УДК 517.977

Р. А. Теймуров (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

We consider the problem of optimal control over the processes described by the heat equation and the system of ordinary differential equations. For the problem of optimal control, we prove the existence and uniqueness of solutions, establish sufficient conditions for the Fréchet differentiability of the purpose functional, deduce the expression for its gradient, and obtain necessary condition of optimality in the form of an integral maximum principle.

Розглядається задача оптимального керування процесами, що описуються рівнянням теплопровідності і системою звичайних диференціальних рівнянь. Для цієї задачі доведено теорему існування і єдиності розв'язку, встановлено достатні умови диференційовності за Фреше цільового функціоналу та отримано вираз для його градієнта. Отримано також необхідну умову оптимальності у вигляді інтегрального принципу максимуму.

1. Введение. Практическими примерами подвижных источников являются электронный, лазерный и ионный лучи, электрическая дуга, индукционный ток, возбуждаемый движущимся индуктором. Такие источники используются во многих процессах, таких как процессы плавки и рафинирования металла в металлургии; процессы термообработки, сварки и микрообработки в машиностроении и приборостроении; процессы изготовления полупроводниковых и резисторных элементов в микроэлектронике и др.

Одной из основных особенностей систем оптимального управления подвижными источниками является их нелинейность относительно управления, определяющего закон движения источника. Это особенно наглядно видно, если сформулировать задачу управления в терминах проблемы моментов. Проблема моментов становится нелинейной. Таким образом, метод моментов, который широко используется для отыскания оптимальных управлений в линейных системах с распределенными и сосредоточенными параметрами, становится непригодным для систем с управлением подвижными источниками.

В [1, 2] приведены многочисленные примеры систем с подвижными источниками различной природы и выявлены основные особенности таких систем, которые делают невозможным их исследование известными, уже разработанными методами, например, такими, как метод моментов. В [3, 5 – 9] рассмотрены задачи оптимального управления точечными источниками для параболического уравнения при условии, что управлением является только интенсивность неподвижных источников. В [4] исследованы вопросы управляемости линейных систем с обобщенным воздействием. В [10, 11] рассмотрен вариационный метод для решения задачи оптимального управления подвижными источниками для систем, описываемых только уравнением теплопроводности.

Кроме того, в указанных работах рассмотрены только системы с распределенными параметрами. В то же время при построении математических моделей многих динамических систем приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управление рассматриваемым процессом. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях.

* Выполнена при финансовой поддержке гранта Фонда науки Государственной нефтяной компании Азербайджанской Республики (SOCAR) за 2014 г.

В настоящей работе рассматривается вариационный метод для решения задачи оптимального управления подвижными источниками, заданной уравнением теплопроводности и системой обыкновенных дифференциальных уравнений (при начальных и граничных условиях). Для этой задачи доказана теорема существования и единственности решения, установлены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала и получено выражение для его градиента. Также получено необходимое условие оптимальности в виде интегрального принципа максимума.

2. Постановка задачи. Обозначим $\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$, где $l > 0$, $T > 0$ — некоторые числа. Пусть управляемый процесс описывается в области Ω следующей начально-краевой задачей:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta(x - s_i(t)), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u_x \big|_{x=0} = 0, \quad u_x \big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, $a > 0$ — заданное число.

Предполагается, что выполняется следующее условие:

A) начальная функция $\phi(x) \in L_2(0, l)$, вектор-функция $p(t) \in L_2(0, T; R^n)$ имеет вид $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$, вектор-функция $s(t) \in C([0, T], R^n)$ является решением задачи Коши [12, с. 91, 92]

$$\dot{s} = f(s, q(t), t), \quad 0 < t \le T, \qquad s(0) = s_0, \tag{4}$$

где $s_0 \in [0, l]$ — заданное число; вектор-функция $q(t) \in L_2(0, T; R^m)$ является непрерывно дифференцируемой и таковой, что выполняется ограничение на положение подвижного воздействия: $0 \le s(t) \le l$; вектор-функция $f(s, q(t), t)$ считается известной и при каждом s принадлежит пространству $L_2(0, T; R^n)$.

