mathbf{q},j}(v) = F_{i,\mathbf{q},j}(v) - P_{i,\mathbf{q},j}(v)$, $X_{i,\mathbf{q},j}(v) = 0$, а в іншому випадку $H_{i,\mathbf{q},j}(v) = 0$ і однозначно визначаємо $X_{i,\mathbf{q},j}(v)$. Аналогічно, якщо $v \in \mathcal{A}_0(N,\nu)$, то $C_{\mathbf{q},j}(v) = G_{1,0}(v) X_{\mathbf{q},j}(v) + G_{\mathbf{q},j}(v) + Q_{\mathbf{q},j}(v)$, $U_{\mathbf{q},j}(v) = 0$ при $I\mathbf{q} = 0$, $C_{\mathbf{q},j}(v) = 0$ при $I\mathbf{q} \neq 0$, і в цьому випадку однозначно знаходимо $U_{\mathbf{q},j}(v)$.

Виконавши побудовану заміну змінних у системі (4), дістанемо систему (9).

Твердження 1 доведено.

Перейдемо в системі (9) до комплексних змінних $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, поклавши

$$y = \sum_{j=1}^{n} z_j s_j + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \bar{s}_j = 2\mathrm{Re} \left[\sum_{j=1}^{n} z_j s_j \right].$$

Система (9) набирає вигляду

$$\dot{z}_j = \left[\varepsilon \bar{\alpha}_j(v,\varepsilon) + \mathrm{i} \bar{\omega}_j(v,\varepsilon) + \sum_{3 \leq 2|\mathbf{p}|+1 \leq N} h_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon)(|z|)^{2\mathbf{p}} \right] z_j +$$

$$+ O\left(\|z\|^{N+1} + \varepsilon^{s+1} \|z\| \right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\dot{v} = \varepsilon \left[\sum_{0 \leq 2|\mathbf{p}| \leq N} c_{\mathbf{p}}(v,\varepsilon)(|z|)^{2\mathbf{p}} + O\left(\|z\|^{N+1} + \varepsilon^s \right) \right],$$

де $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_+^n$, $h_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon) := H_{j,(\mathbf{p},\mathbf{p})+\mathbf{e}_j}(v,\varepsilon)$, $c_{\mathbf{p}}(v,\varepsilon) := C_{(\mathbf{p},\mathbf{p})}(v,\varepsilon)$, $(\mathbf{p},\mathbf{p}) := (p_1, \ldots, p_n, p_1, \ldots, p_n)$, $(|z|) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$, а відношення підпорядкування вигляду $O(\|y\|^{N+1} + \varepsilon^{s+1}\|y\|)$ та $O(\|y\|^{N+1} + \varepsilon^s)$ позначають залишкові члени такого самого типу, що й $\tilde{H}_{N,s+1}(y,v,\varepsilon)y$ та $\tilde{C}_{N+1,s}(y,v,\varepsilon)$ відповідно. Зауважимо, що, як неважко показати, рівняння для $\bar{z}_j$ є комплексно-спряженим з рівнянням для z_j.

Далі вважатимемо, що параметр ε набуває лише невід'ємних значень. Увівши координати r_j, $\varphi_j | \bmod 2\pi$ полярного типу $z_j = \sqrt{\varepsilon r_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$, $j = 1, \ldots, n$, позначивши $a_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon) := \mathrm{Re}\, h_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon)$, $b_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon) := \mathrm{Im}\, h_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $\sqrt{r} = (\sqrt{r_1}, \ldots, \sqrt{r_n})$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ та поклавши $s = (N+1)/2$, матимемо систему вигляду

$$\dot{r}_j = 2\varepsilon \left[\bar{\alpha}_j(v,\varepsilon) + \sum_{3 \leq 2|\mathbf{p}|+1 \leq N} \varepsilon^{|\mathbf{p}|-1} a_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon) r^{\mathbf{p}} \right] r_j + \varepsilon^{N/2} \sqrt{r_j} R_j(r,v,\varphi,\varepsilon),$$

$$\dot{v} = \varepsilon \left[\sum_{0 \leq 2|\mathbf{p}| \leq N} \varepsilon^{|\mathbf{p}|} c_{\mathbf{p}}(v,\varepsilon) r^{\mathbf{p}} + \varepsilon^{(N+1)/2} Z(r,v,\varphi,\varepsilon) \right], \tag{10}$$

$$\dot{\varphi}_j = \bar{\omega}_j(v,\varepsilon) + \sum_{3\le 2|\mathbf{p}|+1\le N} \varepsilon^{|\mathbf{p}|} b_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon) r^{\mathbf{p}} + \varepsilon^{N/2} r_j^{-1/2} \Phi_j(r,v,\varphi,\varepsilon), \quad j = 1,\ldots,n,$$

де залишкові члени допускають зображення

$$R_j(r,v,\varphi,\varepsilon) := \sum_{|\mathbf{q}|=N+1} \tilde{a}_{j,\mathbf{q}}(\sqrt{\varepsilon r}, v,\varphi,\varepsilon)\sqrt{r}^{\mathbf{q}} + 2\sum_{|\mathbf{q}|=1} \hat{a}_{j,\mathbf{q}}(\sqrt{\varepsilon r}, v,\varphi,\varepsilon)\sqrt{r}^{\mathbf{q}},$$

$$\Phi_j(r,v,\varphi,\varepsilon) := \sum_{|\mathbf{q}|=N+1} \tilde{b}_{j,\mathbf{q}}(\sqrt{\varepsilon r}, v,\varphi,\varepsilon)\sqrt{r}^{\mathbf{q}} + \sum_{|\mathbf{q}|=1} \hat{b}_{j,\mathbf{q}}(\sqrt{\varepsilon r}, v,\varphi,\varepsilon)\sqrt{r}^{\mathbf{q}},$$

$$Z(r,v,\varphi,\varepsilon) := \sum_{|\mathbf{q}|=N+1} \tilde{c}_{\mathbf{q}}(\sqrt{\varepsilon r}, v,\varphi,\varepsilon)\sqrt{r}^{\mathbf{q}} + \hat{c}(\sqrt{\varepsilon r}, v,\varphi,\varepsilon),$$

в яких функції $\tilde{a}_{j,\mathbf{q}}(\rho,v,\varphi,\varepsilon), \hat{a}_{j,\mathbf{q}}(\rho,v,\varphi,\varepsilon),\ldots$ є гладкими в $[0,\varrho_0]^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^n\times[0,\varepsilon_0]$, а $\varrho_0>0$ і $\varepsilon_0\ll 1$ — деякі додатні числа.

Ввівши для пари векторів $p=(p_1,\ldots,p_n)$, $q=(q_1,\ldots,q_n)$ операцію $p\bullet q=(p_1q_1,\ldots,p_nq_n)$ та поклавши

$$\alpha(v) := (\alpha_1(v),\ldots,\alpha_n(v)), \quad A(v) := -\left\{a_{i,\boldsymbol{\epsilon}_j}(v,0)\right\}_{i,j=1}^n, \quad c(v) := c_0(v,0)$$

(тут $\boldsymbol{\epsilon}_j$ позначає j-й координатний орт простору $\mathbb{R}^n$), запишемо систему (10) у вигляді

$$\dot{r} = 2\varepsilon\left[\alpha(v) - A(v)r + \varepsilon B(r,v,\varepsilon)\right]\bullet r + \varepsilon^{N/2}\sqrt{r}\bullet R(r,v,\varphi,\varepsilon),$$

$$\dot{v} = \varepsilon c(v) + \varepsilon^2 W(r,v,\varepsilon) + \varepsilon^{(N+3)/2} Z(r,v,\varphi,\varepsilon), \tag{11}$$

$$\dot{\varphi} = \omega(v) + \varepsilon\Psi(r,v,\varepsilon) + \varepsilon^{N/2} r^{-1/2}\bullet\Phi(r,v,\varphi,\varepsilon).$$

Усі відображення, які фігурують в цій системі, обмежені в $[0,\varrho]^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^n\times[0,\varepsilon_0]$, де $0<\varrho<\varrho_0/\varepsilon_0$, а характер їхньої гладкості визначається відповідними членами системи (10). Крім того, рівномірно щодо $v\in B^m_{R^*}$, $\varphi\in\mathbb{T}^n$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ виконано відношення підпорядкування $\|R(r,v,\varphi,\varepsilon)\| = O(\|\sqrt{r}\|)$, $\|\Phi(r,v,\varphi,\varepsilon)\| = O(\|\sqrt{r}\|)$ при $\|r\|\to 0$.

***Зауваження* 1.** Формально система (11) через наявність члена $r^{-1/2}\bullet\Phi(r,v,\varphi,\varepsilon)$ визначена на $(0,\varrho]^n\times B^m_{R^*}\times\mathbb{T}^n$. Однак слід мати на увазі, що в цій системі можуть зустрічатися пари розв'язків $(r_-(t),v_-(t),\varphi_-(t))$, $t\in(t_-,t_0)$, та $(r_+(t),v_+(t),\varphi_+(t))$, $t\in(t_0,t_+)$, такі, що $\lim_{t\to t_0\pm 0} r_\pm(t) = r_0$, серед компонент вектора r_0 є нульові, але відповідні компоненти функцій $r_\pm(t)$ не є тотожними нулями. Неважко зрозуміти, що ці два розв'язки породжуються деяким розв'язком $(y(t),v(t))$ системи (9), визначеним на (t_-,t_+). Тому вважатимемо, що зазначена пара породжує розв'язок системи (11), визначений на всьому (t_-,t_+).

