УДК 517.5

О. В. Котова (Донбас. нац. акад. стр-ва и архитектуры),
Р. М. Тригуб (Донец. нац. ун-т)

НОВОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ АЛГЕБРЕ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ВОПРОСАМ СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

We establish a general sufficient condition for the possibility of representation of functions $f\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big)$ in the form of absolutely convergent double Fourier integrals and study the possibility of its application to various problems of summability of double Fourier series, in particular, by the Marcinkiewicz – Riesz method.

Знайдено загальну достатню умову для зображення функцій $f\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big)$ у вигляді абсолютно збіжного подвійного інтеграла Фур'є та показано його застосування до різних питань сумовності подвійних рядів Фур'є, зокрема, методом Марцинкевича – Рісса.

Банахова алгебра $A(\mathbb{R}^d)$ — это алгебра абсолютно сходящихся интегралов Фурье:

$$A(\mathbb{R}^d)=\left\{f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-i(x,y)}dy,\ \|f\|_A=\int\limits_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy<\infty\right\}.$$

Здесь и далее $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $(x,y)=\sum_{j=1}^{d}x_jy_j$, $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Функции $\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ из этой алгебры используются в различных вопросах анализа: в мультипликаторах Фурье; при сравнении линейных операторов, включая дифференциальные с постоянными коэффициентами; при суммируемости рядов и интегралов Фурье (см., например, [1], гл. I). Имеется обзорная статья [2] на эту тему, содержащая список литературы из 175 названий. В этой статье, в частности, приведено много достаточных условий для радиальных функций, т. е. зависящих лишь от евклидовой нормы $|x|=\sqrt{(x,x)}$, и квазирадиальных.

В п. 1 настоящей статьи приведено достаточное условие при $d=2$ для функций, зависящих только от $\max\{|x_1|,|x_2|\}$. Отметим, что в случае финитной функции такого вида некоторое достаточное условие принадлежности $A(\mathbb{R}^d)$ при $d\ge 2$ имеется в [3].

В п. 2 показано применение результатов из п. 1 к вопросам сходимости (по норме, в точках Лебега) разных методов суммирования двойных рядов Фурье (Марцинкевича – Рисса, типа Гаусса – Вейерштрасса).

1. Достаточное условие принадлежности $A(\mathbb{R}^2)$. Следующую теорему можно считать дополнением к обзору [2]. Пусть $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$.

Теорема 1. *Пусть функция f_0 принадлежит $C(\mathbb{R}_+)$ и абсолютно непрерывна на любом отрезке в $(0,+\infty)$, $tf_0(t)\in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\lim_{t\to+\infty}tf_0(t)=0$ и $\int_0^\infty|f_0'(t)|dt<\infty$. Если еще при некотором $\varepsilon\in(0,1)$ и $h\to+0$*

$$\int\limits_0^h\big|f_0'(t)\big|dt+\int\limits_0^\infty\max\{1,t\}\big|f_0'(t+h)-f_0'(t)\big|dt=O(h^\varepsilon),\tag{1}$$

то $f(x)=f(x_1,x_2)=f_0\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big)\in A(\mathbb{R}^2)$.

Заметим сначала, что $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^\infty t\big|f_0(t)\big|^p dt < \infty.$$

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \Big|f_0\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big)\Big|^p dx_1 dx_2 = 4\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big|f_0\big(\max\{x_1,x_2\}\big)\Big|^p dx_1 dx_2 =$$

$$= 4\int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_0^{x_1} \big|f_0(x_1)\big|^p dx_2 + 4\int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_{x_1}^\infty \big|f_0(x_2)\big|^p dx_2 = 4\int\limits_0^\infty x_1\big|f_0(x_1)\big|^p dx_1 +$$

$$+4\int\limits_0^\infty \big|f_0(x_2)\big|^p dx_2 \int\limits_0^{x_2} dx_1 = 8\int\limits_0^\infty t\big|f_0(t)\big|^p dt.$$

Лемма 1. *Если для любого $y \in \mathbb{R}$ существует предел* (*синус-преобразование Фурье*)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n f_0(t)\sin(ty)dt = \int\limits_0^\infty f_0(t)\sin(ty)dt = \widehat{f}_0(y),$$

то при любых $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^n \int\limits_{-n}^n f_0\big(\max\big\{|x_1|,|x_2|\big\}\big) e^{-i(x_1y_1+x_2y_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)\widehat{f}_0(y_1+y_2) + \left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right)\widehat{f}_0(y_2-y_1).$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{-n}^n \int\limits_{-n}^n f_0\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big) e^{-i(x_1y_1+x_2y_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$= 4\int\limits_0^n \int\limits_0^n f_0\big(\max\{x_1,x_2\}\big)\cos(x_1y_1)\cos(x_2y_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= 4\int\limits_0^n \cos(x_1y_1)dx_1 \int\limits_0^{x_1} f_0(x_1)\cos(x_2y_2)dx_2 + 4\int\limits_0^n \cos(x_2y_2)dx_2 \int\limits_0^{x_2} f_0(x_2)\cos(x_1y_1)dx_1 =$$