Пара функций $\vartheta = (p(t), q(t))$ называется управлением. Для краткости обозначим через $H = L_2(0, T; R^n) \times L_2(0, T; R^m)$ гильбертово пространство пар $\vartheta = (p(t), q(t))$ со скалярным произведением

$$\left\langle \vartheta^1, \vartheta^2 \right\rangle_H = \int_0^T [(p^1(t), p^2(t)) + (q^1(t), q^2(t))]\, dt$$

и нормой $\|\vartheta\|_H = \sqrt{\langle \vartheta, \vartheta \rangle_H} = \sqrt{\|p\|_{L_2}^2 + \|q\|_{L_2}^2}$, где $\vartheta^k = (p^k, q^k)$, $k = 1, 2$.

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть зависимость решений задач (1) – (3) и (4) от управления, иногда используются обозначения $u(x, t, \vartheta)$ и $s(t, q)$.

Введем множество допустимых управлений

$$V = \left\{ \vartheta = (p, q) \in H : \ 0 \le p_i \le A_i, \ \ \left| q_j \right| \le B_j, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ j = \overline{1, m} \right\}, \tag{5}$$

где $A_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $B_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, — заданные числа.

Рассмотрим следующую задачу: найти такое допустимое управление $\vartheta = (p(t), q(t)) \in V$ и соответствующее ему решение $(u(x,t), s(t))$ задачи (1) – (4), чтобы функционал

$$J(\vartheta) = \int_0^l \int_0^T [u(x,t) - u_0(x,t)]^2 \, dx\, dt +$$

$$+ \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \int_0^T [p_i(t) - \tilde{p}_i(t)]^2 \, dt + \alpha_2 \sum_{j=1}^{m} \int_0^T [q_j(t) - \tilde{q}_j(t)]^2 \, dt, \tag{6}$$

где $u_0(x,t) \in L_2(\Omega)$; $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) \in H$, $\tilde{p}(t) \in L_2(0,T; R^n)$, $\tilde{q}(t) \in L_2(0,T; R^m)$ — заданные вектор-функции; $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, — заданные параметры, принимал наименьшее возможное значение.

В дальнейшем используются функциональные пространства $W_2^{1,0}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$, $V_2^{1,0}(\Omega)$, определения которых имеются, например, в [13].

3. Существование и единственность решения.

Определение 1. *Под решением задачи* (1) – (4) *при заданном управлении* $\vartheta = (p(t), q(t)) \in V$ *понимается пара функций* $(u, s) = (u(x,t,\vartheta), s(t,q))$, *где функция* $u \in V_2^{1,0}(\Omega)$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_0^l \int_0^T [-u\eta_t + a^2 u_x \eta_x] dx\, dt = \int_0^l \phi(x)\eta(x,0)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_0^T p_i(t)\eta(s_i(t),t)\, dt \tag{7}$$

для всех $\eta = \eta(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$, $\eta(x,T) = 0$, *а функция* $s \in C([0,T], R^n)$ — *интегральному уравнению*

$$s(t) = \int_0^t f(s, q(\tau), \tau) d\tau + s_0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{8}$$

Отметим, что существование единственного обобщенного решения из $V_2^{1,0}(\Omega)$ при фиксированном управлении $\vartheta \in V$ краевой задачи (1) – (4) следует из результатов работы [14, с. 265 – 270]. Далее везде будем использовать этот факт.

Поскольку целью настоящей работы является исследование задачи оптимального управления (1) – (6), в дальнейшем предполагается, что решение задачи (1) – (4) существует и единственно. Как следствие получаем, что при выполнении условия A задача (1) – (6) имеет хотя бы одно решение. Заметим, что задача (1) – (6) в случае $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1,2}$, некорректна в классическом смысле [15].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При выполнении условия* A *существует плотное подмножество* K *пространства* H *такое, что для любого* $\omega \in K$ *при* $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,2}$, *задача оптимального управления* (1) – (6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Докажем непрерывность функционала

$$J_0(\vartheta) = \|u(x,t) - u_0(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Пусть $\delta\vartheta = (\delta p, \delta q) \in V$ — приращение управления на элементе $\vartheta \in V$, удовлетворяющее условию $\vartheta + \delta\vartheta \in V$. Обозначим

