УДК 517.977

В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

We consider an optimal control problem for parabolic-hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions and semidefinite quality criterion. The optimality conditions are constructed by reducing the problem to a sequence of one-dimensional problems, the optimal control is obtained in the closed form, and its convergence is proved. The form of the quality criterion is substantiated.

Розглядається задача оптимального керування для параболо-гіперболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами та напіввизначеним критерієм якості. Побудовано умови оптимальності шляхом зведення задачі до послідовності одновимірних задач, знайдено оптимальне керування в замкненій формі, доведено його збіжність, а також обґрунтовано вид критерію якості.

1. Введение. Одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений является теория краевых задач для уравнений смешанного типа. Такие задачи для уравнений параболо-гиперболического типа изучались во многих работах (см., например, [1 – 4]). В статье [5] найдены условия существования и единственности решения соответствующей однородной краевой задачи, а в [6] эти результаты расширены на неоднородный случай.

Задачи оптимального управления для уравнений такого типа раньше не рассматривались. В данной работе построено и обосновано оптимальное управление для параболо-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями для задачи с полуопределенным критерием.

2. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс $y(x,t) \in C^1(\bar{D}) \bigcap C^2(D_-) \bigcap C^{2,1}(D_+)$ в области D удовлетворяет уравнению

$$Ly(x,t) = g(x)\hat{u}(t), \tag{1}$$

начальным

$$y(x,-\alpha) = \phi(x) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$y(0,t) = 0, \quad y'(0,t) = y'(1,t), \quad -\alpha \le t \le T, \tag{3}$$

где $D = \{(x,t): 0 < x < 1,\ -\alpha < t \le T,\ \alpha, T > 0\}$, $D_- = \{(x,t): 0 < x < 1,\ -\alpha < t \le 0\}$, $D_+ = \{(x,t): 0 < x < 1,\ 0 < t \le T\}$, функции $g(x)$, $\phi(x)$ считаем заданными, а их свойства по гладкости будут уточнены ниже, $\hat{u}(t) = v(t)$, $t \in [-\alpha, 0)$; $\hat{u}(t) = u(t)$, $t \in [0,T]$,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & t \ge 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & t < 0. \end{cases}$$

Требуется найти управления $v^*(t) \in C[-\alpha, 0) : \left| v^*(t) \right| \le 1$; $\left| u^*(0) \right| \le l_0$; $\xi^*(t) \in L_2[0,T]$: $\left| \xi^*(t) \right| \le l_1$ почти всюду на $[0,T]$, которые минимизируют функционал

$$I(\hat{u}) = 0{,}5\left(\left(\int_0^1 q(x)\ (y(x,T) - \psi(x))\ dx \right)^2 + \gamma \left(\int_{-\alpha}^0 v^2(t)dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t)\, dt \right) \right), \qquad (4)$$

где $\psi(x)$ — фиксированная функция, γ, $l_0, l_1 = \mathrm{const} > 0$,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau .$$

Критерий качества (4) относится к классу полуопределенных функционалов: он не обязательно должен быть равен нулю, когда $\hat{u}(t) = 0$, $y(x,T) = \psi(x)$.

3. Формальное решение задачи управления. ***3.1. Сведение к одномерной задаче.*** Известно [7], что дифференциальный оператор $Ly = y''$ и нелокальные условия (3) порождают биортогональный в $L_2(0,1)$ базис $W_0 = \left\{ X_j(x), j = 0,1,\ldots \right\}$, $R_0 = \left\{ Y_i(x), i = 0,1,\ldots \right\}$, где

$$X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx), \qquad X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),$$

$$k = 1,2,\ldots, \qquad X_0(x) = x,$$

$$Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), \qquad Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx), \quad k = 1,2,\ldots, \qquad Y_0(x) = 2.$$

Тогда сформулированная задача оптимального управления может быть формально сведена к одномерной задаче. С этой целью запишем разложение функции $q(x)$ по базису R_0:

$$q(x) = q_0 Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (q_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + q_{2k} Y_{2k}(x)),$$

где $q_i = (q, X_i)$, $i = 0,1,\ldots$.