Аби не ускладнювати подальші міркування, розглядатимемо випадок, коли області $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{D}_*$ та $\mathcal{D}_u$, про які йшлося у вступі, утворено за допомогою вкладених куль. А саме, для трійки чисел R_0, R_*, R^* таких, що $0<R_0<R_*<R^*$, введемо позначення

$$\alpha_0 := \min_{1\le j\le m}\inf_{v\in B^m_{R_0}} \alpha_j(v), \quad \alpha_* := -\max_{1\le j\le m}\sup_{v\in B^m_{R^*}\setminus B^m_{R_*}} \alpha_j(v), \quad \alpha^* := \sup_{v\in B^m_{R^*}}\|\alpha(v)\|,$$

$$A_* := \inf_{v\in B^m_{R^*}}\min_{\|\xi\|=1}\left\langle A(v)\xi,\xi\right\rangle, \quad A^* := \sup_{v\in B^m_{R^*}}\|A(v)\|$$

і сформулюємо такі припущення:

C$_4$) існують числа $R_0 < R_* < R^*$ такі, що $\alpha_* > 0$, $\alpha_0 > 0$, $A_* > 0$;

C$_5$) виконано умови відсутності резонансів: $B^m_{R^*} \subset \mathcal{A}(N, \nu)$ для деяких $N \geq 3$, $\nu > 0$; при цьому якщо $N < 5$, то $0 \in \mathcal{A}(5, \nu)$;

C$_6$) виконано умови конвергентності системи $\dot{v} = c(v)$: існує $\kappa > 0$ таке, що $\langle c(v), v\rangle < < -\kappa\|v\|^2$ для всіх $v \in B^m_{R^*}$;

C$_7$) усі компоненти вектора $r^* := A^{-1}(0)\alpha(0)$ додатні.

Крім того, далі без обмеження загальності міркувань можемо вважати, що $r^* = (1, 1, \ldots, 1)$. Цього завжди можна досягти за допомогою масштабного перетворення $r \mapsto r^* \bullet r$.

З огляду на припущення C$_4$ вважаємо, що

$$\mathcal{D}_s = B^m_{R^*} \setminus B^m_{R_*}, \quad \mathcal{D}_* = B^m_{R_*} \setminus B^m_{R_0}, \quad \mathcal{D}_u = B^m_{R_0}. \tag{12}$$

3. Аналіз системи першого наближення. Щоб зрозуміти, якою приблизно може бути поведінка розв'язків системи (11), виокремимо систему першого наближення

$$\dot{r} = 2\varepsilon[\alpha(v) - A(v)r] \bullet r, \quad \dot{v} = \varepsilon c(v), \quad \dot{\varphi} = \omega(v) + \varepsilon\Psi(r, v, \varepsilon).$$

На цьому етапі основний інтерес для нас становить поведінка підсистеми щодо змінних r і v:

$$\dot{r} = 2\varepsilon[\alpha(v) - A(v)r] \bullet r, \tag{13}$$

$$\dot{v} = \varepsilon c(v). \tag{14}$$

Покажемо, що за перелічених вище умов розв'язок цієї системи, який стартує з точки $(v(0), r(0))$, де $v(0) \in \mathcal{D}_s$, демонструє таку поведінку. Відстань від $v(t)$ до початку координат простору параметрів $\mathbb{R}^m$ строго монотонно прямує до нуля при $t \to +\infty$. При цьому, поки $v(t)$ перебуває в зоні $\mathcal{D}_s$, компонента $r(t)$ з експоненціальною швидкістю наближається до початку координат простору $\mathbb{R}^n$. Під час перебування точки $v(t)$ в зоні $\mathcal{D}_*$ характер поведінки компоненти $r(t)$ поступово змінюється, зокрема при наближенні $v(t)$ ззовні до сфери радіуса R_0 коефіцієнти $\alpha_j(v(t))$ стають додатними, і з цього часу тривіальний розв'язок підсистеми (13) починає відігравати роль репелера. Нарешті, з моменту, коли точка $v(t)$ входить у зону $\mathcal{D}_u$, компонента $r(t)$ прямує до фінального значення r^*. Оскільки для повної системи першого наближення рівняння $r = r^*$, $v = 0$ визначають у фазовому просторі n-вимірний інваріантний тор, то описаний вище процес природно трактувати як явище динамічної біфуркації інваріантного тора у підсистемі (13) внаслідок повільної еволюції параметрів v.

Твердження 2. *У кулі $B^m_{R^*}$ початок координат є глобальним атрактором системи* (14).

Доведення. З умови C$_6$ випливає, що вздовж кожного розв'язку системи (14) функція $\langle v, v\rangle$ монотонно прямує до нуля.

Нехай $\{v(t)\}_{t\geq 0}$ — додатна півтраєкторія системи (14). Розглянемо розв'язок $r(\cdot)$ системи

$$\dot{r} = 2\varepsilon[\alpha(v(t)) - A(v(t))r] \bullet r,$$

у якого $r(0) \in (0, \infty)^n$. Оскільки j-ту компоненту $r_j(\cdot)$ цього розв'язку можна трактувати як нетривіальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з неперервним коефіцієнтом, то $r_j(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$.

Твердження 3. *Нехай $v(0) \in \mathcal{D}_s$ і $T^* = \sup\{t \geq 0 : v(t) \in \mathcal{D}_s\}$. Тоді $|r(t)| \leq |r(0)|e^{-2\varepsilon\alpha_* t}$ для всіх $t \in [0, T^*]$.*

Доведення. З урахуванням умови C_4 на проміжку $[0, T^*]$ маємо

$$\frac{d|r(t)|}{dt} \leq 2\varepsilon\left[-\alpha_*|r(t)| - \langle A(v(t))r(t), r(t)\rangle\right] \leq 2\varepsilon\left[-\alpha_*|r(t)| - A_*\|r(t)\|^2\right] \leq -2\varepsilon\alpha_*|r(t)|,$$

звідки й випливає оцінка для $|r(t)|$.

***Наслідок* 1.** *Для всіх* $v \in \mathcal{D}_s$ *похідна функції* $|r|$ *внаслідок підсистеми* (13) *менша за* $-2\varepsilon\alpha_*|r|$.

Твердження 4. *Точка* $(r^*, 0)$ *є глобальним атрактором системи* (13), (14) *в області* $(0, \infty)^n \times B^m_{R^*}$.

Доведення. З нерівності

$$\frac{d|r(t)|}{dt} \leq 2\varepsilon\left[|\alpha(v(t)) \bullet r(t)| - \langle A(v(t))r(t), r(t)\rangle\right] \leq 2\varepsilon\|r(t)\|\left[\alpha^* - A_*\|r(t)\|\right]$$

випливає, що $|r(t)|$ спадає, поки $\|r(t)\| > \alpha^*/A_*$, а отже, принаймні поки всі точки гіперплощини $|r| = |r(t)|$ знаходяться поза сферою $\|r\| = \alpha^*/A_*$, або, що те саме, відстань гіперплощини $|r| = |r(t)|$ до початку координат більша за α^*/A_*. Оскільки ця відстань дорівнює $|r(t)|/\sqrt{n}$, то яке б мале не було $\delta > 0$, існує єдиний невід'ємний момент часу, починаючи з якого точка $r(t)$ належатиме обмеженій множині $\left\{r \in (0, \infty)^n : |r| \leq \sqrt{n}\,(\alpha^* + \delta)/A_*\right\}$.

Водночас, як тільки в деякий момент $t_0 \geq 0$ точка $v(t)$ ввійде в $\mathcal{D}_u$, почне виконуватися нерівність

$$\frac{d|r(t)|}{dt} \geq 2\varepsilon\left[\alpha_*|r(t)| - A^*\|r(t)\|^2\right] \geq 2\varepsilon|r(t)|\left[\alpha_* - A^*|r(t)|\right].$$

Тому настане момент часу $t_1 \geq t_0$, починаючи з якого виконуватиметься нерівність $|r(t)| \geq$ $\geq (\alpha_* - \delta)/A^*$. Таким чином, якщо покласти

$$\mathcal{K} := \left\{r \in \mathbb{R}^n_+ : (\alpha_* - \delta)/A^* \leq |r| \leq \sqrt{n}(\alpha^* + \delta)/A_*\right\}, \tag{15}$$

то настане момент часу $t_{\mathcal{K}} = t_{\mathcal{K}}(r(0)) \geq t_1$ такий, що $r(t_{\mathcal{K}}) \in \mathcal{K}$, і тоді $r(t) \in \mathcal{K}$ для всіх $t \geq t_{\mathcal{K}}$. Зауважимо, що, вибравши число ε_0 достатньо малим, без обмеження загальності далі можна вважати, що $\varrho > \sqrt{n}(\alpha^* + \delta)/A_*$, а отже, $|r| < \varrho$ для всіх $r \in \mathcal{K}$.

Доведемо, що $r(t) \to r^*$ при $t \to +\infty$. Розглянемо граничну систему

$$\dot{r} = 2\varepsilon[\alpha(0) - A(0)r] \bullet r.$$

Вона має додатно визначену в $(0, \infty)^n$ (відносно положення рівноваги r^*) функцію Ляпунова

$$V_0(r) := \sum_{i=1}^{n}(r_i - 1 - \ln r_i) \equiv |r| - \ln\prod_{i}^{n} r_i - n, \tag{16}$$

похідна якої внаслідок граничної системи є від'ємно визначеною. Справді,

$$\langle \nabla V_0(r), 2\varepsilon[\alpha(0) - A(0)r] \bullet r\rangle = 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i - 1}{r_i}\right)[\alpha(0) - A(0)r]_i r_i =$$

$$= 2\varepsilon\left\langle r - r^*, \alpha(0) - A(0)r\right\rangle = -2\varepsilon\left\langle r - r^*, A(0)\left[r - r^*\right]\right\rangle \leq -2\varepsilon A_*\left\|r - r^*\right\|^2.$$

Тепер покладемо $q := \sup_{0<\|v\|\le R^*} \|v\|^{-1}[\|\alpha(v) - \alpha(0)\| + \|A(v) - A(0)\|\varrho]$ і обчислимо похідну внаслідок системи (13), (14) функції

$$V(r, v) := V_0(r) + \lambda\|v\|^2/2, \tag{17}$$

де $\lambda > q^2/(2A_*\kappa)$. З критерію Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми випливає існування числа $\mu > 0$ такого, що

$$\langle\nabla V_0(r), 2\varepsilon[\alpha(v) - A(v)r] \bullet r\rangle + \varepsilon\lambda\,\langle c(v), v\rangle = -2\varepsilon\,\langle r - r^*, A(0)\,[r - r^*]\rangle +$$

$$+2\varepsilon\,\langle r - r^*, \alpha(v(t)) - \alpha(0) + [A(0) - A(v(t))]\,r\rangle + \varepsilon\lambda\,\langle c(v), v\rangle \le$$

$$\le -\varepsilon\left[2A_*\,\|r - r^*\|^2 - 2q\,\|r - r^*\|\,\|v\| + \lambda\kappa\|v\|^2\right] \le -\varepsilon\mu\left[\|r - r^*\|^2 + \|v\|^2\right] \tag{18}$$

для всіх $v \in B^m_{R^*}$ і $r \in (0, \infty)^n$ таких, що $|r| \le \varrho$. Оскільки $(r(t), v(t)) \in \mathcal{K} \times \mathcal{D}_u$ для всіх достатньо великих t, то $V(r(t), v(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$, а тоді й $r(t) \to r^*$ при $t \to +\infty$.