$$\delta u \equiv \delta u(x,t) = u(x,t;\vartheta+\delta\vartheta) - u(x,t;\vartheta),$$

$$\delta s_i \equiv \delta s_i(t) = s_i(t; q+\delta q) - s_i(t;q).$$

Из (1) – (4) следует, что функция δu является обобщенным решением краевой задачи

$$\delta u_t = a^2 \delta u_{xx} + \sum_{i=1}^{n} [(p_i + \delta p_i)\delta(x - (s_i + \delta s_i)) - p_i \delta(x - s_i)], \quad (x,t) \in \Omega, \tag{9}$$

$$\delta u_x\big|_{x=0} = \delta u_x\big|_{x=l} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$\delta u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l], \tag{11}$$

а функции δs_i, $i = \overline{1,n}$, — решения задач Коши

$$\dot{\delta s}_i(t) = \delta f_i(s,q,t), \qquad \delta s_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

где $\delta f_i(s,q,t) = f_i(s+\delta s, q+\delta q, t) - f_i(s,q,t)$.

Докажем, что для функции $\delta u = \delta u(x,t)$ имеет место оценка

$$\|\delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \le c_1 \|\delta\vartheta\|_H, \tag{13}$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Умножая обе части уравнения (9) на $\eta = \eta(x,t)$ и интегрируя по области Ω по частям, получаем соотношение

$$\int_0^l \int_0^T \Big(\delta u_t \eta + a^2 \delta u_x \eta_x \Big) dx\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \big[(p_i + \delta p_i)\eta(s_i + \delta s_i, t) - p_i \eta(s_i, t) \big]\, dt. \tag{14}$$

Пусть $t_1, t_2 \in [0,T]$ такие, что $t_1 \le t_2$. В тождестве (14) положим

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \delta u(x,t), & t \in (t_1, t_2], \\ 0, & t \in [0,t_1] \bigcup (t_2, T]. \end{cases}$$

Используя формулы конечных приращений для функции $\delta u(s_i + \delta s_i, t)$, $i = \overline{1,n}$, в виде

$$\delta u(s_i + \delta s_i, t) = \delta u(s_i, t) + \delta u_x(\overline{s}_i, t)\delta s_i, \qquad \text{где} \quad \overline{s}_i = s_i + \theta \delta s_i, \quad \theta \in [0,1],$$

получаем уравнение энергетического баланса для задачи (9) – (12):

$$\frac{1}{2}\|\delta u(x,t)\|^2_{L_2(0,l)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2\|\delta u_x(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}[(p_i+\delta p_i)\delta s_i\,\delta u_x(\overline{s}_i,t)+\delta p_i\,\delta u(s_i,t)]\,dt. \tag{15}$$

Применение неравенства Коши – Буняковского к правой части этого уравнения приводит к неравенству

$$\frac{1}{2}\|\delta u(x,t)\|^2_{L_2(0,l)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2\|\delta u_x(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\|p_i\|_{L_2(t_1,t_2)}+\|\delta p_i\|_{L_2(t_1,t_2)}\Big)\max_{t_1\le t\le t_2}|\delta s_i(t)|\;\|\delta u_x(\overline{s}_i,t)\|_{L_2(t_1,t_2)}+$$

$$+\|\delta p_i\|_{L_2(t_1,t_2)}\|\delta u(s_i,t)\|_{L_2(t_1,t_2)}\Big]. \tag{16}$$

Функции $\delta s_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, как решения задач Коши (12), при достаточно малом значении величины $\varepsilon = t_2 - t_1$ удовлетворяют неравенству [12, с. 94]

$$\|\delta s_i(t)\|_{C[t_1,t_2]} \le c_2\|\delta q(t)\|_{L_2(t_1,t_2)}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Несложно показать, что для функции $u(x,t)$ выполняются неравенства

$$\|\delta u(s_i,t)\|_{L_2(t_1,t_2)} \le c_3\|\delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}, \qquad \|\delta u_x(\overline{s}_i,t)\|_{L_2(t_1,t_2)} \le c_4\|\delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

где $c_2>0$, $c_3>0$, $c_4>0$ — некоторые постоянные.