Функции $g(x)$, $\psi(x)$, $y(x,t)$ предоставим в виде рядов по базису W_0:

$$g(x) = g_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{2k-1} X_{2k-1}(x) + g_{2k} X_{2k}(x)), \qquad (5)$$

$$\psi(x) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \psi_{2k} X_{2k}(x)), \qquad (6)$$

$$y(x,t) = y_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + y_{2k}(t) X_{2k}(x)). \qquad (7)$$

Здесь $g_i = (q, Y_i)$, $\psi_i = (\psi, Y_i)$, $i = 0,1,\ldots$, а коэффициенты разложения (7) удовлетворяют задаче

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = g_0 u(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = g_0 v(t), \quad t < 0,$$

$$y_0(-\alpha) = \phi_0,$$

$$\frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = g_{2k-1} u(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = g_{2k-1} v(t), \quad t < 0,$$

$$y_{2k-1}(-\alpha) = \phi_{2k-1}, \quad \lambda_k = 2k\pi, \tag{8}$$

$$\frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + g_{2k} u(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + g_{2k} v(t), \quad t < 0,$$

$$y_{2k}(-\alpha) = \phi_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad y_i(t) \in C^2(-\alpha, T), \quad i \ge 0.$$

Теперь задача оптимального управления сводится к задаче определения управлений $v^*(t) \in C[-\alpha, 0) : \left| v^*(t) \right| \le 1, \ \left| u^*(0) \right| \le l_0, \ \xi^*(t) \in L_2[0, T] : \left| \xi^*(t) \right| \le l_1$ почти всюду на $[0, T]$, минимизирующих критерий качества

$$I(\hat{u}) = 0{,}5 \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i (y_i(T) - \psi_i) \right)^2 + \gamma \left(\int_{-\alpha}^{0} v^2(t) dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t)\, dt \right) \right) \tag{9}$$

на решениях системы (8), т. е.

$$y_0(T) = \Phi_{1,0}(T)\phi_0 + \Phi_{3,0}(T)u(0) + \int_{-\alpha}^{0} g_0 \Psi_{1,0}(t) v(t)\, dt + \int_0^T g_0 \tilde{\Psi}_{1,0}(t) u(t)\, dt,$$

$$y_{2k-1}(T) = \Phi_{1,2k-1}(T)\phi_{2k-1} + \Phi_{3,2k-1}(T)u(0) +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{0} g_{2k-1} \Psi_{1,2k-1}(t) v(t)\, dt + \int_0^T g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t) u(t)\, dt,$$

$$y_{2k}(T) = \Phi_{1,2k}(T)\phi_{2k-1} + \Phi_{2,2k}(T)\phi_{2k} + \Phi_{3,2k}(T)u(0) +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{0} \left(g_{2k-1} \Psi_{1,2k}(t) + g_{2k} \Psi_{2,2k}(t) \right) v(t)\, dt +$$

$$+\int\limits_0^T (g_{2k-1}\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)+g_{2k}\tilde{\Psi}_{2,2k}(t))u(t)\,dt,$$

где обозначено

$$\Phi_{1,0}(T)=1,\quad \Phi_{3,0}(T)=g_0\alpha,\quad \Psi_{1,0}(t)=-(\alpha+t),\quad \tilde{\Psi}_{1,0}(t)=1,$$

$$\Phi_{1,2k-1}(T)=\frac{1}{\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2T},\quad \Phi_{3,2k-1}(T)=\frac{g_{2k-1}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2T},$$

$$\Psi_{1,2k-1}(t)=-\frac{\sin\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2T},\quad \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)=\exp(-\lambda_k^2(T-t)),$$

$$\Phi_{1,2k}(T)=-\frac{\sin\lambda_k\alpha+2\lambda_kT\delta_k(\alpha)+\alpha(\lambda_k\cos\lambda_k\alpha-\sin\lambda_k\alpha)}{\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2T)},$$

$$\Phi_{2,2k}(T)=\Phi_{1,2k-1}(T), \tag{10}$$

$$\Phi_{3,2k}(T)=\frac{1}{\lambda_k\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2T)}\times$$

$$\times\left[-g_{2k-1}\left(2\sin^2\lambda_k\alpha+2\lambda_kT\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha-\alpha+\frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k}\right)+g_{2k}\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha\right],$$