Твердження 4 доведено.

Наслідок 2. *Для всіх* $v \in B^m_{R^*}$ *і* $r \in (0,\infty)^n$ *таких, що* $|r| > \sqrt{n}(\alpha^* + \delta)/A_*$, *похідна функції* $|r|$ *внаслідок підсистеми* (13) *менша за* $-2\varepsilon\delta\,(\alpha^* + \delta)\,/A_*$. *Якщо ж* $v \in \mathcal{D}_u$ *і* $0 < |r| < (\alpha_* - \delta)/A^*$, *то ця похідна перевищує* $2\varepsilon\delta|r|$. *Множина* $\mathcal{K}\times\mathcal{D}_u$ *є додатно напівінваріантною множиною системи* (13), (14), *причому кожна додатна півтраєкторія цієї системи така, що* $(r(0), v(0)) \in (0,\infty)^n \times B^m_{R^*}$, *входить в* $\mathcal{K} \times \mathcal{D}_u$.

Позначимо через $J(r)$ матрицю Якобі $\dfrac{\partial}{\partial r}[(\alpha(0) - A(0)r)\bullet r]$, а через $H_{V_0}(r)$ матрицю Гессе функції $V_0(\cdot)$ в точці r. Неважко перевірити, що квадратична форма $\langle H_{V_0}(r^*)r, r\rangle$ є додатно визначеною.

Твердження 5. *Лінійна система* $\dot r = J(r^*)r$ *асимптотично стійка, причому похідна квадратичної форми* $\langle H_{V_0}(r^*)r, r\rangle$ *внаслідок цієї системи є від'ємно визначеною.*

Доведення. Запишемо рівність

$$-\,\langle r - r^*, A(0)\,[r - r^*]\rangle = \langle\nabla V_0(r), [\alpha(0) - A(0)r] \bullet r\rangle =$$

$$= \langle H_{V_0}(r^*)(r - r^*), J(r^*)(r - r^*)\rangle + O(\|r - r^*\|^3).$$

Оскільки вираз зліва є квадратичною формою, то і справа має бути квадратична форма, а тому

$$\langle H_{V_0}(r^*)r, J(r^*)r\rangle = -\,\langle A(0)r, r\rangle \quad \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Твердження 5 доведено.

4. Основна теорема. Скрізь далі вважаємо, що $\varrho > \max\left\{\sqrt{n}\,(\alpha^* + \delta)\,/A_*, 1\right\}$, а отже, множина $\mathcal{K}$, визначена формулою (15), міститься в симплексі

$$\mathcal{S}_\varrho := \left\{r \in \mathbb{R}^n_+ : |r| \le \varrho\right\} \subset [0, \varrho]^n.$$

Перш ніж формулювати основну теорему, наведемо важливу властивість об'єднання підрівневих множин функції $V_0(\cdot)$, визначеної формулою (16):

$$\bigcup_{c>0} V_0^{-1}([0, c]) = (0, \infty)^n.$$

Цей факт, зокрема, випливає з такої леми.

Лема 2. *Для* $k > 0$ *і* $c \geq 0$ *визначимо множину*

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(k,c) := \left\{ r \in \mathbb{R}^n : r_j \geq e^{-c}\varepsilon^k, j = 1,\ldots,n \right\}.$$

Якщо $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *і* $c \geq 1$, *то*

$$V_0^{-1}\left(\left[0, \left|\ln\varepsilon^k\right| + c - 1\right]\right) := \left\{ r \in (0,\infty)^n : V_0(r) \leq \left|\ln\varepsilon^k\right| + c - 1 \right\} \subset \mathcal{Q}_\varepsilon(k,c) \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Якщо додатково вимагати, щоб $\left|\ln\varepsilon_0^{k/n}\right| > \varrho - \ln\varrho$, *то*

$$\mathcal{Q}_\varepsilon\left(\frac{k}{n}, 0\right) \cap \mathcal{S}_\varrho \subset V_0^{-1}\left(\left[0, \left|\ln\varepsilon^k\right|\right]\right) \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Доведення. Покажемо, що коли $V_0(r) \leq \left|\ln\varepsilon^k\right| + c - 1$, то $r \in \mathcal{Q}_\varepsilon(k,c)$. Справді, в іншому випадку ми б мали нерівність $r_j < e^{-c}\varepsilon^k < 1$ хоча б для одного j, а тоді

$$V_0(r) > e^{-c}\varepsilon^k - 1 - \ln\varepsilon^k + c > \left|\ln\varepsilon^k\right| + c - 1.$$

Нехай тепер $r \in \mathcal{Q}_\varepsilon\left(\frac{k}{n}, 0\right) \cap \mathcal{S}_\varrho$. Тоді $\varepsilon^{k/n} \leq r_j < \varrho$ і

$$r_j - 1 - \ln r_j \leq \max\left\{ \varepsilon^{k/n} - 1 + \frac{1}{n}\left|\ln\varepsilon^k\right|, \varrho - 1 - \ln\varrho \right\} < \frac{1}{n}\left|\ln\varepsilon^k\right|, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Підсумувавши ці нерівності, дістанемо $V_0(r) < |\ln\varepsilon^k|$.

Наслідок 3. $\operatorname{mes}\left(\mathcal{S}_\varrho \setminus V_0^{-1}\left([0, |\ln\varepsilon^k|]\right)\right) = O(\varepsilon^{k/n})$, $\varepsilon \to +0$.

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай виконано умови* C_4–C_7 *і* $0 < k < N - 2$. *Існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що*: 1) *для всіх* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *розв'язок* $(r(t), v(t), \varphi(t))$ *системи* (11) *з початковими значеннями* $(r(0), v(0), \varphi(0)) \in \mathcal{S}_\varrho \times \mathcal{D}_s \times \mathbb{T}^n$ *продовжується на піввісь* $[0,\infty)$, *задовольняє нерівність* $|r(t)| \leq |r(0)|e^{-\varepsilon\alpha_* t}$ *на проміжку* $[0, T_1(\varepsilon)) := \{t \geq 0 : v(t) \in \mathcal{D}_s\}$ *і знайдеться момент* $T_2(\varepsilon) > T_1(\varepsilon)$ *такий, що* $r(t) \in \mathcal{K}$, $v(t) \in \mathcal{D}_u$ *при* $t \geq T_2(\varepsilon)$, *де множини* $\mathcal{K}$, $\mathcal{D}_s$ *та* $\mathcal{D}_u$ *визначено формулами* (15), (12); 2) *система* (11) *має* n*-вимірний інваріантний тор* $\mathcal{T}_\varepsilon$, *розташований в* $O(\varepsilon)$*-околі тора* $\{r^*\} \times \{0\} \times \mathbb{T}^n$, *і її звуження на* $\mathcal{T}_\varepsilon$ *має вигляд* $\dot\varphi = \omega(0) + \varepsilon\mathfrak{f}(\varphi,\varepsilon)$, *де* $\mathfrak{f}(\cdot,\varepsilon) : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ — *ліпшицеве векторне поле*; 3) *якщо додатково припустити, що* $V_0(r(0)) \leq |\ln\varepsilon^k|$, *то на торі* $\mathcal{T}_\varepsilon$ *існує траєкторія* $\{(\tilde r(t), \tilde v(t), \tilde\varphi(t))\}_{t\in\mathbb{R}}$ *така, що*

$$\lim_{t\to+\infty}\left[|r(t) - \tilde r(t)| + |v(t) - \tilde v(t)| + |\varphi(t) - \tilde\varphi(t)|\right] = 0,$$

і це твердження залишається правильним для довільного $r(0) \in \mathcal{S}_\varrho$, *якщо додатково виконуються умови*

$$R_j(r,v,\varphi,\varepsilon)\big|_{r_j=0} = 0 \quad \forall(r,v,\varphi,\varepsilon) \in \mathcal{S}_\varrho \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^n \times (0,\varepsilon_0), \quad j = 1,\ldots,n. \tag{19}$$

Доведення цієї теореми отримуємо, синтезувавши твердження, які містяться нижче в пп. 5, 6.

5. Попередній аналіз нормалізованої системи. Далі вважаємо, що умови основної теореми виконано. Наступне твердження фіксує низку схожих рис у поведінці системи першого наближення та системи (11).

Твердження 6. *Нехай* $(r(t), v(t), \varphi(t))$, $t \in I$, — *непродовжуваний розв'язок системи* (11), *причому* $r(0) \in \mathcal{S}_\varrho$, $v(0) \in B^m_{R^*}$. *Тоді для достатньо малого* $\varepsilon_0 > 0$ *і всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *цей розв'язок має такі властивості*: 1) *інтервал* I *містить додатну піввісь, і, отже,* $\mathcal{S}_\varrho \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^n$ *є додатно напівінваріантною множиною системи* (11); 2) *існує момент часу* $\tau_\varepsilon \geq 0$, *починаючи з якого* $v(t)$ *не виходить з деякого* $O(\varepsilon)$*-околу початку координат в* $\mathbb{R}^m$, *причому на проміжку* $[0, \tau_\varepsilon]$ *функція* $\|v(t)\|$ *монотонно спадає*; 3) *поки* $v(t) \in \mathcal{D}_s$, *функція* $|r(t)|$ *спадає з експоненціальною швидкістю, задовольняючи нерівність* $|r(t)| \leq |r(0)|e^{-\varepsilon\alpha_* t}$; 4) *множина* $\mathcal{K} \times \mathcal{D}_u \times \mathbb{T}^n$ *є додатно напівінваріантною множиною системи* (11), *причому знайдеться невід'ємний момент часу, починаючи з якого* $(r(t), v(t), \varphi(t)) \in \mathcal{K} \times \mathcal{D}_u \times \mathbb{T}^n$.