$$= 4\int\limits_0^n f_0(x_1)\cos(x_1y_1)\frac{\sin(x_1y_2)}{y_2}dx_1 + 4\int\limits_0^n f_0(x_2)\cos(x_2y_2)\frac{\sin(x_2y_1)}{y_1}dx_2 =$$

$$= \frac{2}{y_2}\int\limits_0^n f_0(x_1)\Big(\sin x_1(y_1+y_2)+\sin x_1(y_2-y_1)\Big)dx_1+$$

$$+\frac{2}{y_1}\int\limits_0^n f_0(x_2)\Big(\sin x_2(y_1+y_2)-\sin x_2(y_2-y_1)\Big)dx_2=$$

$$=2\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)\int\limits_0^n f_0(t)\sin t(y_1+y_2)dt+2\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_1}\right)\int\limits_0^n f_0(t)\sin t(y_2-y_1)dt.$$

Осталось устремить n к ∞.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При условиях на* f_0, *содержащихся в теореме* 1, *существуют константа* M_0 *такая, что для* $y \geq 1$

$$\left|\widehat{f_0}(y)-\frac{f_0(0)}{y}\right| \leq \frac{M_0}{y^{1+\varepsilon}}, \tag{2}$$

и константа M_1 *такая, что для* $y \geq 1$

$$\left|\widehat{f_0}'(y)\right| \leq \frac{M_1}{y^{1+\varepsilon}}. \tag{3}$$

Доказательство. После интегрирования по частям получаем

$$\widehat{f_0}(y)-\frac{f_0(0)}{y}=\frac{1}{y}\int\limits_0^\infty f_0'(t)\cos(ty)dt=-\frac{1}{y}\int\limits_{\pi/y}^\infty f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)\cos(ty)dt.$$

Но если $C=A=B$, то и $C=\dfrac{1}{2}(A+B)$. Поэтому

$$\widehat{f_0}(y)-\frac{f_0(0)}{y}=\frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^\infty \left(f_0'(t)-f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)\right)\cos(ty)dt+\frac{1}{2y}\int\limits_0^{\pi/y} f_0'(t)\cos(ty)dt.$$

Применим условие (1) при $y \geq 1$:

$$\left|\widehat{f_0}(y)-\frac{f_0(0)}{y}\right| \leq \frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^\infty \left|f_0'(t)-f_0'\Big(t-\frac{\pi}{y}\Big)\right|dt+\frac{1}{2y}\int\limits_0^{\pi/y}\left|f_0'(t)\right|dt \leq \frac{M_0}{y^{1+\varepsilon}}.$$

Аналогично получаем

$$\widehat{f_0}'(y)=\int\limits_0^\infty tf_0(t)\cos(ty)dt=-\frac{1}{y}\int\limits_0^\infty \big(f_0(t)+tf_0'(t)\big)\sin(ty)dt=$$

$$=\frac{1}{y}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}\left(f_0\left(t-\frac{\pi}{y}\right)+\left(t-\frac{\pi}{y}\right)f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)\right)\sin(ty)dt=$$

$$=\frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}\left[\left(f_0\left(t-\frac{\pi}{y}\right)-f_0(t)\right)+\left(t-\frac{\pi}{y}\right)f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)-tf_0'(t)\right]\sin(ty)dt-$$

$$-\frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{\pi/y}\left(f_0(t)+tf_0'(t)\right)\sin(ty)dt$$

и, учитывая, что $|\sin(ty)|\leq 1$, имеем

$$\left|\widehat{f_0}'(y)\right|\leq\frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}\left|f_0\left(t-\frac{\pi}{y}\right)-f_0(t)\right|dt+\frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}\left|\left(t-\frac{\pi}{y}\right)f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)-tf_0'(t)\right|dt+$$

$$+\frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{\pi/y}|f_0(t)|dt+\frac{\pi}{2y^2}\int\limits_{0}^{\pi/y}|f_0'(t)|dt.$$

Первый интеграл не больше (меняем порядок интегрирования), чем

$$\frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}dt\int\limits_{t-\pi/y}^{t}|f_0'(u)|du=\frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{\pi/y}u|f_0'(u)|du+\frac{\pi}{2y^2}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}|f_0'(u)|du\leq\frac{\pi}{y^2}\int\limits_{0}^{\infty}|f_0'(u)|du.$$