Тогда при $\|\delta\vartheta\|_{L_2(t_1,t_2)}\to 0$ из (16) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\|\delta u(x,t)\|^2_{L_2(0,l)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2\|\delta u_x(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \le c_5\|\delta\vartheta\|_{L_2(t_1,t_2)}\|\delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}, \tag{17}$$

где $c_5>0$ — некоторая постоянная.

Аналогично [16, с. 166 – 168], при произвольном $t\in[0,T]$ разобьем $[0,t]$ на конечное число таких интервалов достаточно малой длины, что на каждом из них выполняется неравенство вида (17). Тогда, сложив такие неравенства (для каждого из интервалов), будем иметь

$$\frac{1}{2}\|\delta u(x,t)\|^2_{L_2(0,l)} + a^2\|\delta u_x(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_5\|\delta\vartheta\|_H\|\delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

откуда, очевидно, получаем неравенство (13).

Таким образом, имеем $\|\delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \to 0$ при $\|\delta\vartheta\|_H \to 0$. Отсюда и из теоремы о следах [17] следует, что $\|\delta u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\|\delta\vartheta\|_H \to 0$. Тогда, поскольку приращение функционала $J_0(\vartheta)$ представимо в виде

$$\delta J_0(\vartheta) = J_0(\vartheta+\delta\vartheta) - J_0(\vartheta) =$$

$$= 2\int_0^l\int_0^T [u(x,t)-u_0(x,t)]\delta u(x,t)\,dx\,dt + \|\delta u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

отсюда следует непрерывность функционала $J_0(\vartheta)$.

Далее, поскольку функционал $J_0(\vartheta)$ ограничен снизу и является непрерывным в V, H — равномерно выпуклое и рефлексивное банахово пространство [18], из теоремы Бидо [19] следует существование плотного подмножества K пространства H такого, что для любого $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) \in H$ при $\alpha_i > 0$, $i=\overline{1,2}$, задача оптимального управления (1) – (6) имеет единственное решение.

Теорема 1 доказана.

4. Необходимое условие оптимальности. Для задачи оптимального управления (1) – (6) введем сопряженное состояние $\psi = \psi(x,t)$ как решение задачи

$$\psi_t + a^2\psi_{xx} = -2[u(x,t) - \tilde{u}(x,t)], \quad (x,t)\in\Omega, \tag{18}$$

$$\psi_x|_{x=0} = \psi_x|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t < T, \tag{19}$$

$$\psi(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{20}$$

и функции $\xi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, как решения сопряженной системы уравнений

$$\dot{\xi}_i(t) = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial s_i}\xi_k(t) + p_i(t)\psi_x(s_i(t),t), \quad 0 \le t < T, \quad \xi_i(T) = 0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{21}$$

Сопряженные задачи (18) – (20) и (21) получены по обычной схеме [12, c. 91 – 93, 128, 129].

Определение 2. *Под обобщенным решением задачи* (18) – (21), *соответствующей управлению* $\vartheta = (p(t), q(t)) \in H$, *понимается пара функций* $(\psi,\xi) = (\psi(x,t), \xi(t))$, *где функция* $\psi \in W_2^{1,1}(\Omega)$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_0^l\int_0^T \left(\psi\eta_{1t} + a^2\psi_x\eta_{1x}\right)dx\,dt = 2\int_0^l\int_0^T [\,u(x,t)-u_0(x,t)\,]\,\eta_1(x,t)\,dx\,dt \tag{22}$$

при всех $\eta_1 = \eta_1(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$, $\eta_1(x,0)=0$, *а функции* $\xi_i \in C([0,T], R^n)$, $i=\overline{1,\,n}$, *удовлетворяют интегральному уравнению*

$$\xi_i(t) = \int\limits_t^T \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial s_i}\xi_k(\tau) - p_i(\tau)\psi_x(s_i(\tau),\tau) \right] d\tau, \quad 0 \le t \le T, \quad i = \overline{1, n}. \tag{23}$$

Функцию

$$H(t,s,\psi,q,\vartheta) = -\left\{ \sum_{i=1}^n \Big[-f_i(s(t),q(t),t)\xi_i(t) + \psi(s_i(t),t)p_i(t) + \right.$$

$$\left. + \alpha_1\big(p_i(t) - \tilde p_i(t)\big)^2 \Big] + \alpha_2 \sum_{j=1}^m \big(q_j(t) - \tilde q_j(t)\big)^2 \right\} \tag{24}$$

назовем функцией Гамильтона – Понтрягина задачи (1) – (6).