$$\Psi_{1,2k}(t)=\frac{1}{\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2T)}\left[\delta_k(\alpha)\left(\frac{\cos\lambda_k\alpha\sin\lambda_kt}{\lambda_k^2}-\frac{t\cos\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sin\lambda_k(t+\alpha)\left(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}+\delta_k(\alpha)\right)+\left(\alpha-\frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k}\right)\left(\sin\lambda_kt-\frac{\cos\lambda_kt}{\lambda_k}\right)\right],$$

$$\Psi_{2,2k}(t)=\Psi_{1,2k-1}(t),$$

$$\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)=-2\lambda_k(T-t)\exp\left(-\lambda_k^2(T-t)\right),\quad \tilde{\Psi}_{2,2k}(t)=\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t).$$

С учетом записанных значений $y_i(T)$ критерий (9) представим в виде

$$I(u)=0{,}5\left[\left(\int\limits_{-\alpha}^0 A(t)v(t)\,dt+\int\limits_0^T\left(\int\limits_t^T B(\tau)\,d\tau\right)\xi(t)\,dt+\left(M+\int\limits_0^T B(t)\,dt\right)u(0)+C\right)^2+\right.$$

$$\left.+\gamma\left(\int\limits_{-\alpha}^0 v^2(t)\,dt+\int\limits_0^T\xi^2(t)\,dt+u^2(0)\right)\right], \tag{11}$$

где

$$A(t) = q_0 g_0 \Psi_{1,0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[q_{2k-1} g_{2k-1} \Psi_{1,2k-1}(t) + q_{2k} \Big(g_{2k-1} \Psi_{1,2k}(t) + g_{2k} \Psi_{2,2k}(t) \Big) \Big],$$

$$B(t) = q_0 g_0 \tilde{\Psi}_{1,0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[q_{2k-1} g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t) + q_{2k} \Big(g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k}(t) + g_{2k} \tilde{\Psi}_{2,2k}(t) \Big) \Big],$$

$$C = q_0 \phi_0 \Phi_{1,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[q_{2k-1} \phi_{2k-1} \Phi_{1,2k-1}(T) + q_{2k} \Big(\phi_{2k-1} \Phi_{1,2k}(T) + \phi_{2k} \Phi_{2,2k}(t) \Big) \Big] - \sum_{i=0}^{\infty} q_i \psi_i,$$

$$M = q_0 \Phi_{3,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(q_{2k-1} \Phi_{3,2k-1}(T) + q_{2k} \Phi_{3,2k}(T) \Big).$$

Предположим, что ряды, представляющие функции $A(t)$, $B(t)$, сходятся равномерно, а ряды, представляющие числа C, M, сходятся.

3.2. Условия оптимальности. Функционал (11) имеет единственную точку минимума в силу строгой выпуклости по управлениям. Необходимые и достаточные условия оптимальности для него имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{0} \left[A(t) \left(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{T} \left(\int_{\tau}^{T} B(\rho)\, d\rho \right) \xi^*(\tau)\, d\tau + \left(M + \int_{0}^{T} B(\tau)\, d\tau \right) u^*(0) + C \right) + \gamma v^*(t) \right] \times$$

$$\times [v(t) - v^*(t)]\, dt \ \geq\ 0 \quad \forall\, |v(t)| \leq 1,$$

$$\left[\left(M + \int_{0}^{T} B(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{T} \left(\int_{\tau}^{T} B(\rho)\, d\rho \right) \xi^*(\tau)\, d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(M + \int_{0}^{T} B(\tau)\, d\tau \right) u^*(0) + C \right) + \gamma u^*(0) \right] \times$$

$$\times [u(0) - u^*(0)] \geq 0 \quad \forall\, |u(0)| \leq l_0, \tag{12}$$

$$\int_{0}^{T} \left[\int_{t}^{T} B(\tau)\, d\tau \left(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{T} \left(\int_{\tau}^{T} B(\rho)\, d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(M + \int_{0}^{T} B(\tau)\, d\tau \right) u^*(0) + C \right) + \gamma \xi^*(t) \right] [\xi(t) - \xi^*(t)]\, dt \ \geq\ 0 \quad \forall\, |\xi(t)| \leq l_1.$$