Второй интеграл после простых преобразований не больше, чем

$$\frac{\pi}{2y^2}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}\left|f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)\right|dt+\frac{1}{2y}\int\limits_{\pi/y}^{\infty}t\left|f_0'\left(t-\frac{\pi}{y}\right)-f_0'(t)\right|dt=$$

$$=\frac{\pi}{2y^2}\int\limits_{0}^{\infty}|f_0'(t)|dt+\frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{\infty}\left(t+\frac{\pi}{y}\right)\left|f_0'(t)-f_0'\left(t+\frac{\pi}{y}\right)\right|dt=$$

$$=\frac{\pi}{2y^2}\int\limits_{0}^{\infty}|f_0'(t)|dt+\frac{\pi}{2y^2}\int\limits_{0}^{\infty}\left|f_0'(t)-f_0'\left(t+\frac{\pi}{y}\right)\right|dt+\frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{\infty}t\left|f_0'\left(t+\frac{\pi}{y}\right)-f_0'(t)\right|dt\leq$$

$$\leq\frac{3\pi}{y^2}\int\limits_{0}^{\infty}|f_0'(t)|dt+\frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{\infty}t\left|f_0'\left(t+\frac{\pi}{y}\right)-f_0'(t)\right|dt.$$

Осталось применить ко всем четырем интегралам условие (1).

Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^2)$, так как $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ (см. замечание перед леммой 1), и можно применить формулу обращения (см. [1], п. 1.21) к непрерывной функции f.

В силу четности $\widehat{f}$ по y_1 и y_2 можно ограничиться первой четвертью $\mathbb{R}^2$ ($y_1 > 0$ и $y_2 > 0$), а в силу симметрии относительно биссектрисы первой четверти (см. формулу леммы 1) — областью $y_2 > y_1 > 0$.

Разобьем эту область интегрирования на четыре:

$$1)\, 0 < y_1 < y_2 < 2;\ 2)\, 0 < y_1 < 1, y_2 \geq 2;\ 3)\, y_1 \geq 1, y_2 \geq y_1 + 1;\ 4)\, y_1 \geq 1,\ y_1 < y_2 \leq y_1 + 1.$$

В первом случае (треугольник) интеграл от модуля непрерывной функции конечен.

Во втором случае интеграл от $|\widehat{f}|$ в силу леммы 1 равен

$$\int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \left| \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) \widehat{f_0}(y_1 + y_2) + \left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right) \widehat{f_0}(y_2 - y_1) \right| dy_2 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) \left| \widehat{f_0}(y_1 + y_2) - \widehat{f_0}(y_2 - y_1) \right| dy_2 + \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \frac{2}{y_2} \left|\widehat{f_0}(y_2 - y_1)\right| dy_2 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \frac{2}{y_1} \int\limits_{y_2 - y_1}^{y_1 + y_2} \left|\widehat{f_0}'(u)\right| du dy_2 + \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \frac{2}{y_2} \left|\widehat{f_0}(y_2 - y_1)\right| dy_2.$$

К первому слагаемому применим неравенство (3), а ко второму — следующее из него неравенство

$$\left|\widehat{f_0}(y)\right| = \left| \int\limits_y^\infty \widehat{f_0}'(u) du \right| \leq \frac{M_1}{\varepsilon y^\varepsilon}.$$

Поэтому интеграл от $|\widehat{f}|$ в этом случае не больше, чем

$$\int\limits_0^1 \frac{2}{y_1} dy_1 \int\limits_2^\infty dy_2 \int\limits_{y_2 - y_1}^{y_1 + y_2} \frac{M_1}{u^{1+\varepsilon}} du + \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \frac{2}{y_2} \cdot \frac{M_1}{\varepsilon (y_2 - y_1)^\varepsilon} dy_2 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \frac{2}{y_1} dy_1 \int\limits_2^\infty \frac{2 y_1 M_1}{(y_2 - y_1)^{1+\varepsilon}} dy_2 + \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_2^\infty \frac{2 M_1}{\varepsilon y_2 (y_2 - 1)^\varepsilon} dy_2 < \infty.$$

В третьем случае $y_1 \geq 1$, а $y_2 \geq y_1 + 1$. Тогда

$$\widehat{f_0}(y) = \int\limits_0^\infty f_0(t) \sin(ty) dt = \frac{f_0(0)}{y} + \frac{1}{y} \int\limits_0^\infty f_0'(t) \cos(ty) dt.$$

При применении к этому равенству леммы 1 слагаемое вида $\dfrac{c}{y}$ исчезает. Применяем неравенство (2).

Интеграл от $|\widehat{f}|$ по указанной области не больше, чем

$$\int\limits_1^\infty dy_1 \int\limits_{y_1+1}^\infty \left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)\frac{M_0}{(y_1+y_2)^{1+\varepsilon}}dy_2 + \int\limits_1^\infty dy_1 \int\limits_{y_1+1}^\infty \left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\frac{M_0}{(y_2-y_1)^{1+\varepsilon}}dy_2 =$$

$$= M_0\int\limits_1^\infty \frac{dy_1}{y_1}\int\limits_{y_1+1}^\infty \frac{dy_2}{y_2(y_1+y_2)^\varepsilon} + M_0\int\limits_1^\infty \frac{dy_1}{y_1}\int\limits_{y_1+1}^\infty \frac{dy_2}{y_2(y_2-y_1)^\varepsilon} \le$$

$$\le 2M_0\int\limits_1^\infty \frac{dy_1}{y_1}\int\limits_{y_1+1}^\infty \frac{dy_2}{y_2(y_2-y_1)^\varepsilon} = 2M_0\int\limits_2^\infty \frac{dy_2}{y_2}\int\limits_1^{y_2-1} \frac{dy_1}{y_1(y_2-y_1)^\varepsilon} \le$$

$$\le 2M_0\int\limits_2^\infty \frac{dy_2}{y_2}\int\limits_1^{y_2-1} \frac{dy_1}{y_1(y_2-1)^\varepsilon} = 2M_0\int\limits_2^\infty \frac{\ln(y_2-1)}{y_2(y_2-1)^\varepsilon}dy_2 < \infty.$$