Доведення. Обчисливши й оцінивши з урахуванням наслідків 1, 2 похідні функцій $|r|$ та $\langle v, v\rangle$ внаслідок відповідних підсистем системи (11), легко переконатись у тому, що за умови достатньої мализни ε_0 у відповідних областях ці похідні мають ті самі знаки, що й похідні функцій $|r|$ та $\langle v, v\rangle$ внаслідок системи (13), (14). На підставі тих самих міркувань, що й при доведенні тверджень 2 – 4, з урахуванням зауваження 1 дістаємо потрібний результат.

Твердження 6 доведено.

Наявність члена $\varepsilon^{N/2}\sqrt{r} \bullet R(r, v, \varphi, \varepsilon)$ в системі (11) ускладнює встановлення аналога твердження 4. У твердженні, яке наводиться нижче, сформульовано умови на початкові значення розв'язку системи (11), які гарантують, що, починаючи з певного моменту, цей розв'язок потрапляє і в подальшому залишається в деякому $O(\sqrt{\varepsilon})$-околі тора, заданого у фазовому просторі рівняннями $r = r^*$, $v = 0$.

Твердження 7. *Знайдуться додатні числа* ε_0 *і* C^* *такі, що при всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *для кожного розв'язку* $(r(t), v(t), \varphi(t))$ *системи* (11) *з початковими значеннями* $r(0) \in \mathcal{S}_\varrho \cap V_0^{-1}\left([0, \left|\ln \varepsilon^k\right|]\right)$ *і* $v(0) \in B^m_{R^*}$ *існує момент* $t_\varepsilon > \tau_\varepsilon$ *такий, що*

$$\|r(t) - r^*\| < C^*\sqrt{\varepsilon}, \quad \|v(t)\| < C^*\varepsilon \quad \forall t > t_\varepsilon. \tag{20}$$

Якщо додатково припустити виконання умов (19), *то існування* t_ε *гарантоване для кожного розв'язку системи* (11) *такого, що* $|r(0)| < \varrho$, $r_j(0) > 0$, $j = 1, \ldots, n$, $v(0) \in B^m_{R^*}$.

Доведення. З огляду на твердження 6 достатньо обґрунтувати першу з нерівностей (20). Нехай C_0 — стала, що обмежує зверху кожну з норм $\|B(r, v, \varepsilon)\|$, $\|R(r, v, \varphi, \varepsilon)\|$, $\|W(r, v, \varepsilon)\|$, $\|Z(r, v, \varphi, \varepsilon)\|$ на множині $[0, \varrho]^n \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^n \times [0, \varepsilon_0]$. З урахуванням (18) на множині $(0, \varrho]^n \times \times\, \mathbb{T}^n \times B^m_{R^*} \times [0, \varepsilon_0]$ похідна функції $V(r, v)$ (див. (17)) внаслідок системи (11) допускає таку оцінку зверху:

$$\dot{V}_{(11)}(r, v, \varphi, \varepsilon) := \left\langle \nabla V_0(r), 2\varepsilon\left[\alpha(v) - A(v)r + \varepsilon B(r, v, \varepsilon)\right] \bullet r + \varepsilon^{N/2}\sqrt{r} \bullet R(r, v, \varphi, \varepsilon)\right\rangle +$$

$$+\lambda\left\langle v, \varepsilon c(v) + \varepsilon^2 W(r, v, \varepsilon) + \varepsilon^{(N+3)/2} Z(r, v, \varphi, \varepsilon)\right\rangle \leq$$

$$\leq -\varepsilon\mu\left(\|r - r^*\|^2 + \|v\|^2\right) + 2\varepsilon^2\left\langle r - r^*, B(r, v, \varepsilon)\right\rangle + \varepsilon^{N/2}\left\langle r - r^*, r^{-1/2} \bullet R(r, v, \varphi, \varepsilon)\right\rangle +$$

$$+\varepsilon^2\lambda\left\langle v, W(r, v, \varepsilon)\right\rangle + \varepsilon^{(N+3)/2}\lambda\left\langle v, Z(r, v, \varphi, \varepsilon)\right\rangle \leq$$

$$\leq -\varepsilon \left[\mu \left(\|r-r^*\|^2+\|v\|^2\right) - \|r-r^*\| \left(2C_0\varepsilon + \varepsilon^{N/2-1}\|r^{-1/2} \bullet R(r,v,\varphi,\varepsilon)\|\right) - 2\varepsilon\lambda C_0\|v\|\right].$$

Покажемо, що при достатньо малому ε_0 ця похідна не перевищує деякого від'ємного числа на множині

$$\left\{(r,v,\varphi,\varepsilon) \in [\mathcal{Q}_\varepsilon(k,c)\cap\mathcal{S}_\varrho] \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^n \times (0,\varepsilon_0] \colon \sqrt{\|r-r^*\|^2+\|v\|^2} \geq 6\sqrt{\varepsilon}C_0/\mu\right\}, \quad (21)$$

де $c \geq \lambda[R^*]^2/2+1$. Насамперед зауважимо, що

$$-\varepsilon\|v\|\left[\mu\|v\| - 2\varepsilon\lambda C_0\right] \leq \varepsilon^3\lambda^2 C_0^2/\mu \quad \forall v \in B^m_{R^*}.$$

Нехай $(r,v,\varphi,\varepsilon)$ належить множині (21). Якщо $\|r-r^*\| > 1/4$, то, використовуючи нерівності $r_j \geq e^{-c}\varepsilon^k$ для перших n координат точки множини (21), дістаємо

$$\varepsilon^{N/2-1}\left\|r^{-1/2} \bullet R(r,v,\varphi,\varepsilon)\right\| \leq \varepsilon^{N/2-1}C_0 e^{c/2}\varepsilon^{-k/2} = \varepsilon^{(N-k-2)/2}C_0 e^{c/2},$$

тоді при достатньо малому ε_0 маємо

$$\dot{V}_{(11)}(r,v,\varphi,\varepsilon) \leq -\frac{\varepsilon}{4}\left[\frac{\mu}{4} - 2C_0\varepsilon - \varepsilon^{(N-k-2)/2}C_0 e^{c/2}\right] + \varepsilon^3\lambda^2C_0^2/\mu < 0 \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0].$$

Якщо ж $\|r-r^*\| \leq 1/4$, то $|r_j-1| < 1/4$, а отже, $r_j > 1/4$, і тоді, беручи до уваги, що в цьому випадку $\left\|r^{-1/2} \bullet R(r,v,\varphi,\varepsilon)\right\| \leq 2C_0$, при достатньо малому ε_0 і всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ дістаємо

$$\dot{V}_{(11)}(r,v,\varphi,\varepsilon) \leq -\varepsilon\left[\mu\left(\|r-r^*\|^2+\|v\|^2\right) - 4\sqrt{\varepsilon}C_0\|r-r^*\| - 2\varepsilon\lambda C_0\|v\|\right] \leq$$

$$\leq -\varepsilon\left[\mu\left(\|r-r^*\|^2+\|v\|^2\right) - 4\sqrt{2\varepsilon}C_0\sqrt{\|r-r^*\|^2+\|v\|^2}\right] < 0.$$

Оскільки згідно з лемою 2 множина $V_0^{-1}\left(\left[0,\left|\ln\varepsilon^k\right|+c-1\right]\right)$ міститься в $\mathcal{Q}_\varepsilon(k,c)$, то

$$\mathfrak{S} := V^{-1}\left(\left[0,\left|\ln\varepsilon^k\right|+c-1\right]\right) \cap [\mathcal{S}_\varrho \times B^m_{R^*}] \subset [\mathcal{Q}_\varepsilon(k,c)\cap\mathcal{S}_\varrho] \times B^m_{R^*}.$$

Тоді з твердження 6 та з отриманих оцінок для $\dot{V}_{(11)}(r,v,\varphi,\varepsilon)$ випливає, що множина $\mathfrak{S}\times\mathbb{T}^n$ є додатно напівінваріантною і якщо $(r(0),v(0)) \in \mathfrak{S}$, то існує момент $\tau^*_\varepsilon > 0$ такий, що $V(r(t),v(t)) < c^*(\varepsilon)$ для всіх $t > \tau^*_\varepsilon$, де

$$c^*(\varepsilon) = \max\left\{V(r,v) \colon \sqrt{\|r-r^*\|^2+\|v\|^2} = 6\sqrt{\varepsilon}C_0/\mu\right\}.$$

Справді, максимальні значення в замкненій кулі з центром у точці $(r^*,0)$ функція $V(\cdot,\cdot)$ досягає лише на межі кулі. Тому у відкритій кулі радіуса $6\sqrt{2\varepsilon}C_0/\mu$ з центром у $(r^*,0)$ функція $V(\cdot,\cdot)$ набуває значень, менших за $c^*(\varepsilon)$, а отже, ця куля міститься у множині $V^{-1}\left([0,c^*(\varepsilon)]\right)$. Тепер існування t_ε випливає з від'ємності $\dot{V}(r,v,\varphi,\varepsilon)$ у точках множини (21).

Очевидно, що коли $r \in \mathcal{S}_\varrho$, $V_0(r) \leq \left|\ln\varepsilon^k\right|$ і $\|v\| \leq R^*$, то $V(r,v) \leq \left|\ln\varepsilon^k\right| + c - 1$. Отже, множина $\mathfrak{S}$ містить множину $\left[V_0^{-1}\left(\left[0,\left|\ln\varepsilon^k\right|\right]\right)\cap\mathcal{S}_\varrho\right] \times B^m_{R^*}$.

Далі, оскільки $V_0(r) \sim \dfrac{1}{2}\langle H_V(r^*)(r-r^*), r-r^*\rangle$ поблизу r^*, то можна вказати таке $C^* > 0$, що множина $V^{-1}([0, c^*(\varepsilon)])$ містититься в кулі радіуса $C^*\sqrt{\varepsilon}$ з центром у $(r^*, 0)$ при всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$. Тепер можна покласти $t_\varepsilon = \max\{\tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon^*\}$.