Система вариационных неравенств (12) эквивалентна следующим локальным условиям [8]:

$$v^*(t) = -1,$$

$$A(t)\left(\int_{-\alpha}^{0}A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{T}\left(\int_{\varsigma}^{T}B(\tau)\,d\tau\right)\xi^*(\varsigma)\,d\varsigma+\right.$$

$$\left.+\,C+\left(M+\int_{0}^{T}B(\tau)\,d\tau)\right)u^*(0)\right)-\gamma\;>\;0\,,$$

$$t\in\left[\,\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i\,\right]\subset[-\alpha,0),\quad i=\overline{1,V_1}\,,$$

$$\left|\,v^*(t)\right|<1\,,$$

$$v^*(t)\;=\;-\frac{A(t)}{\gamma}\left(\int_{-\alpha}^{0}A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{T}\left(\int_{\varsigma}^{T}B(\tau)\,d\tau\right)\xi^*(\varsigma)\,d\varsigma+\right.$$

$$\left.+\,C+\left(M+\int_{0}^{T}B(\tau)\,d\tau)\right)u^*(0)\right),\qquad t\in\left[\,\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i\,\right]\subset[-\alpha,0),\quad i=\overline{V_1+1,V_2}\,,$$

$$v^*(t)\;=\;1,$$

$$A(t)\left(\int_{-\alpha}^{0}A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{T}\left(\int_{\varsigma}^{T}B(\tau)\,d\tau\right)\xi^*(\varsigma)\,d\varsigma+C+\right.$$

$$\left.+\left(M+\int_{0}^{T}B(\tau)\,d\tau\right)u^*(0)\right)+\gamma\;<\;0\,,\qquad t\in\left[\,\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i\,\right]\subset[-\alpha,0),\quad i=\overline{V_2+1,V_3}\,,$$

$$\bigcup_{i=1}^{V_3}\left[\,\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i\,\right]\;=\;[-\alpha,\;0),$$

$$u^*(0)\;=\;-l_0\,,$$

$$\left(M+\int_{0}^{T}B(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_{-\alpha}^{0}A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{T}\left(\int_{\tau}^{T}B(\rho)\,d\rho\right)\xi^*(\tau)\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\left(M+\int_{0}^{T}B(\tau)\,d\tau)\right)l_0+C\right)-\gamma l_0\;>\;0\,,$$

$$\left|\,u^*(0)\right|<l_0\,,$$

$$u^*(0)\;=\;-\frac{1}{\gamma}\left(M+\int_{0}^{T}B(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_{-\alpha}^{0}A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$+\int_0^T\left(\int_\tau^T B(\rho)\,d\rho\right)\xi^*(\tau)\,d\tau+C+\left(M+\int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)u^*(0)\right), \tag{13}$$

$$u^*(0) = l_0,$$

$$\left(M+\int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_0^T\left(\int_\tau^T B(\rho)\,d\rho\right)\xi^*(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\left(M+\int_0^T B(\tau)\,d\tau)\right)l_0+C\right)+\gamma l_0 < 0,$$

$$\xi^*(t) = -l_1,$$

$$\int_t^T B(\tau)d\tau\left(\int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_0^T\left(\int_\varsigma^T B(\tau)\,d\tau\right)\xi^*(\varsigma)\,d\varsigma+\right.$$

$$\left.+C+\left(M+\int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)u^*(0)\right)-\gamma l_1 > 0,$$

$$t\in\left[\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i\right]\subset(0,T],\quad i=\overline{1,U_1},$$

$$\left|\xi^*(t)\right| < l_1,$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T B(\tau)\,d\tau}{\gamma}\left(\int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_0^T\left(\int_\varsigma^T B(\tau)\,d\tau\right)\xi^*(\varsigma)\,d\varsigma+\right.$$

$$\left.+C+\left(M+\int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)u^*(0)\right),\qquad t\in\left[\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i\right]\subset(0,T],\quad i = \overline{U_1+1,U_2},$$

$$\xi^*(t) = l_1,$$

$$\int_t^T B(\tau)\,d\tau\left(\int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau+\int_0^T\left(\int_\varsigma^T B(\tau)\,d\tau\right)\xi^*(\varsigma)\,d\varsigma+C+\right.$$

$$\left.+\left(M+\int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)u^*(0)\right)+\gamma l_1 < 0,\qquad t\in\left[\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i\right]\subset(0,T],\quad i=\overline{U_2+1,U_3},$$

$$\bigcup_{i=1}^{U_3}\left[\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i\right]=(0,T].$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\left|v^*(t)\right| < 1$, $\left|u^*(0)\right| < l_0$, $\left|\xi^*(t)\right| < l_1$. Тогда из (13) находим

$$v^*(t) = -\frac{A(t)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2}, \quad t \in [-\alpha, 0),$$

$$u^*(0) = -\frac{\left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2}, \tag{14}$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T B(\tau)\,d\tau C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2}, \quad t \in (0, T],$$