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *функция* $f(s,q,t)$ *определена и непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные ограниченные частные производные по переменным* s *и* q *при* $(s,q,t) \in \in R^n \times R^m \times [0,T]$;

2) *функции* $f(s,q,t)$, $f_s = \dfrac{\partial f(s,q,t)}{\partial s}$, $f_q = \dfrac{\partial f(s,q,t)}{\partial q}$ *удовлетворяют условию Липшица по переменным* s, q, *т. е.*

$$|f(s+\delta s_s, q+\delta q, t) - f(s,q,t)| \le L\big(|\delta s| + |\delta q|\big),$$

$$|f_s(s+\delta s, q+\delta q, t) - f_s(s,q,t)| \le L\big(|\delta s| + |\delta q|\big),$$

$$\left|f_q(s+\delta s, q+\delta q, t) - f_q(s,q,t)\right| \le L\big(|\delta s| + |\delta q|\big)$$

при всех $(s+\delta s, q+\delta q, t)$, $(s,q,t) \in R^n \times R^m \times [0,T]$, *где* $L = \text{const} \ge 0$, δs, δq *— приращение соответственно по переменным* s *и* q.

Тогда если $(\psi(x,t), \xi(t))$ *— решение сопряженной задачи* (18) – (21), *то функционал* (6) *дифференцируем по Фреше на множестве* V *и для его градиента справедливо соотношение*

$$J'(\vartheta) = \left(\frac{\partial J(\vartheta)}{\partial p}, \frac{\partial J(\vartheta)}{\partial q} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right). \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала (6). Имеем

$$\delta J \equiv J(\vartheta + \delta\vartheta) - J(\vartheta) = 2\int\limits_0^l \int\limits_0^T [u(x,t) - u_0(x,t)]\delta u(x,t)\,dx\,dt + \int\limits_0^l \int\limits_0^T |\delta u(x,t)|^2\,dx\,dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int\limits_0^T [\, p_i(t) - \tilde p_i(t)\,]\delta p_i(t)\,dt + \alpha_1 \int\limits_0^T |\delta p_i(t)|^2\,dt \right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\{2\alpha_2\int_0^T\left[\,q_j(t)-\tilde{q}_j(t)\,\right]\delta q_j(t)\,dt+\alpha_2\int_0^T\left|\,\delta q_j(t)\right|^2dt\right\}, \tag{26}$$

где $\vartheta=(p,q)\in V$, $\vartheta+\delta\vartheta\in V$, δp_i, δq_j — приращение по переменным p_i и q_j соответственно.

Если положить в (22) $\eta_1=\delta u(x,t)$, а в (14) соответственно $\eta=\psi(x,t)$ и вычесть полученные соотношения, то получим

$$2\int_0^l\int_0^T\left[\,u(x,t)-u_0(x,t)\,\right]\delta u(x,t)\,dx\,dt \;=\; \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left[\,(p_i+\delta p_i)\psi(s_i+\delta s_i,t)-p_i\psi(s_i,t)\,\right]dt. \tag{27}$$

Задачи (12), (21), соответственно, можно записать в виде эквивалентных интегральных соотношений следующим образом:

$$\int_0^T\left[\,\delta s_i(t)\dot{\theta}_i(t)+\delta f_i(s(t),q(t),t)\theta_i(t)\,\right]dt \;=\; 0 \tag{28}$$

для всех $\theta_i(t)\in L_2(0,T)$, $\theta_i(T)=0$, $i=\overline{1,n}$,

$$\int_0^T\left[\,\xi_i(t)\dot{\theta}_{1i}(t)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial s_i}\,\xi_k(t)-p_i(t)\psi_x(s_i(t),t)\right)\theta_{1i}(t)\,\right]dt \;=\; 0 \tag{29}$$

для всех $\theta_{1i}(t)\in L_2(0,T)$, $\theta_{1i}(0)=0$, $i=\overline{1,n}$.