Нарешті, якщо виконано умови (19), то $R_j(r, v, \varphi, \varepsilon) = \sqrt{r_j}\tilde{R}_j(r, v, \varphi, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, n$, і тоді всі міркування стосуються також випадку, коли $r(0) \in \mathcal{S}_\varrho \cap (0, \infty)^n$, якщо підсистему для r у системі (11) замінити на

$$\dot{r} = 2\varepsilon\left[\alpha(v) - A(v)r + \varepsilon B(r, v, \varepsilon) + \varepsilon^{N/2-1}\tilde{R}(r, v, \varphi, \varepsilon)\right] \bullet r.$$

Твердження 7 доведено.

***Зауваження* 2.** З тверджень 6 та 7 випливає, що у випадку, коли додатна півтраєкторія $\bigcup_{t\geq 0}(r(t), v(t), \varphi(t))$ не має спільних точок з множиною $\mathfrak{S} \times \mathbb{T}^n$, знайдеться момент часу, після якого $r(t) \in \mathcal{K} \setminus V_0^{-1}\left([0, \left|\ln \varepsilon^k\right|]\right)$.

Тепер основне питання полягає в тому, чи має система (11) інваріантний тор, близький до інваріантного тора системи першого наближення, і якщо такий тор існує, то яким є басейн його притягування.

6. Існування інваріантного тора та характеристика його басейну. З урахуванням уже доведених тверджень подальший аналіз системи (11) будемо проводити в околі інваріантного тора $r = r^*$, $v = 0$ системи першого наближення.

Задля спрощення записів об'єднаємо змінні r та v в одній векторній змінній $y = (r, v)$ (ця $(n+m)$-вимірна змінна не пов'язана з однойменною $2n$-вимірною локальною змінною з п. 2). Систему (11) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon F(y, \varepsilon) + \varepsilon^{N/2}G(y, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} &= \bar{\omega}(y, \varepsilon) + \varepsilon^{N/2}H(y, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{22}$$

де

$$F(y, \varepsilon) := (2\left[\alpha(v) - A(v)r + \varepsilon B(r, v, \varepsilon)\right] \bullet r, c(v) + \varepsilon W(r, v, \varepsilon)),$$

$$G(y, \varphi, \varepsilon) := \left(\sqrt{r} \bullet R(r, v, \varphi, \varepsilon), \varepsilon^{3/2}Z(r, v, \varphi, \varepsilon)\right),$$

$$\bar{\omega}(y, \varepsilon) := \omega(v) + \varepsilon\Psi(r, v, \varepsilon), \quad H(y, \varphi, \varepsilon) := r^{-1/2} \bullet \Phi(r, v, \varphi, \varepsilon).$$

Позначимо $y^* := (r^*, 0)$. Тоді $F(y^*, 0) = 0$. Оскільки

$$F'(y^*, 0) = \begin{pmatrix} J(r^*) & 2\left[\alpha'(0) - A'(0)r^*\right] \bullet r^* \\ 0 & c'(0) \end{pmatrix}$$

і згідно з твердженням 5 та умовою C_6 лінійні системи $\dot{r} = J(r^*)r$ та $\dot{v} = c'(0)v$ асимптотично стійкі, а отже, всі власні числа матриць цих систем мають від'ємні дійсні частини, то таку саму властивість має й система $\dot{y} = F'(y^*, 0)y$. Відомо, що існує додатно визначена квадратична форма, похідна якої внаслідок асимптотично стійкої лінійної системи зі сталою матрицею є від'ємно визначеною. Ця додатно визначена квадратична форма задає структуру скалярного добутку. Тому далі вважаємо, що простір $\mathbb{R}^{n+m}$ наділено скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$, для якого квадратична форма $\left\langle F'_y(y^*,0)y,y\right\rangle$ є від'ємно визначеною.

Тепер можна вибрати додатні числа γ, σ та ε_0 так, щоб виконувалася нерівність

$$\left\langle \left[F'_y(y,\varepsilon)+\varepsilon^{(N-2)/2}G'_y(y,\varphi,\varepsilon)\right]z,z\right\rangle \leq$$

$$\leq -2\gamma\|z\|^2 \quad \forall (y,z,\varphi,\varepsilon)\in B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{R}^{n+m}\times\mathbb{T}^n\times[0,\varepsilon_0]. \tag{23}$$

Звідси випливає, що $B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n$ є додатно напівінваріантною множиною системи (22), а отже, для кожної точки $(y,\varphi)\in B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n$ її додатна півтраєкторія, яку позначатимемо $\{(\eta_t(y,\varphi)),\phi_t(y,\varphi)\}_{t\geq 0}$, міститься в $B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n$. Іншими словами, система (22) породжує в $B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n$ напівпотік

$$\left\{(\eta_t(\cdot,\cdot),\phi_t(\cdot,\cdot)) : B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n\to B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n\right\}_{t\geq 0}.$$

Важливо зауважити, що насправді, як випливає з результатів п. 3, система (22) породжує напівпотік на множині $\mathcal{S}_\varrho\times B^m_{R^*}\times\mathbb{T}^n$, причому кожна точка, яка під дією цього напівпотоку в певний момент потрапляє в множину $\left[\mathcal{S}_\varrho\cap V_0^{-1}\left([0,\left|\ln\varepsilon^k\right|]\right)\right]\times B^m_{R^*}\times\mathbb{T}^n$, через якийсь час обов'язково опиняється в $B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n$, а згодом продовжує рухатися в $O(\sqrt{\varepsilon})$-околі тора $\{y^*\}\times\mathbb{T}^n$.

Тепер покажемо, що при всіх достатньо малих $\varepsilon>0$ множина $B^{n+m}_\sigma(y^*)\times\mathbb{T}^n$ містить n-вимірний інваріантний тор системи (22), який притягує всі додатні півтраєкторії з цієї множини, а отже, басейн цього тора містить множину $\left[\mathcal{S}_\varrho\cap V_0^{-1}\left([0,k\left|\ln\varepsilon\right|]\right)\right]\times B^m_{R^*}\times\mathbb{T}^n$.

***Зауваження* 3.** При малому σ з умови C_5 випливає, що $B^m_\sigma\subset\mathcal{A}(5,\nu)$, а тоді для $v\in B^m_\sigma$ результати п. 2 будуть дійсними для $N=5$. Тому далі розглядаємо систему (22), в якій $N\geq 5$.

З (23) випливає, що матрицант Ω^t_s лінійної системи

$$\dot z=\varepsilon\left[F'_y(\eta_t(y,\varphi),\varepsilon)+\varepsilon^{(N-2)/2}G'_y(\eta_t(y,\varphi),\phi_t(y,\varphi),\varepsilon)\right]z=:\varepsilon P(t;y,\varphi,\varepsilon)z$$

допускає оцінку

$$\left\|\Omega^t_s\right\|\leq e^{-2\varepsilon\gamma\cdot(t-s)},\quad t\geq s\geq 0.$$

Додатні числа σ та K виберемо так, щоб для всіх $(y^i,\varphi^i,\varepsilon)\in B^{n+m}_{2\sigma}(y^*)\times\mathbb{T}^n\times[0,\varepsilon_0]$ виконувалися нерівності

$$\left\|\bar\omega\left(y^1,\varepsilon\right)+\varepsilon^{N/2}H\left(y^1,\varphi^1,\varepsilon\right)-\bar\omega\left(y^2,\varepsilon\right)-\varepsilon^{N/2}H\left(y^2,\varphi^2,\varepsilon\right)\right\|\leq$$

$$\leq K\left[\left\|y^1-y^2\right\|+\varepsilon^{N/2}\left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|\right], \tag{24}$$

$$\Big\|F(y^1,\varepsilon)+\varepsilon^{(N-2)/2}G(y^1,\varphi^1,\varepsilon)-F(y^2,\varepsilon)-\varepsilon^{(N-2)/2}G(y^2,\varphi^2,\varepsilon)-$$

$$-\left[F'_y(y^3,\varepsilon)+\varepsilon^{(N-2)/2}G'_y(y^3,\varphi^3,\varepsilon)\right](y^1-y^2)\Big\|\leq$$

$$\leq\Big\|F(y^1,\varepsilon)+\varepsilon^{(N-2)/2}G(y^1,\varphi^2,\varepsilon)-F(y^2,\varepsilon)-\varepsilon^{(N-2)/2}G(y^2,\varphi^2,\varepsilon)-$$

$$- \left[F'_y(y^2,\varepsilon) + \varepsilon^{(N-2)/2} G'_y(y^2,\varphi^2,\varepsilon)\right](y^1-y^2)\Big\| +$$

$$+ \Big\| \left[F'_y(y^2,\varepsilon) - F'_y(y^3,\varepsilon) + \varepsilon^{(N-2)/2} G'_y(y^2,\varphi^2,\varepsilon) - \varepsilon^{(N-2)/2} G'_y(y^3,\varphi^3,\varepsilon)\right](y^1-y^2)\Big\| +$$

$$+\varepsilon^{(N-2)/2} \left\|G(y^1,\varphi^1,\varepsilon) - G(y^1,\varphi^2,\varepsilon)\right\| \leq$$

$$\leq K\left[\left(\left\|y^1-y^2\right\| + \left\|y^2-y^3\right\| + \varepsilon^{(N-2)/2}\left\|\varphi^2-\varphi^3\right\|\right)\left\|y^1-y^2\right\| + \varepsilon^{(N-2)/2}\left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|\right]. \quad (25)$$

Твердження 8. *Покладемо* $\mathcal{B}_\varepsilon := \{(y,z) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} : y, z \in B_\sigma^{n+m}(y^*), \|y - z\| \leq \varepsilon\}$ *і* $M := 4K/\gamma$. *Існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що коли* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *то кожній точці* $(y, z, \varphi) \in \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{T}^n$ *можна поставити у відповідність єдину точку* $\theta(y, z, \varphi) \in \mathbb{T}^n$ *так, щоб для всіх* $t \geq 0$ *справджувалися нерівності*

$$\begin{aligned} &\left\|\eta_t\left(y,\varphi\right) - \eta_t\left(z,\theta(y,z,\varphi)\right)\right\| \leq 2e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|y-z\right\|, \\ &\|\phi_t(y,\varphi) - \phi_t(z,\theta(y,z,\varphi))\| \leq \frac{M}{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\|. \end{aligned} \quad (26)$$