И наконец, в четвертом случае ($y_1 \ge 1$, $y_1 < y_2 \le y_1+1$), используя то же самое условие (2), получаем

$$\int\limits_1^\infty dy_1 \int\limits_{y_1}^{y_1+1} \left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)\frac{M_0}{(y_1+y_2)^{1+\varepsilon}}dy_2 + \int\limits_1^\infty dy_1 \int\limits_{y_1}^{y_1+1} \left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\frac{M_0}{(y_2-y_1)^{1+\varepsilon}}dy_2 \le$$

$$\le 2M_0\int\limits_1^\infty \frac{dy_1}{y_1}\int\limits_{y_1}^{y_1+1} \frac{dy_2}{y_2(y_2-y_1)^\varepsilon} \le 2M_0\int\limits_1^\infty \frac{dy_1}{y_1^2}\int\limits_{y_1}^{y_1+1} \frac{dy_2}{(y_2-y_1)^\varepsilon} < \infty.$$

Таким образом, $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^2)$ и теорема 1 доказана.

Как доказал Винер, алгебра A имеет локальное свойство (см., например, [4], п. 6.1.3).

***Следствие* 1.** *Условие* (1) *в теореме можно заменить следующими тремя*:

при некоторых $0 < \delta < N < \infty$ *и* $\varepsilon \in (0,1)$ *при* $h \to +0$ *на* $[N,+\infty)$ f_0' *монотонна и* $f_0(N+h) - f_0(N) = O(h^\varepsilon)$, *на* $[\delta, N+1]$

$$\int\limits_\delta^N \left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right| dt = O(h^\varepsilon)$$

и на $(0,2\delta]$ f_0' *сохраняет знак и монотонна, а* $\left|f_0(t+h)-f_0(t)\right| = O(h^\varepsilon)$ $\left(f_0 \in \operatorname{Lip}\varepsilon \text{ на } [0,2\delta]\right)$.

Если же $f_0' \in AC_{\rm loc}[N,+\infty)$ *и* $\displaystyle\int_\delta^\infty t\left|f_0''(t)\right|dt < \infty$, *то*

$$\int\limits_\delta^\infty \max\{1,t\}\left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right| dt = O(h^\varepsilon).$$

Доказательство. Около нуля

$$\int\limits_0^h \left|f_0'(t)\right|dt = \left|\int\limits_0^h f_0'(t)dt\right| = \left|f_0(h) - f_0(0)\right| = O(h^\varepsilon),$$

$$\int\limits_0^\delta \max\{1,t\}\Big|f_0'(t+h) - f_0'(t)\Big|dt \le (1+\delta)\left|\int\limits_0^\delta \Big(f_0'(t+h) - f_0'(t)\Big)dt\right| =$$

$$= (1+\delta)\Big|\big[f_0(\delta+h) - f_0(\delta)\big] + \big[f_0(0) - f_0(h)\big]\Big| = O(h^\varepsilon).$$

Далее

$$\int\limits_\delta^N \max\{1,t\}\left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right|dt \le (1+N)\int\limits_\delta^N \left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right|dt = O(h^\varepsilon).$$

Учитывая еще ограниченность функции f_0, получаем

$$\int\limits_N^\infty \max\{1,t\}\left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right|dt \le \left(1+\frac{1}{N}\right)\int\limits_N^\infty t\left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right|dt =$$

$$= \left(1+\frac{1}{N}\right)\left|\int\limits_N^\infty t\big(f_0'(t+h) - f_0'(t)\big)dt\right| = \left(1+\frac{1}{N}\right)\left|\Big[t\big(f_0(t+h) - f_0(t)\big)\Big]_N^\infty - \right.$$

$$\left. - \int\limits_N^\infty \big(f_0(t+h) - f_0(t)\big)dt\right| = \left(1+\frac{1}{N}\right)\left|N\big(f_0(N) - f_0(N+h)\big) - \int\limits_N^{N+h} f_0(t)dt\right| = O(h^\varepsilon).$$

Осталось учесть, что

$$\int\limits_\delta^\infty t\left|f_0'(t+h) - f_0'(t)\right|dt \le \int\limits_\delta^\infty tdt\int\limits_t^{t+h}\left|f_0''(u)\right|du = \int\limits_\delta^{\delta+h}\left|f_0''(u)\right|du\int\limits_\delta^u tdt +$$

$$+ \int\limits_{\delta+h}^\infty \left|f_0''(u)\right|du\int\limits_{u-h}^u tdt \le h\int\limits_\delta^{\delta+h} u\left|f_0''(u)\right|du + h\int\limits_{\delta+h}^\infty u\left|f_0''(u)\right|du = h\int\limits_\delta^\infty u\left|f_0''(u)\right|du.$$

Следствие доказано.