Если в этих соотношениях положить $\theta_{1i}(t)=\delta s_i(t)$, $\theta_i(t)=\xi_i(t)$ и сложить полученные соотношения, то получим

$$\left[\,\delta s_i(t)\xi_i(t)\,\right]\Big|_{t=0}^{t=T} \;=\; \int_0^T\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial s_i}\,\xi_k(t)-p_i(t)\psi_x(s_i(t),t)\right)\delta s_i(t)-\delta f_i\xi_i(t)\right]dt.$$

Поскольку согласно условиям теоремы 2 приращение $\delta f_i=\delta f_i(s,q,t)$ можно представить в виде

$$\delta f_i \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial s_k}\,\delta s_k+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_r}\delta q_r+R_1, \qquad \text{где} \quad R_1 \;=\; o\left(\sqrt{\|\,\delta s\,\|^2_{C[0,T]}+\|\,\delta q\,\|^2_{L_2(0,T)}}\right),$$

из последнего равенства следует

$$\left[\,\delta s_i(t)\xi_i(t)\,\right]\Big|_{t=0}^{t=T} \;=\; \int_0^T\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial s_i}\,\xi_k(t)-p_i(t)\psi_x(s_i(t),t))\right)\delta s_i(t)-\right.$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_r}\,\delta q_r(t)\xi_i(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial s_k}\,\delta s_k(t)\xi_i(t)\Bigg]dt+R_1,$$

что с учетом (12) и (21) равносильно равенству

$$\int_0^T p_i(t)\psi_x(s_i(t),t)\delta s_i(t)\,dt = -\sum_{r=1}^{m}\int_0^T\frac{\partial f_i}{\partial q_r}\delta q_r(t)\xi_i(t)\,dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\left[\frac{\partial f_i}{\partial s_k}\,\xi_i(t)\delta s_k(t)-\frac{\partial f_k}{\partial s_i}\,\xi_k(t)\delta s_i(t)\right]dt+R_1. \tag{30}$$

Согласно формуле Тейлора справедливо представление

$$\psi(s_i+\delta s_i,t) = \psi(s_i,t)+\psi_x(s_i,t)\delta s_i+o\left(\|\delta s_i\|\right),$$

с учетом которого из (27) получаем

$$2\int_0^l\int_0^T[u(x,t)-u_0(x,t)]\delta u(x,t)\,dx\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\big[\,(p_i(t)\psi_x(s_i(t),t)\delta s_i(t)+$$

$$+\psi(s_i(t),t)\delta p_i(t)+\psi_x(s_i(t),t)\delta p_i(t)\delta s_i(t)+o\left(\|\delta s_i\|\right)\big]\,dt.$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i}{\partial s_k}\,\xi_i(t)\delta s_k(t)-\frac{\partial f_k}{\partial s_i}\,\xi_k(t)\delta s_i(t)\right] = 0,$$

из последнего равенства и соотношения (30) находим

$$2\int_0^l\int_0^T[u(x,t)-u_0(x,t)]\delta u(x,t)\,dx\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left[-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_r}\xi_i(t)\delta q_r(t)+\psi(s_i,t)\delta p_i\right]dt+R_2, \tag{31}$$

где

$$R_2 = \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\big[\,\psi_x(s_i(t),t)\delta p_i(t)\delta s_i(t)+o\left(\|\delta s_i\|\right)\big]dt+R_1.$$

По обычной схеме [12, с. 94] можно доказать оценку

$$\|\delta s\|_{C[0,T]} \le c_6\,\|\delta q\|_{L_2(0,T)}, \tag{32}$$

где $c_6>0$ — некоторая постоянная.

Отсюда следует соотношение $R_2 = o\left(\|\delta\vartheta\|_H\right)$.

С другой стороны, из (13) следует равенство $\|\delta u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\|\delta\vartheta\|_H\right)$.