При цьому $\theta(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n\right)$, *для будь-яких* $\left(y, z^i, \varphi\right) \in \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{T}^n$, $i = 1, 2$, *справджується нерівність*

$$\left\|\theta\left(y,z^1,\varphi\right) - \theta\left(y,z^2,\varphi\right)\right\| \leq \frac{M}{\varepsilon}\left\|z^1-z^2\right\|$$

і для довільної фіксованої точки $(y, z) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ *відображення* $\theta(y, z, \cdot) : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ — *гомеоморфізм.*

Доведення. Позначимо через $\mathfrak{M}_\varepsilon$ простір, утворений неперервними відображеннями

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{T}^n \ni (t,y,z,\varphi) \mapsto (\zeta(t,y,z,\varphi), \psi(t,y,z,\varphi)) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{T}^n,$$

які для всіх $(t, y, z, \varphi),\ (t, y, z^i, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{T}^n$, $i = 1, 2$, задовольняють нерівності

$$\|\eta_t(y,\varphi) - \zeta(t,y,z,\varphi)\| \leq 2e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\|,$$

$$\|\phi_t(y,\varphi) - \psi(t,y,z,\varphi)\| \leq \frac{M}{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\|,$$

$$\left\|\zeta(t,y,z^1,\varphi) - \zeta(t,y,z^2,\varphi)\right\| \leq 2e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|z^1-z^2\right\|,$$

$$\left\|\psi(t,y,z^1,\varphi) - \psi(t,y,z^2,\varphi)\right\| \leq \frac{M}{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|z^1-z^2\right\|$$

і рівність $\zeta(0, y, z, \varphi) = z$.

Далі задля спрощення записів, де це не викликає непорозумінь, для функцій, аргументами яких є t, y, z, φ, ми вказуємо залежність лише від часової змінної t і пишемо η_t, ϕ_t, ζ_t і ψ_t замість $\eta_t(y, \varphi)$, $\phi_t(y, \varphi)$, $\zeta(t, y, z, \varphi)$ і $\psi(t, y, z, \varphi)$ відповідно. Крім того, з урахуванням зауваження 3 у подальших міркуваннях покладаємо $N = 5$.

Введемо в $\mathfrak{M}_\varepsilon$ структуру повного метричного простору, визначивши відстань між парою елементів $\left(\zeta^i, \psi^i\right) \in \mathfrak{M}_\varepsilon$, $i = 1, 2$, за формулою

$$d\left[(\zeta^1,\psi^1),(\zeta^2,\psi^2)\right] := M\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma t}\left\|\zeta_t^1-\zeta_t^2\right\|\right]+\varepsilon\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma t}\left\|\psi_t^1-\psi_t^2\right\|\right].$$

Визначимо на $\mathfrak{M}_\varepsilon$ відображення

$$\mathcal{F}[\zeta,\psi](t) := \phi_t + \int\limits_t^\infty\left[\bar\omega(\eta_s,\varepsilon)-\bar\omega(\zeta_s,\varepsilon)\right]ds+\varepsilon^{5/2}\int\limits_t^\infty\left[H(\eta_s,\phi_s,\varepsilon)-H(\zeta_s,\psi_s,\varepsilon)\right]ds,$$

$$\mathcal{G}[\zeta,\psi](t) := \Omega_0^t z+\varepsilon\int\limits_0^t\Omega_s^t\left[F(\zeta_s,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}G(\zeta_s,\psi_s,\varepsilon)-\left(F_y'(\eta_s,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}G_y'(\eta_s,\phi_s,\varepsilon)\right)\zeta_s\right]ds.$$

При фіксованому наборі $(y,z,\varphi)\in\mathcal{B}_\varepsilon\times\mathbb{T}^n$ елемент простору $\mathfrak{M}_\varepsilon$ породжує розв'язок системи (22) тоді й лише тоді, коли

$$\zeta_t=\mathcal{G}[\zeta,\psi](t),\quad \psi_t=\mathcal{F}[\zeta,\psi](t)\quad \forall t\ge 0. \tag{27}$$

Справді, зазначений елемент простору $\mathfrak{M}_\varepsilon$ породжує розв'язок тоді й лише тоді, коли при $t\ge 0$ виконуються рівності

$$\zeta_t=\mathcal{G}[\zeta,\psi](t),$$

$$\psi_t-\phi_t=\psi_0-\varphi+\int\limits_0^t\left[\bar\omega(\zeta_s,\varepsilon)-\bar\omega(\eta_s,\varepsilon)+\varepsilon^{5/2}\left(H(\zeta_s,\psi_s,\varepsilon)-H(\eta_s,\phi_s,\varepsilon)\right)\right]ds.$$

Друга з цих рівностей є очевидною, а щоб дістати першу, достатньо записати розв'язок $y=\zeta_t$ лінійної неоднорідної системи $\dot y=\varepsilon P(t;y,\varphi,\varepsilon)y+f(t)$, де

$$f(t):=\varepsilon\left[F(\zeta_t,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}G(\zeta_t,\psi_t,\varepsilon)-\left(F_y'(\eta_t,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}G_y'(\eta_t,\phi_t,\varepsilon)\right)\zeta_t\right],$$

який при $t=0$ набуває значення z. Оскільки $\phi_t-\psi_t\to 0$, $t\to\infty$, то дістаємо єдине можливе початкове значення

$$\psi_0=\varphi-\int\limits_0^\infty\left[\bar\omega(\zeta_s,\varepsilon)-\bar\omega(\eta_s,\varepsilon)+\varepsilon^{5/2}\left(H(\zeta_s,\psi_s,\varepsilon)-H(\eta_s,\phi_s,\varepsilon)\right)\right]ds, \tag{28}$$

звідки $\psi_t=\mathcal{F}[\zeta,\psi](t)$. Навпаки, якщо виконуються рівності (27), то очевидно, що $t\mapsto(\zeta_t,\psi_t)$ — розв'язок системи (22).

Покажемо, що число ε_0 можна вибрати так, щоб відображення

$$\mathfrak{M}_\varepsilon\ni(\zeta,\psi)\mapsto(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

було стиском. Далі вважаємо, що $2\varepsilon_0<\sigma$. Нехай $(\zeta,\psi)\in\mathfrak{M}_\varepsilon$. З урахуванням нерівності (24) маємо

$$\left\|\mathcal{F}[\zeta,\psi](t)-\phi_t\right\|\le K\int\limits_t^\infty\left[\left\|\zeta_s-\eta_s\right\|+\varepsilon^{5/2}\left\|\psi_s-\phi_s\right\|\right]ds\le$$

$$\leq \frac{K\left[2\|y-z\|+M\varepsilon^{3/2}\|y-z\|\right]e^{-\varepsilon\gamma t}}{\varepsilon\gamma} \leq \frac{M}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}+\frac{M\varepsilon_0^{3/2}}{4}\right]e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\| \leq \frac{M}{\varepsilon}\,e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\|$$

за умови, що

$$\varepsilon_0^{3/2} \leq 2/M. \tag{29}$$

Якщо взяти до уваги рівність

$$\eta_t = \Omega_0^t y + \varepsilon\int\limits_0^t \Omega_s^t\left[F(\eta_s,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}G(\eta_s,\phi_s,\varepsilon)-\left(F_y'(\eta_s,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}G_y'(\eta_s,\phi_s,\varepsilon)\right)\eta_s\right]ds$$

та нерівність (25) при $y^1=\zeta_s$, $\varphi^1=\psi_s$, $y^2=y^3=\eta_s$, $\varphi^2=\varphi^3=\phi_s$, то дістанемо

$$\|\mathcal{G}[\zeta,\psi](t)-\eta_t\| \leq e^{-2\varepsilon\gamma t}\|y-z\|+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t e^{-2\varepsilon\gamma\cdot(t-s)}K\left[\left(\|\zeta_s-\eta_s\|+\varepsilon^{3/2}\|\psi_s-\phi_s\|\right)\|\zeta_s-\eta_s\|+\varepsilon^{3/2}\|\psi_s-\phi_s\|\right]ds \leq$$

$$\leq e^{-2\varepsilon\gamma t}\|y-z\|+4K\varepsilon^2 e^{-2\varepsilon\gamma t}t\|y-z\|+\frac{KM\varepsilon^{1/2}}{\gamma}\,e^{-\gamma\varepsilon t}\|y-z\| \leq$$

$$\leq \left[1+\frac{M\varepsilon_0}{e}+\frac{M^2\,\varepsilon_0^{1/2}}{4}\right]e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\| \leq 2e^{-\varepsilon\gamma t}\|y-z\|$$

за умови, що

$$\frac{M\varepsilon_0}{e}+\frac{M^2\,\varepsilon_0^{1/2}}{4} \leq 1.$$

Далі, позначивши $\zeta_t^i := \zeta(t,y,z^i,\varphi)$, $\psi_t^i := \psi(t,y,z^i,\varphi)$, $i=1,2$, і поклавши в нерівностях (24) та (25) $(y^i,\varphi^i)=(\zeta_s^i,\psi_s^i)$, $i=1,2$, $y^3=\eta_s$, $\varphi^3=\phi_s$, будемо мати

$$e^{\varepsilon\gamma t}\left[\left\|\mathcal{F}[\zeta^1,\psi^1](t)-\mathcal{F}[\zeta^2,\psi^2](t)\right\|\right] \leq$$

$$\leq e^{\varepsilon\gamma t}\int\limits_t^\infty e^{-\varepsilon\gamma s}Ke^{\varepsilon\gamma s}\left[\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\|+\varepsilon^{5/2}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right]ds \leq$$

$$\leq \frac{M}{4\varepsilon}\sup_{s\geq 0}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right]+\frac{M\varepsilon_0^{3/2}}{4}\sup_{s\geq 0}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right] \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}+\frac{M\varepsilon_0^{3/2}}{4}\right]\frac{M}{\varepsilon}\left\|z^1-z^2\right\|,$$

$$e^{\varepsilon\gamma t}\left[\left\|\mathcal{G}[\zeta^1,\psi^1](t)-\mathcal{G}[\zeta^2,\psi^2](t)\right\|\right] \leq e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|z^1-z^2\right\|+$$

$$+e^{-\varepsilon\gamma t}\varepsilon K\left[\int\limits_0^t e^{\varepsilon\gamma s}\left[\left\|\zeta_s^1-\eta_s\right\|+2\left\|\zeta_s^2-\eta_s\right\|+\varepsilon^{3/2}\left\|\psi_s^2-\phi_s\right\|\right]ds\right]\sup_{s\ge 0}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right]+$$

$$+e^{-\varepsilon\gamma t}\varepsilon^{5/2}K\left[\int\limits_0^t e^{\varepsilon\gamma s}ds\right]\sup_{s\ge 0}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right]\le\left\|z^1-z^2\right\|+$$

$$+\varepsilon K\left(6\varepsilon+M\varepsilon^{3/2}\right)e^{-\varepsilon\gamma t}t\sup_{s\ge 0}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right]+\frac{K\varepsilon^{3/2}}{\gamma}\sup_{s\ge 0}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right]\le$$

$$\le\left[1+\frac{3M\varepsilon_0}{e}+\frac{M^2\varepsilon_0^{3/2}}{2e}+\frac{M^2\varepsilon_0^{1/2}}{4}\right]\left\|z^1-z^2\right\|.$$