где $C = C_1 + C_2$, а числа $C_1 = \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\,d\tau$, $C_2 = \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\varsigma)\,d\varsigma\right)\xi^*(\tau)\,d\tau$ определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}\left(\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(t)\,dt\right)C_1 + \int_{-\alpha}^0 A^2(t)\,dtC_2 = -C\int_{-\alpha}^0 A^2(t)\,dt, \\ \int_0^T \left(\int_t^T B(\tau)\,d\tau\right)^2 dtC_1 + \left(\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2 + \int_0^T\left(\int_\tau^T B(\varsigma)\,d\varsigma\right)^2 d\tau\right)C_2 = \\ = -C\int_0^T\left(\int_\tau^T B(\varsigma)\,d\varsigma\right)^2 d\tau.\end{gathered} \tag{15}$$

Система уравнений (15) однозначно разрешима, так как имеет отличный от нуля определитель.

Тогда формулы (14) примут окончательный вид

$$v^*(t) = -\frac{A(t)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(\tau)\,d\tau + \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\varsigma)\,d\varsigma\right)^2 d\tau}, \quad t \in [-\alpha, 0);$$

$$u^*(0) = -\frac{\left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(\tau)\,d\tau + \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\varsigma)\,d\varsigma\right)^2 d\tau}, \tag{16}$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T B(\tau)\,d\tau\, C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau)\,d\tau \right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(\tau)\,d\tau + \int_0^T \left(\int_t^T B(\varsigma)\,d\varsigma \right)^2 d\tau}, \quad t \in (0, T].$$

Теперь рассмотрим случай, когда управление выходит на ограничение. Вернемся к условиям оптимальности (13) и положим $V_1 = 1$, $V_2 = 2$, $V_3 = 0$, $\underline{\xi}_1 = -\alpha$, $\overline{\xi}_1 = \underline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_2 = 0$, $U_i = 0$, $i = \overline{1, 3}$. Тогда искомые управления характеризуются условиями

$$v^*(t) = -1, \qquad A(t)\left(\int_{\overline{\xi}_1}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\,d\tau + C(\overline{\xi}_1) \right) > \gamma, \quad t \in [-\alpha, \overline{\xi}_1),$$

$$\left| v^*(t) \right| < 1, \qquad v^*(t) = -\frac{1}{\gamma} A(t) \left(\int_{\overline{\xi}_1}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\,d\tau + C(\overline{\xi}_1) \right), \quad t \in [\overline{\xi}_1, 0),$$

$$u^*(0) = 0, \qquad \xi^*(t) = 0, \quad t \in (0, T],$$

где

$$C(\overline{\xi}_1) = C - \int_{-\alpha}^{\overline{\xi}_1} A(\tau)\,d\tau.$$

Далее, как и в предыдущем случае, получаем управление

$$v^*(t) = -1, \quad t \in [-\alpha, \overline{\xi}_1),$$
$$v^*(t) = -\frac{A(t) C(\overline{\xi}_1)}{\gamma + \int_{\overline{\xi}_1}^0 A^2(t)\,dt}, \quad t \in [\overline{\xi}_1, 0), \tag{17}$$

зависящее от параметра $\overline{\xi}_1$, который определяется из условий

$$\frac{A(\overline{\xi}_1) C(\overline{\xi}_1)}{\gamma + \int_{\overline{\xi}_1}^0 A^2(t)\,dt} = 1, \qquad \frac{dv^*(\overline{\xi}_1 + 0)}{dt} > 0.$$

Другие варианты реализаций управлений (13) анализируются аналогично.