Существенное отличие от радиальных функций содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Если* $tf_0(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ *и* $\widehat{f_0} \in L_1(\mathbb{R}_+)$ $\left(\text{*или* } \widehat{f_0}(t) = o\left(\frac{1}{t}\right) \text{ *при* } t \to +\infty\right)$, *а* $f(x) = f_0\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big) \in A^*(\mathbb{R}^2)$, *где*

$$A^*(\mathbb{R}^2) = \left\{ f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(y) e^{-i(x,y)} dy, \int\limits_0^\infty t \operatorname{ess\,sup}_{|y|\geq t} \big|g(y)\big| dt < \infty \right\},$$

то $f_0 \equiv 0$.

Доказательство. Заметим, что свойствам и применениям алгебры A^* посвящена статья [5].

После перехода к полярным координатам

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |g(y)| dy = \int\limits_0^\infty t dt \int\limits_0^{2\pi} \big|g(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\big| d\varphi \leq \int\limits_0^\infty t \operatorname{ess\,sup}_{|y|\geq t} \big|g(y)\big| dt < \infty,$$

так что $f = \hat{g} \in A(\mathbb{R}^2)$, а поскольку и $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ (см. замечание перед леммой 1), то в силу формулы обращения почти всюду

$$g(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{i(x,y)} dx.$$

По лемме 1 при y_1 и $y_2 \neq 0$

$$2\pi^2 g(y) = \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) \widehat{f_0}(y_1 + y_2) + \left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right) \widehat{f_0}(y_2 - y_1).$$

При произвольном $a > 0$ берем $y_1 = t$ и $y_2 = t + a$. Тогда

$$2\pi^2 \int\limits_0^\infty t \operatorname{ess} \sup_{y_1^2 + y_2^2 \geq t^2} \left| \left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right) \widehat{f_0}(y_2 - y_1) + \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) \widehat{f_0}(y_1 + y_2) \right| dt \geq$$

$$\geq 2\pi^2 \int\limits_0^\infty t \left| \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right| \big|\widehat{f_0}(a)\big| - \frac{2}{t}\big|\widehat{f_0}(2t+a)\big| \right| dt = 2\pi^2 \int\limits_0^\infty \left| \frac{a\big|\widehat{f_0}(a)\big|}{t+a} - 2\big|\widehat{f_0}(2t+a)\big| \right| dt.$$

В каждом из указанных в теореме двух случаев должен сходиться интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{a\big|\widehat{f_0}(a)\big|}{t+a} dt.$$

Следовательно, $\widehat{f_0}(a) = 0$ при $a > 0$ и $f_0 \equiv 0$.

Сделаем еще замечание о положительно определенных функциях вида $f_0\big(\max\{|x_1|, |x_2|\}\big)$.

Функция $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ называется положительно определенной, если для любых наборов векторов $\{x_k\}_1^n$ и чисел $\{c_k\}_1^n$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n f(x_k - x_m) c_k \overline{c}_m \geq 0.$$

Если при этом $f \in C(\mathbb{R}^d)$, то по теореме Бохнера–Хинчина она представляется в виде преобразования Фурье конечной борелевской положительной меры. А если еще $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, то $\hat{f}(y) \geq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$ и $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ (см., например, [4]).

Предположим, что $f_0 \in C(\mathbb{R}_+) \cap AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $tf_0(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $f_0(0) > 0$ и $f_0' \in L_1(\mathbb{R}_+)$.

В силу леммы 1 при y_1 и $y_2 \neq 0$

$$2\hat{f}(y_1, y_2) = \frac{1}{y_1 y_2}\Big[(y_1 + y_2)\widehat{f_0}(y_1 + y_2) - (y_2 - y_1)\widehat{f_0}(y_2 - y_1)\Big],$$

где

$$\widehat{f_0}(y) = \int\limits_0^\infty f_0(t)\sin(ty)dt.$$

Очевидно, что $\hat{f} \geq 0$ в том и только в том случае, когда $y\widehat{f_0}(y)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$ или, что то же самое, возрастает интеграл

$$\int\limits_0^\infty f_0'(t)\cos(ty)dt$$

(от $-f_0(0)$ до нуля).