Якщо вибрати $\varepsilon_0>0$ так, щоб виконувалися нерівності (29) та

$$\frac{3M\varepsilon_0}{e}+\frac{M^2\varepsilon_0^{3/2}}{2e}+\frac{M^2\varepsilon_0^{1/2}}{4}\le 1, \tag{30}$$

а також врахувати рівномірну щодо y,z,φ збіжність невласного інтеграла, який фігурує у виразі для $\mathcal{F}$, то для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і $(\zeta,\psi)\in\mathfrak{M}_\varepsilon$ отримаємо

$$\mathfrak{M}_\varepsilon\ni(\zeta,\psi)\mapsto(\mathcal{G}[\zeta,\psi],\mathcal{F}[\zeta,\psi])\in\mathfrak{M}_\varepsilon. \tag{31}$$

Далі, для довільних $(\zeta^1,\psi^1),(\zeta^2,\psi^2)\in\mathfrak{M}_\varepsilon$, позначивши $\zeta_t^i=\zeta^i(t,y,z,\varphi)$, $\psi_t^i=\psi^i(t,y,z,\varphi)$ та поклавши в нерівностях (24) і (25) $(y^i,\varphi^i)=(\zeta_s^i,\psi_s^i)$, $i=1,2$, $y^3=\eta_s$, $\varphi^3=\phi_s$, аналогічно до попередніх викладок одержимо

$$e^{\varepsilon\gamma t}\left[\left\|\mathcal{F}[\zeta^1,\psi^1](t)-\mathcal{F}[\zeta^2,\psi^2](t)\right\|\right]\le$$

$$\le\frac{M}{4\varepsilon}\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right]+\frac{M\varepsilon_0^{3/2}}{4}\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right],$$

$$e^{\varepsilon\gamma t}\left[\left\|\mathcal{G}[\zeta^1,\psi^1](t)-\mathcal{G}_t[\zeta^2,\psi^2](t)\right\|\right]\le$$

$$\le\varepsilon K\left(6\varepsilon+M\varepsilon^{3/2}\right)e^{-\varepsilon\gamma t}t\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right]+\frac{K\varepsilon^{3/2}}{\gamma}\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right]\le$$

$$\le\frac{M\varepsilon_0}{4e}\left(6+M\varepsilon_0^{1/2}\right)\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right]+\frac{M\varepsilon\varepsilon_0^{1/2}}{4}\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right].$$

Звідси

$$d\left[\left(\mathcal{G}[\zeta^1,\psi^1],\mathcal{F}[\zeta^1,\psi^1]\right),\left(\mathcal{G}[\zeta^2,\psi^2],\mathcal{F}[\zeta^2,\psi^2]\right)\right]\le$$

$$\le\frac{M\varepsilon_0^{3/2}+M^2\varepsilon_0^{1/2}}{4}\varepsilon\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\psi_s^1-\psi_s^2\right\|\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon_0 M\left(6+M\varepsilon_0^{1/2}\right)}{4e}\right] M\sup_{\mathcal{U}_\varepsilon}\left[e^{\varepsilon\gamma s}\left\|\zeta_s^1-\zeta_s^2\right\|\right].$$

Неважко переконатися в тому, що при достатньо малому ε_0 нерівності (29), (30) гарантують виконання умови стиску на $\mathfrak{M}_\varepsilon$ для відображення (31) при всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Нерухома точка (ζ,ψ) цього відображення і буде розв'язком системи (22), який належить простору $\mathfrak{M}_\varepsilon$.

З урахуванням формули (28) однозначно визначаємо

$$\theta(y,z,\varphi) := \psi(0,y,z,\varphi).$$

Неперервність відображення $\theta(\cdot,\cdot,\cdot)$ і його ліпшицевість щодо z з константою M/ε очевидні. Оскільки, крім того, $\zeta(0,y,z,\varphi)=z$, то

$$\zeta(t,y,z,\varphi)=\eta_t\left(z,\theta(y,z,\varphi)\right),\quad \psi(t,y,z,\varphi)=\phi_t\left(z,\theta(y,z,\varphi)\right).$$

Нарешті, з самої побудови відображення $\vartheta_y^z(\cdot):=\theta(y,z,\cdot)$ випливає, що для всіх $(y,z,\varphi)\in\in\mathcal{B}_\varepsilon\times\mathbb{T}^n$ справджується рівність $\vartheta_z^y\circ\vartheta_y^z(\varphi)=\varphi$. Справді, з урахуванням (26) точці $(z,y,\varphi'))\in\in\mathcal{B}_\varepsilon\times\mathbb{T}^n$, де $\varphi'=\vartheta_y^z(\varphi)$, відповідає точка $\vartheta(z,y,\varphi')=\varphi$. Отже, на множині $\vartheta_y^z\left(\mathbb{T}^n\right)$ визначено неперервне обернене відображення $\left[\vartheta_y^z\right]^{-1}(\cdot)=\vartheta_z^y(\cdot)$. Але тоді $\vartheta_y^z\left(\mathbb{T}^n\right)$, як відкрито-замкнена підмножина тора, який теж є відкрито-замкненою множиною, збігається з $\mathbb{T}^n$. Тому $\vartheta_y^z(\cdot)$ — гомеоморфізм тора на себе.

Твердження 8 доведено.

Оскільки $\det F_y'(y^*,0)\neq 0$, то за теоремою про неявну функцію при достатньо малому $\varepsilon_0)>>0$ існує єдине гладке відображення $y_*(\cdot)\colon[0,\varepsilon_0]\to\mathbb{R}^{n+m}$ таке, що $y_*(0)=y^*$ і $F(y_*(\varepsilon),\varepsilon)=0$ для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Спираючись на теорію збурень інваріантних торів [7, 9, 11, 12, 16], доведемо таке твердження.

Твердження 9. *Існує $\varepsilon_0>0$ таке, що при всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ система* (22) *має інваріантний тор $\mathcal{T}_\varepsilon$, заданий рівнянням $y=y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi_\varepsilon(\varphi)$, де відображення $\xi_\varepsilon(\cdot)\colon\mathbb{T}^n\to B^{n+m}_{\varrho(\varepsilon)}(0)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою Ліпшиця $L(\varepsilon)$, причому $L(\varepsilon)\to 0$ та $\varrho(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Цей тор є локальним атрактором і притягує до себе всі додатні півтраєкторії, що мають початок у $\varepsilon(1-\varrho(\varepsilon))$-околі точки $y_*(\varepsilon)$.*

Доведення. Перейдемо в системі (22) до нової змінної ξ за формулою $y=y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi$. Дістанемо

$$\dot{\xi}=\varepsilon\left[F'(y_*(\varepsilon),\varepsilon)\xi+\sqrt{\varepsilon}G(y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi,\varphi,\varepsilon)\right],$$

$$\dot{\varphi}=\bar{\omega}(y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi,\varepsilon)+\varepsilon^{5/2}H(y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi,\varphi,\varepsilon).$$

Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\xi}=\varepsilon\left[F_y'(y^*,0)\xi+\Xi(\xi,\varphi,\varepsilon)\right],$$
$$\dot{\varphi}=\bar{\omega}(y_*(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\Theta(\xi,\varphi,\varepsilon), \tag{32}$$

де

$$\Xi(\varphi,\xi,\varepsilon)=\left[F_y'(y_*(\varepsilon),\varepsilon)-F_y'(y^*,0)\right]\xi+\sqrt{\varepsilon}G(y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi,\varphi,\varepsilon),$$

$$\Theta(\varphi,\xi,\varepsilon)=\int_0^1 \bar{\omega}_y'\left(y_*(\varepsilon)+\varepsilon s\xi,\varepsilon\right)\xi ds+\varepsilon^{3/2}H(y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi,\varphi,\varepsilon).$$

Легко переконатися в тому, що до системи (32) можна застосувати лему 2.1 з [7]. Згідно з цією лемою існує $\varepsilon_0>0$ таке, що для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ система має інваріантний тор, заданий рівнянням $\xi=\xi_\varepsilon(\varphi)$, де відображення $\xi_\varepsilon(\cdot)$ має всі вказані вище властивості.