Подставляя полученные соотношения в (26), находим

$$\delta J(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n}\left(J_1(i) + \sum_{j=1}^{m} J_2(i,j)\right) + o\left(\|\delta\vartheta\|_H\right) \quad \text{при} \quad \|\delta\vartheta\|_H \to 0,$$

где

$$J_1(i) = \int_0^T \left[\psi(s_i(t),t) + 2\alpha_1\left(p_i(t) - \tilde{p}_i(t)\right)\right]\delta p_i(t)\,dt,$$

$$J_2(i,j) = \int_0^T \left[-\frac{\partial f_i(s(t),q(t),t)}{\partial q_j}\xi_i(t) + 2\alpha_2\left(q_j(t) - \tilde{q}_j(t)\right)\right]\delta q_j(t)\,dt, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Отсюда с учетом (24) имеем

$$\delta J(\vartheta) = \left(-\frac{\partial H}{\partial\vartheta}, \delta\vartheta\right)_H + o\left(\|\delta\vartheta\|_H\right) \quad \text{при} \quad \|\delta\vartheta\|_H \to 0,$$

что доказывает дифференцируемость по Фреше функционала (6) и справедливость формулы (25).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы* 2. *Тогда для оптимальности управления* $\vartheta^* = (p^*(t), q^*(t)) \in V$ *необходимо выполнение условия*

$$\langle J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^*\rangle_H = \int_0^T \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\psi^*(s_i^*(t),t) + 2\alpha_1(p_i^*(t) - \tilde{p}_i(t)), p_i(t) - p_i^*(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m}\left(-\frac{\partial f_i(s^*(t),\vartheta^*(t),t)}{\partial q_j}\xi_i^*(t) + 2\alpha_2(q_j^*(t) - \tilde{q}_j(t)), q_j(t) - q_j^*(t)\right)\right]dt \geq 0 \tag{33}$$

для всех $\vartheta = (p(t), q(t)) \in V$, *где* $\psi^*(s_i^*(t),t)$, $\xi_i^*(t)$ — *решения задач* (18)–(20) *и* (21) *при* $\vartheta = \vartheta^*$.

Доказательство теоремы несложно и проводится следующим образом: для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), q^*(t)) \in V$ необходимо [12, с. 28] выполнение неравенства

$$\langle J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^*\rangle_H \geq 0 \quad \forall\vartheta \in V. \tag{34}$$

Вычислим выражение для градиента функционала (6) и затем расмотрим неравенство (34), которое с учетом соотношения (25) и явного вида функции Гамильтона – Понтрягина приводит к неравенству (33).

Теорема 3 доказана.

5. Заключение. Для задачи оптимального управления, описываемой уравнением теплопроводности и системой обыкновенных дифференциальных уравнений, доказана теорема существования и единственности решения, установлены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала и получено явное выражение для его градиента. Получено также необходимое условие оптимальности в виде интегрального принципа максимума.

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
2. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
4. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.
5. *Droniou J., Raymond J. -P.* Optimal pointwise control of semilinear parabolic equations // Nonlinear Anal. – 2000. – **39**. – P. 135 – 156.
6. *Leykekhman D., Vexler B.* Optimal a priori error estimates of parabolic optimal control problems with pointwise control // SIAM J. Numer. Anal. – 2013. – **51**. – P. 2797 – 2821.
7. *Meidner D., Rannacher R., Vexler B.* A priori error estimates for finite element discretizations of parabolic optimization problems with poinwise state constants in time // SIAM J. Control Optim. – 2011. – **49**. – P. 1961 – 1997.
8. *Gong W., Hinze M., Zhou Z.* A priori error estimates for finite element approximation of parabolic optimal control problems with poinwise control // SIAM J. Control Optim. – 2014. – **52**. – P. 97 – 119.
9. *Kunisch K., Pieper K., Vexler B.* Measure valued directional sparsity for parabolic optimal control problems // SIAM J. Control Optim. – 2014. – **52**. – P. 3078 – 3108.
10. *Теймуров Р. А.* Задача оптимального управления подвижными источниками для уравнений теплопроводности // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естественные науки. – 2012. – № 4. – С. 17 – 20.
11. *Теймуров Р. А.* О задаче управления подвижными источниками для систем с распределенными параметрами // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2013. – №1(21). – С. 24 – 33.
12. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
13. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
14. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
15. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 286 с.
16. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
17. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
18. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 406 с.
19. *Goebel M.* On existence of optimal control // Math. Nachr. – 1979. – **93**. – S. 67 – 73.

Получено 28.11.13,
после доработки — 10.03.15