2. Применения к двойным рядам Фурье. Пусть $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \big(1 - t^\alpha\big)^\beta$ при $t \in [0, 1]$ и $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = 0$ при $t > 1$, а α и $\beta > 0$. Суммируемость числового ряда $\sum_{k=0}^\infty u_k$ по Риссу — это существование предела средних

$$\sum_{k=0}^n u_k \varphi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)$$

при $n \to \infty$ ((α, β)-сходимость). При $\beta = 0$ — это обычная сходимость. (α_1, β)- и (α_2, β)-сходимости имеют место одновременно, только при $\beta_2 > \beta_1$ из (α, β_1)-сходимости следует (α, β_2)-сходимость, но не наоборот (см. [6], теорема 58). А $(1, \beta)$-сходимость эквивалентна (C, β)-суммируемости (см. там же).

Фейер применил этот метод при $\alpha = \beta = 1$ к рядам Фурье:

$$\sigma_n(f) = \sum_{|k| \leq n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}_k e_k, \quad e_k = e^{ikx}, \qquad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

(это средние арифметические первых $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ — частных сумм ряда Фурье 2π-периодической функции $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$) и доказал равномерную сходимость σ_n к f для любой $f \in C(\mathbb{T})$.

Лебег доказал сходимость σ_n к $f \in L_1(\mathbb{T})$ во всех ее точках Лебега и, значит, почти всюду.

В случае кратных рядов Фурье размерности d сходимость средних

$$\sigma^0_{n,2,\beta}(f) = \sum_{|k| \leq n}\left(1 - \frac{|k|^2}{n^2}\right)^\beta \widehat{f}_k e_k \qquad \left(e_k = e^{i(k,x)}, \quad \widehat{f}_k = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(x)e^{-i(k,x)}dx\right)$$

изучил Бохнер. В случае $d = 2$ сходимость в $C(\mathbb{T}^2)$ имеет место только при $\beta > \dfrac{1}{2}$.

Критический показатель $\frac{1}{2}$ связан с тем, что норма оператора взятия круговой частной суммы

$$\|S_n^{\circ}\|_{C\to C} = \|\sigma_{n,2,0}^{\circ}\|_{C\to C} \asymp \sqrt{n}.$$

Для квадратных частных сумм

$$\|S_n^{\square}\|_{C\to C} = \sup_{\|f\|_C\le 1} \Big\| \sum_{|k_1|,|k_2|\le n} \widehat{f}_k e_k \Big\|_C \asymp \ln^2 n.$$

Это два крайних случая роста норм операторов (констант Лебега) вида

$$\sup_{\|f\|_C\le 1} \Big\| \sum_{k\in nW} \widehat{f}_k e_k \Big\|_C,$$

где W — выпуклое ограниченное плоское множество с началом координат внутри (см. [4], гл. 9 и комментарий к ней).

Марцинкевич [7] исследовал сходимость средних арифметических квадратных частных сумм двойных рядов Фурье

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k^{\square}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \varphi_{1,1}\left(\frac{1}{n}\max\{|k_1|,|k_2|\}\right)\widehat{f}_k e_k.$$

Оказалось, что для непрерывных $f\in C(\mathbb{T}^2)$ имеет место равномерная сходимость всегда, а сходимость почти всюду для $f\in L_1(\mathbb{T}^2)$ — при некотором дополнительном условии $\Big(|f|\ln(1+ + |f|)\in L_1(\mathbb{T}^2)\Big)$.

Еще в 1968 г. появились два принципа сравнения разных методов суммирования рядов Фурье [8, 9]. В этом сравнении скорости сходимости по норме для средних Рисса уже при $d=1$ порядок приближения не зависит от β, а с ростом α улучшается (отличие от случая числовых рядов) (см. [4, с. 342] и ниже теорему 4).

Исследуем сходимость следующих средних Марцинкевича – Рисса $(\alpha>0, \beta>0)$:

$$\sigma_{n,\alpha,\beta}^{\square}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \varphi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{n}\max\{|k_1|,|k_2|\}\right)\widehat{f}_k e_k$$

(по поводу приближения средними Бохнера – Рисса см. [4], п. 8.2.8).

Из предшествующих работ отметим [10 – 12]. В отличие от статей [7, 10, 11] в настоящее время для подобных целей используется принадлежность некоторых функций алгебре A (см. в начале статьи).

Введем еще аналог средних Гаусса – Вейерштрасса $(\alpha>0)$

$$G_{n,\alpha}^{\square}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{n^{\alpha}}\max\{|k_1|^{\alpha},|k_2|^{\alpha}\}}\widehat{f}_k e_k.$$

Теорема 3. *При любых α и $\beta>0$ для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p\in[1,+\infty]$ $(L_\infty = C)$*

$$\big\|f-\sigma_{n,\alpha,\beta}^{\square}(f)\big\|_{L_p} + \big\|f-G_{n,\alpha}^{\square}(f)\big\|_{L_p} \to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Если $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$, то для того чтобы средние

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\widehat{f}_k e_k$$

сходились на всем пространстве $C(\mathbb{T}^d)$ $\big($или $L_1(\mathbb{T}^d)\big)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi\in A(\mathbb{R}^d).$$

Это же условие достаточно для сходимости на $L_p(\mathbb{T}^d), p\in(1,+\infty)$ (см. [4], п. 8.1.2).