Таким чином, система (22) в $\varepsilon\varrho(\varepsilon)$-околі точки $y_*(\varepsilon)$ має інваріантний тор $\mathcal{T}_\varepsilon$, заданий рівнянням $y=y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi_\varepsilon(\varphi)$. Покладемо $z_\varepsilon(\varphi):=y_*(\varepsilon)+\varepsilon\xi_\varepsilon(\varphi)$. При достатньо малому ε_0 і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ точка $y_*(\varepsilon)$ належить $B_\sigma^{n+m}(y^*)$ разом зі своїм ε-околом, а для будь-якого y_0 такого, що $\|y_0-y_*(\varepsilon)\|<\varepsilon(1-\varrho(\varepsilon))$, і довільного $\varphi\in\mathbb{T}^n$ справджуються нерівності

$$\|y_0-z_\varepsilon(\varphi)\|\le\|y_0-y_*(\varepsilon)\|+\|y_*(\varepsilon)-z_\varepsilon(\varphi)\|<\varepsilon(1-\varrho(\varepsilon))+\varepsilon\varrho(\varepsilon)=\varepsilon.$$

Отже, якщо y_0 — довільна точка з $\varepsilon(1-\varrho(\varepsilon))$-околу точки $y_*(\varepsilon)$, то $(y_0,z_\varepsilon(\varphi))\in\mathcal{B}_\varepsilon$ при всіх $\varphi\in\mathbb{T}^n$. Тоді згідно з твердженням 8 для всіх $t\ge 0$ маємо

$$\|\eta_t\left(y_0,\varphi_0\right)-\eta_t\left(z_\varepsilon(\varphi),\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi),\varphi_0)\right)\|\le 2e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|y_0-z_\varepsilon(\varphi)\right\|,$$

$$\|\phi_t\left(y_0,\varphi_0\right)-\phi_t\left(z_\varepsilon(\varphi),\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi),\varphi_0)\right)\|\le\frac{M}{\varepsilon}\,e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|y_0-z_\varepsilon(\varphi)\right\|,$$

тобто додатна півтрєкторія точки (y_0,φ_0) притягується до додатної півтраєкторії точки $(z_\varepsilon(\varphi),\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi),\varphi_0))$. Для того щоб траєкторія останньої лежала на інваріантному торі, повинна справджуватись умова нерухомої точки

$$\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi),\varphi_0)=\varphi.$$

Покажемо, що така нерухома точка на торі $\mathbb{T}^n$ існує. Число ε_0 можна вважати настільки малим, що $ML(\varepsilon)<1$ для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. А тоді згідно з твердженням 8 для довільних $\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{T}^n$ матимемо

$$\|\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi_1),\varphi_0)-\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi_2),\varphi_0)\|\le ML(\varepsilon)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|.$$

Отже, за принципом стиснених відображень дійсно існує єдина точка $\varphi_*=\varphi_*(y_0,\varphi_0)\in\mathbb{T}^n$ така, що $\theta(y_0,z_\varepsilon(\varphi_*),\varphi_0)=\varphi_*$, а це означає, що додатна півтраєкторія точки (y_0,φ_0) притягується до додатної півтраєкторії точки $(z_\varepsilon(\varphi_*),\varphi_*)$ інваріантного тора $\mathcal{T}_\varepsilon$. При цьому

$$\|\eta_t(y_0,\varphi_0)-z_\varepsilon\left(\phi_t(\varphi_*)\right)\|\le 2e^{-\varepsilon\gamma t}\left\|y_0-z_\varepsilon(\varphi_*)\right\|,\quad t\ge 0. \tag{33}$$

Зазначимо, що оскільки φ_* можна знайти методом послідовних наближень, то $\varphi_*(y_0,\varphi_0)$ неперервно залежить від (y_0,φ_0). З (26) при $t=0$ випливає, що $\theta(z_\varepsilon(\varphi_0),z_\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)=\varphi_0$, а отже, $\varphi_*(z_\varepsilon(\varphi_0),\varphi_0)=\varphi_0$. Тому $\varphi_*(y_0,\varphi_0)\to\varphi_0$ при $y_0\to z_\varepsilon(\varphi_0)$. А тоді водночас $z_\varepsilon(\varphi_*(y_0,\varphi_0))\to y_0$. Звідси з урахуванням (33) випливає, що для будь-якого $\Delta>0$ існує $\delta>0$ таке, що додатна півтраєкторія точки з δ-околу тора $\mathcal{T}_\varepsilon$ належить Δ-околу цього тора і притягується до нього. Це й означає, що $\mathcal{T}_\varepsilon$ — локальний атрактор.

Твердження 9 доведено.

***Зауваження* 4.** У випадку квазіперіодичного потоку на інваріантному торі оцінку, аналогічну до (33), було одержано у [12].

Твердження 10. *Басейн інваріантного тора $\mathcal{T}_\varepsilon$ містить додатно напівінваріантну множину* $\left[V_0^{-1}\left([0, \left|\ln \varepsilon^k\right|]\right) \cap \mathcal{S}_\varrho\right] \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^n$.

Доведення. З огляду на твердження 6 та 7 достатньо довести, що $B^{n+m}_\sigma(y^*) \times \mathbb{T}^n$ належить басейну тора $\mathcal{T}_\varepsilon$. Нехай (y_0, φ_0) — довільна точка області $B^{n+m}_\sigma(y^*) \times \mathbb{T}^n$. Виберемо скінченну послідовність точок $\{y_i\}_{i=1}^I$ так, щоб $\|y_{i-1} - y_i\| < \varepsilon$ і остання точка y_I належала $\varepsilon(1 - \varrho(\varepsilon))$-околу точки $y_*(\varepsilon)$. Тоді, послідовно застосовуючи твердження 8, можемо довести, що знайдеться $\varphi_I \in \mathbb{T}^n$ таке, що додатна півтраєкторія точки (φ_0, y_0) притягується до додатної півтраєкторії точки (φ_I, y_I), яка згідно з твердженням 9, в свою чергу, притягується до тора $\mathcal{T}_\varepsilon$. Отже, (φ_0, y_0) під дією напівпотоку системи (22) притягується до тора $\mathcal{T}_\varepsilon$.

Твердження 10 доведено.

Висновки. У цій роботі проаналізовано один із типів перехідних процесів, який спостерігається у швидко-повільній системі в околі і.м.п.р. і який можна інтерпретувати як динамічну біфуркацію багаточастотних коливань. Зміна характеру поведінки фазових змінних $x(t)$ — перехід від затухаючих до багаточастотних коливань, асимптотично близьких до рухів на інваріантному торі $\mathcal{T}_\varepsilon$, — зумовлена повільною еволюцією параметрів $u(t)$, внаслідок якої останні переміщуються з зони стійкості $\mathcal{D}_s$ до зони нестійкості $\mathcal{D}_u$.

Варто зауважити, що описане вище явище відбувається при кожному фіксованому достатньо малому значенні параметра ε. З іншого боку, оскільки при $\varepsilon \to +0$ тори $\mathcal{T}_\varepsilon$ стягуються до початку координат простору $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m$, то в системі має місце також і статична м'яка біфуркація стійкого інваріантного тора з положення рівноваги внаслідок малого зсуву параметра ε вправо від нуля. На жаль, у відомих нам роботах ми не знайшли конкретної інформації про басейн інваріантного тора.

Насамкінець доречно звернути увагу на наявність певного зв'язку отриманих нами результатів з теорією біфуркацій без параметрів (див. [29] та наведену там бібліографію). У [29] система (3) вивчалась у випадку, коли і.м.п.р. $x = 0$ повністю складається з положень рівноваги, причому спектр оператора $f'_x(0, 0, \varepsilon)$ розташовано на уявній осі. У цьому випадку перебудови фазового портрета системи зумовлені різними типами гіперболічності системи в варіаціях відносно точок і.м.п.р. $(0, u)$ при $u \neq 0$.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: Изд-во АН УССР, 1934. – 81 с.
2. *Неймарк Ю. И.* О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров // Докл. АН СССР. – 1959. – **129**, № 4. – С. 736 – 739.
3. *Sacker R.* A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces // Communs Pure and Appl. Math. – 1965. – **18**. – P. 717 – 732.
4. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Communs Math. Phys. – 1971. – **20**. – P. 167 – 192.
5. *Marsden J., McCracken M.* Hopf bifurcation and its applications. – New York: Springer-Verlag, 1976. – 408 p.
6. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of applied bifurcation theory. – New York: Springer, 1998. – 591 p.
7. *Hale J. K.* Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. Math. (2). – 1961. – **73**, № 3. – P. 496 – 531.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
9. *Fenichel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds and flows // Indiana Univ. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 193 – 226.
10. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании слабо нелинейных систем // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 4. – С. 483 – 500.
11. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 313 p.

12. *Samoilenko A. M.* Perturbation theory of smooth invariant tori of dynamical systems // Nonlinear Anal. – 1997. – **30**, № 5. – P. 3121 – 3133.
13. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.
14. *Langford W.* Periodic and steady mode interactions lead to tori // SIAM J. Appl. Math. – 1979. – **37**. – P. 22 – 48.
15. *Гаврилов Н. К.* О бифуркациях состояния равновесия с двумя парами чисто мнимых корней // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. – Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1980. – С. 17 – 30.
16. *Бибиков Ю. Н.* Бифуркация устойчивого инвариантного тора из состояния равновесия // Мат. заметки. – 1990. – **48**, вып. 1. – С. 15 – 19.
17. *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. – 142 с.
18. *Goltser Ya. M.* On the bifurcation of invariant tori in the mappings, with a spectrum on a unit circle // Funct. Different. Equat. – 1998. – **5**, № 1 – 2. – P. 121 – 138.
19. *Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р.* Многочастотные колебания сингулярно возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 2012. – **48** № 1. – С. 21 – 26.
20. *Шишкова М. А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. – 1973. – **209**, № 3. – С. 576 – 579.
21. *Нейштадт А. И.* Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 300 – 301.
22. *Нейштадт А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 12. – С. 2060 – 2067; 1988. – **24**, № 2. – С. 226 – 233.
23. *Neishtadt A.* On stability loss delay for dynamical bifurcations // Discrete Contin. Dynam. Syst., Ser. 2. – 2009. – **2**, № 4. – P. 897 – 909.
24. *Benoît É.* (ed.) Dynamic bifurcations // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991. – **1493**. – 219 p.
25. *Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities // J. Math. Sci. – 2004. – **121**, № 1. – P. 1973 – 2079.
26. *Rachinskii D., Schneider K.* Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms // J. Different. Equat. – 2005. – **210**, № 1. – P. 65 – 86.
27. *Аносова О. Д.* Инвариантные многообразия и динамические бифуркации // Успехи мат. наук. – 2005. – **60**, № 1. – С. 157 – 158.
28. *Картье П.* Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 2. – С. 57 – 76.
29. *Liebscher S.* Dynamics near manifolds of equilibria of codimension one and bifurcation without parameters // Electron. J. Different. Equat. – 2001. – **2011**, № 63. – P. 1 – 12 (URL: http://ejde.math.txstate.edu).

Одержано 11.12.14