4. Обоснование результатов. Убедимся в сходимости рядов из (11). С этой целью оценим функции из (10):

$$\left| \Phi_{1,0}(T) \right| = 1, \qquad \left| \Phi_{3,0}(T) \right| = \alpha \left| g_0 \right|, \qquad \left| \Psi_{1,0}(t) \right| \le \alpha, \qquad \left| \tilde{\Psi}_{1,0}(t) \right| = 1,$$

$$\left|\Phi_{1,2k-1}(T)\right| \le \frac{C}{\exp(\lambda_k^2\ T)}, \qquad \left|\Phi_{3,2k-1}(T)\right| \le \frac{C\,|\,g_{2k-1}\,|}{\lambda_k\ \exp(\lambda_k^2\ T)},$$

$$\left|\Psi_{1,2k-1}(t)\right| \le \frac{C}{\lambda_k \exp(\lambda_k^2\ T)}, \qquad \left|\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)\right| \le 1,$$

$$\left|\Phi_{1,2k}(T)\right| \le C\,\frac{1+(2\lambda_k T+\alpha)(1+\lambda_k)}{\exp(\lambda_k^2 T)} < C\,\frac{\lambda_k^2}{\exp(\lambda_k^2 T)},$$

$$\left|\Phi_{2,2k}(T)\right| = \left|\Phi_{1,2k-1}(T)\right|, \tag{18}$$

$$\left|\Phi_{3,2k}(T)\right| \le \frac{C}{\lambda_k\ \exp(\lambda_k^2 T)}\left[\,|\,g_{2k-1}\,|\left(2+2\lambda_k T(1+\lambda_k)+\alpha+\frac{1}{2\lambda_k}\right)+|\,g_{2k}\,|\,(1\ +\lambda_k)\right]<$$

$$< \frac{C}{\exp(\lambda_k^2 T)}\left[\,|\,g_{2k-1}\,|\,\lambda_k+|\,g_{2k}\,|\,\right],$$

$$\left|\Psi_{1,2k}(t)\right| \le \frac{C}{\exp(\lambda_k^2 T)}\left[(1+\lambda_k)\left(\frac{1}{\lambda_k^2}+\frac{\alpha}{\lambda_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\,2\left(\frac{1}{\lambda_k}+1+\lambda_k\right)+\left(\alpha+\frac{1}{2\lambda_k}\right)\left(1+\frac{1}{\lambda_k}\right)\right] < \frac{C\lambda_k}{\exp(\lambda_k^2 T)},$$

$$\left|\Psi_{2,2k}(t)\right| = \left|\Psi_{1,2k-1}(t)\right|,$$

$$\left|\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)\right| \le \frac{C}{\lambda_k}, \qquad \left|\tilde{\Psi}_{2,2k}(t)\right| = \left|\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)\right|.$$

Тогда с учетом (18) справедливы оценки

$$|\,A(t)\,| \le |\,q_0\,|\,|\,g_0\,|\left|\Psi_{1,0}(t)\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\,|\,q_{2k-1}\,|\,|\,g_{2k-1}\,|\left|\Psi_{1,2k-1}(t)\right|\,+$$

$$+\,|\,q_{2k}\,|\Big(|\,g_{2k-1}\,|\left|\Psi_{1,2k}(t)\right|+|\,g_{2k}\,|\left|\Psi_{2,2k}(t)\right|\Big)\Big]<$$

$$< C\left[\,|\,q_0\,|\,|\,g_0\,|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\,q_{2k-1}\,|\,|\,g_{2k-1}\,|+|\,q_{2k}\,|\big(|\,g_{2k-1}\,|\,\lambda_k+|\,g_{2k}\,|\big)}{\exp(\lambda_k^2 T)}\right],$$

$$|\,B(t)\,| \le |\,q_0\,|\,|\,g_0\,|\left|\tilde{\Psi}_{1,0}(t)\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\,|\,q_{2k-1}\,|\,|\,g_{2k-1}\,|\left|\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)\right|\,+$$

$$+\,|\,q_{2k}\,|\Big(|\,g_{2k-1}\,|\left|\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)\right|+|\,g_{2k}\,|\left|\tilde{\Psi}_{2,2k}(t)\right|\Big)\Big]\,<$$

$$< C\left[|q_0||g_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|q_{2k-1}||g_{2k-1}| + |q_{2k}|\left(|q_{2k-1}|\frac{1}{\lambda_k} + |g_{2k}| \right)\right]\right], \tag{19}$$