Теперь применим следствие из теоремы 1. В случае средних типа Гаусса – Вейерштрасса $f_0(t)=e^{-t^\alpha}$, $\alpha>0$. Около нуля

$$f_0(t)=1-t^\alpha+\frac{1}{2}t^{2\alpha}-\ldots, \quad f_0'(t)=-\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}.$$

Производная сохраняет знак и монотонна, а $f_0\in \mathrm{Lip}\min\{\alpha,1\}$.

Вне любой окрестности нуля $f_0''(t)=O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$.

В случае средних Марцинкевича – Рисса $f_0(t)=\varphi_{\alpha,\beta}(t)=\big(1-t^\alpha\big)_+^\beta$.

Около нуля действуем аналогично предыдущему, а вне окрестностей 0 и 1 $f_0=0$ $(t\ge 1)$ или принадлежит $C^2(t<1)$.

Около 1 слева

$$f_0(t)=\Big[1-\big(1-(1-t)\big)^\alpha\Big]^\beta=\left(\alpha(1-t)-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1-t)^2+\ldots\right)^\beta=$$

$$=\alpha^\beta(1-t)^\beta\left(1-\frac{\alpha-1}{2}(1-t)+\ldots\right)^\beta.$$

Следовательно, при некотором $q\in(0,1)$ $f_0\in\mathrm{Lip}\,\varepsilon$ на $[q,1]$, $\varepsilon=\min\{1,\beta\}$, а на $[q,1)$ f_0' сохраняет знак и монотонна. Поэтому при $h\in(0,1-q]$

$$\int\limits_q^{1+q}\big|f_0'(t+h)-f_0'(t)\big|\,dt=\left|\int\limits_q^{1-h}\Big(f_0'(t+h)-f_0'(t)\Big)dt\right|+\left|\int\limits_{1-h}^{1}f_0'(t)dt\right|=O(h^\varepsilon).$$

Теорема 3 доказана.

Теперь сравним эти методы суммирования при разных значениях параметров. Заметим, что $\gamma(a,b)$ зависит только от a и b.

Теорема 4. 1. *При любых* α,β_1 *и* $\beta_2>0$, *при любом* n *и* $f\in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p\in[1,+\infty]$ $(L_\infty=C)$

$$\big\|f-\sigma^\square_{n,\alpha,\beta_1}(f)\big\|_{L_p}\le\gamma_1(\alpha,\beta_1,\beta_2)\big\|f-\sigma^\square_{n,\alpha,\beta_2}(f)\big\|_{L_p},$$

т. е. порядок приближения не зависит от β.

2. *При* $\beta>0$ *и* $\alpha_2>\alpha_1>0$, *при любом* n *и для любой функции* $f\in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p\in[1,+\infty]$ $(L_\infty=C)$

$$\big\|f-\sigma^\square_{n,\alpha_2,\beta}(f)\big\|_{L_p}\le\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\big\|f-\sigma^\square_{n,\alpha_1,\beta}(f)\big\|_{L_p},$$

т. е. с ростом α *скорость сходимости может возрастать.*

Доказательство. Применим принцип сравнения в следующей форме (см. [4], п. 8.2.2в): если φ и $\psi \in A(\mathbb{R}^d)$ и $\psi(x) \neq 1$ при $x \neq 0$, то для того чтобы

$$\left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k e_k \right\|_C \leq K \left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \psi\left(\frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k e_k \right\|_C$$

с константой K, не зависящей от f и n, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\psi - \varphi}{1 - \psi} \in A(\mathbb{R}^d).$$

Отсюда следует такое же неравенство и в $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

1. Нужно доказать, что для любых α и $\beta > 0$

$$\left\| f - \sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta}(f) \right\| \asymp \left\| f - \sigma^{\square}_{n,\alpha,1}(f) \right\|$$

(двойное неравенство с константами, зависящими только от α и β).

Применим следствие из теоремы 1 к функции

$$f_0(t) = \frac{\varphi_{\alpha,1}(t) - \varphi_{\alpha,\beta}(t)}{1 - \varphi_{\alpha,1}(t)}, \quad f_0(0) = \beta - 1.$$

Около нуля

$$f_0(t) = \frac{1 - t^\alpha - (1 - t^\alpha)^\beta}{t^\alpha} = \beta - 1 - \frac{1}{2}\beta(\beta - 1)t^\alpha + \ldots,$$

а в окрестности 1

$$f_0(t) = \frac{1}{t^\alpha} - (1 - t^\alpha)_+^\beta$$

(см. доказательство теоремы 3).