$$|C| \le |q_0||\phi_0||\Phi_{1,0}(T)| + \sum_{k=1}^{\infty}\big[|q_{2k-1}||\phi_{2k-1}||\Phi_{1,2k-1}(T)| +$$

$$+ |q_{2k}|\big(|\phi_{2k-1}||\Phi_{1,2k}(T)| + |\phi_{2k}||\Phi_{2,2k}(t)| \big)\big] + \sum_{i=0}^{\infty}|q_i||\psi_i| <$$

$$< C\left[|q_0||\phi_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|q_{2k-1}||\phi_{2k-1}| + |q_{2k}|\big(|\phi_{2k-1}|\lambda_k^2 + |\phi_{2k}| \big)}{\exp(\lambda_k^2 T)} + \sum_{i=0}^{\infty}|q_i||\psi_i| \right],$$

$$|M| \le |q_0||\Phi_{3,0}(T)| + \sum_{k=1}^{\infty}\big(|q_{2k-1}||\Phi_{3,2k-1}(T)| + |q_{2k}||\Phi_{3,2k}(T)| \big) <$$

$$< C\left[|q_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|q_{2k-1}||g_{2k-1}| + |q_{2k}|\big(|g_{2k-1}|\lambda_k + |g_{2k}| \big)}{\exp(\lambda_k^2 T)} \right].$$

Из [6] следует, что для функции $\phi(x)$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(\lambda_k^4|\phi_{2k-1}| + \lambda_k^3|\phi_{2k}| \big). \tag{20}$$

Кроме того, из [6] следует, что функция $g(x)$ должна быть такой, для которой сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(\lambda_k^3|g_{2k-1}| + \lambda_k^2|g_{2k}| \big). \tag{21}$$

Условия на функцию $g(x)$, обеспечивающие сходимость ряда (21), находятся аналогично условиям на функцию $\phi(x)$ и имеют вид $g(x) \in C^4[0,1]$, $g(0) = g''(0) = 0$, $g'(0) = g'(1)$, $g'''(0) = g'''(1)$.

Функции $q(x)$ и $\psi(x)$ можно взять из пространства $L_2(0,1)$. Тогда ряды из правых частей неравенств (19) будут сходящимися с учетом сходимости рядов (20), (21). Более того, за счет наличия под знаком суммы множителя $\exp(-\lambda_k^2 T)$ будет равномерно сходиться и ряд для производной функции $A(t)$. Тем самым справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть в задаче оптимального управления* (1) – (3), (4):

1) *выполнены условия из* [5];

2) $g(x) \in C^4[0,1]$, $g(0) = g''(0) = 0$, $g'(0) = g'(1)$, $g'''(0) = g'''(1)$;

3) $q(x)$, $\psi(x) \in L_2(0,1)$;

4) $\left| v^*(t) \right| < 1$, $\left| u^*(0) \right| < l_0$, $\left| \xi^*(t) \right| < l_1$, *где функции* $v^*(t)$, $u^*(0)$, $\xi^*(t)$ *заданы формулами* (16).

Тогда формулы (16) представляют собой единственное решение задачи (1) – (3), (4).

Теорема 2. *Пусть в задаче оптимального управления* (1) – (3), (4) *выполнены условия* 1 – 3 *теоремы* 1 *и*

$$A(t)\left(\int\limits_{\bar{\xi}_1}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\, d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) > \gamma, \quad t \in [-\alpha, \bar{\xi}_1),$$

$$\left| A(t)\left(\int\limits_{\bar{\xi}_1}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\, d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) \right| < \gamma, \quad t \in [\bar{\xi}_1, 0),$$

$$u^*(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

где

$$C\left(\bar{\xi}_1\right) = C - \int\limits_{-\alpha}^{\bar{\xi}_1} A(\tau)\, d\tau,$$

а точка $\bar{\xi}_1 \in (-\alpha, 0)$ — *единственное решение уравнения*

$$A(t)\left(\int\limits_{\bar{\xi}_1}^{0} A(\tau) v^*(\tau)\, d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) = \gamma.$$

Тогда формулы (17) *представляют собой единственное решение задачи* (1) – (3), (4).

В заключение этого пункта остановимся на вопросе о целесообразности включения в критерий качества (4) слагаемого

$$0{,}5\gamma\left(u^2(0) + \int\limits_0^T \xi^2(t)\, dt \right) \tag{22}$$

вместо традиционного

$$0{,}5\gamma \int\limits_0^T u^2(t)\, dt.$$

Для упрощения рассуждений положим $v(t) = 0$, $t \in [-\alpha, 0)$. Рассмотрим такую задачу оптимального управления: найти управление $u^*(t) \in C[0, T]$, которое минимизирует функционал

$$I_1(u) \;=\; 0{,}5\left(\left(\int_0^1 q(x)\big(y(x,T)-\psi(x)\big)\,dx^2\right)+\gamma\left(\int_0^T u^2(t)\,dt\right)\right), \tag{23}$$

где $y(x,t)$ — решение краевой задачи (1) – (3).

Функционал (23) представим в виде

$$I_1(u) \;=\; 0{,}5\left(\left(\int_0^T B(t)u(t)\,dt + Mu(0) + C\right)^2 + \gamma\int_0^T u^2(t)\,dt\right).$$

Предположим, что функции $\phi(x)$, $g(x)$, $q(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, т. е. $B(t)\in C[0,T]$, а M, C — действительные числа.

Очевидно, что $\inf_u I_1(u) = 0$. Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$u_n(t) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{C}{M} + n\,\dfrac{C}{M}\,t, & t\in\left[\,0,\dfrac{1}{n}\,\right], \\[2ex] 0, & t\in\left(\dfrac{1}{n},T\,\right], \quad M\neq 0. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда

$$I_1(u_n) \;=\; 0{,}5\left(\left(\int_0^{1/n} B(t)\left(-\frac{C}{M}+n\,\frac{C}{M}\,t\right)dt\right)^2 + \gamma\int_0^{1/n}\left(-\frac{C}{M}+n\,\frac{C}{M}\,t\right)^2 dt\right) \;\leq$$

$$\leq 0{,}5\left(\frac{C}{M}\right)^2\left(\left(\max_{t\in[0,T]} B(t)\right)^2\frac{1}{n^2}+\gamma\,\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует, что последовательность (24) является минимизирующей, но

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{C}{M}, & t=0, \\[2ex] 0, & t\in(0,T], \end{cases}$$

представляет собой разрывную функцию. Тем самым мы показали, что рассматриваемая здесь задача оптимального управления не имеет решения, т. е. переход к критерию (4) является оправданным. Более того, вместо слагаемого (22) в критерий качества (4) можно внести, например, слагаемое

$$0{,}5\;\gamma\int_0^T (u^2(t)+\xi^2(t))\,dt\;.$$

Соответствующая задача оптимального управления будет однозначно разрешимой, однако условия оптимальности (в случае отсутствия ограничений на управления) будут выражаться в виде системы интегральных уравнений с симметричными ядрами, т. е. их явный вид получить не удастся.

Если $M = 0$, то описанный выше эффект не имеет места и вместо критерия (4) можно рассматривать критерий вида

$$I_1(\hat{u}) = 0{,}5\left(\left(\int_0^1 q(x)\left(\,(y(x,T)-\psi(x)\,\right)dx\right)^2+\gamma\left(\int_{-\alpha}^{0} v^2(t)\,dt+\int_0^T u^2(t)\,dt\right)\right).$$

1. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 3. – С. 3 – 19.
2. *Beilin S. A.* Existence of solutions for one-dimensional wave equations with non-local conditions // Electron. J. Different. Equat. – 2001. – **56**. – P. 1 – 8.
3. *Renardy M., Hrusa W., Nohel J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. – London: Longman, 1987. – 273 p.
4. *Ashyralyev A., Yurtsever A.* On a nonlocal boundary value problem for semilinear hyperbolic-parabolic equations // Nonlinear Anal. – 2001. – **47**. – P. 3585 – 3592.
5. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 10. – С. 1468 – 1478.
6. *Капустян В. Е., Пышнограев И. А.* Условия существования и единственности решения параболо-гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Науч. вести НТУУ „КПИ”. – 2012. – **4**. – С. 72 – 86.
7. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294 – 304.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. – М.: Мир, 1972. – 412 с.

Получено 26.08.14