Для доказательства противоположного неравенства

$$f_0(t) = \frac{\varphi_{\alpha,\beta}(t) - \varphi_{\alpha,1}(t)}{1 - \varphi_{\alpha,\beta}(t)}$$

можно повторить предыдущие рассуждения, но проще применить $\dfrac{1}{f}$-теорему Винера (см., например, [4], следствие из 6.1.8):

если $f \in A$ и при некотором $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $f(x) \neq \lambda$ для всех x, то и

$$\frac{f(x)}{f(x) - \lambda} + \frac{1}{\lambda} \in A.$$

При $\lambda = 1$ и $\beta \neq 2$ эта теорема применима. А при целых β утверждение 1 очевидно.

2. В силу первого утверждения можно ограничиться случаем $\beta = 1$. Тогда при применении приведенного выше принципа сравнения

$$f_0(t) = \frac{\varphi_{\alpha_1,1}(t) - \varphi_{\alpha_2,1}(t)}{1 - \varphi_{\alpha_1,1}(t)}.$$

Очевидно, что $f_0\big(\max\{|x_1|,|x_2|\}\big)\in A(\mathbb{R}^2)$, так как

$$f_0(t)=t^{\alpha_2-\alpha_1}-1 \qquad (0\le t\le 1),\quad f_0(t)=0\quad (t>1),$$

а противоположное неравенство для всех функций и n не существует.

Теорема 4 доказана.

Еще в начале 60-х годов прошлого столетия второй из авторов стал определять точный порядок приближения индивидуальных периодических функций классическими средними рядов Фурье. Иногда, а особенно в случае кратных рядов Фурье, пришлось вводить для этих целей специальные модули гладкости и K-функционалы (см. [13]). Так, О. И. Кузнецова (см. [12]) доказала, что

$$\big\|f-\sigma^{\square}_{n,1,1}(f)\big\|_C \asymp \left\|\int\limits_1^{\infty}\frac{\Big(\dot\Delta^2_{(e_1^\circ+e_2^\circ)\frac{u}{n}}+\dot\Delta^2_{(e_1^\circ-e_2^\circ)\frac{u}{n}}\Big)f(\cdot)}{u^2}du\right\|_C. \tag{4}$$

Здесь $\dot\Delta^1_h f(x)=f(x+h)-f(x-h)$, e_1° и e_2° — орты осей в $\mathbb{R}^2$.

Как следует из теоремы 4 (см. п. 1), такой же порядок приближения у $\sigma^{\square}_{n,1,\beta}(f)$ при любом $\beta>0$.

В настоящее время такие результаты называют „strong converge inequalities" (см., например, [14] и имеющиеся там ссылки).

Можно найти точный порядок приближения полиномами $\sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta}$ при любом $\alpha>0$ через специальный K-функционал, если воспользоваться схемой доказательства, изложенной в [4, с. 371].

Полагаем $\beta=1$. Норма $\|\cdot\|$ в $L_p(\mathbb{T}^2)$, $1\le p\le\infty$ $(L_\infty=C)$.

I. Определяем класс насыщения для $\sigma^{\square}_{n,\alpha,1}$. В данном случае он задается дифференциальным оператором

$$d_\alpha(f)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\max\big\{|k_1|^\alpha,|k_2|^\alpha\big\}\widehat{f}_k e_k,$$

который порождает следующий K-функционал $(\varepsilon>0)$:

$$K_\alpha(\varepsilon,f)=\inf_g\Big(\|f-g\|+\varepsilon^\alpha\|d_\alpha(g)\|\Big).$$

II. Используя принцип сравнения, доказываем неравенство

$$\big\|f-\sigma^{\square}_{n,\alpha,1}(f)\big\|\le\gamma_1(\alpha)\frac{1}{n^\alpha}\|d_\alpha(f)\|.$$

III. Используя принцип сравнения, доказываем неравенство

$$\frac{1}{n^\alpha}\big\|d_\alpha(\sigma^{\square}_{n,\alpha,1}(f))\big\|\le\gamma_2(\alpha)\big\|f-\sigma^{\square}_{n,\alpha,1}(f)\big\|.$$

В случае II $\big(t=\max\big\{|x_1|,|x_2|\big\}\big)$

$$f_0(t)=\frac{1-\varphi_{\alpha,1}(t)}{t^\alpha}=1 \qquad (t\in[0,1]),\quad \frac{1}{t^\alpha}\quad (t\ge 1),$$

а в случае III

$$f_0(t) = \frac{t^\alpha \varphi_{\alpha,1}(t)}{1-\varphi_{\alpha,1}(t)} = 1 - t^\alpha \qquad (t \in [0,1]), \quad 0 \qquad (t \geq 1).$$

Применяем, как и ранее, следствие из теоремы 1.

Из этих двух неравенств следует, что

$$K_\alpha\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \left\|f - \sigma^\square_{n,\alpha,1}(f)\right\| + \frac{1}{n^\alpha}\left\|d_\alpha(\sigma^\square_{n,\alpha,1}(f))\right\| \leq \big(1+\gamma_2(\alpha)\big)\left\|f - \sigma^\square_{n,\alpha,1}(f)\right\|$$

и

$$\left\|f - \sigma^\square_{n,\alpha,1}(f)\right\| \leq \left\|f - g - \sigma^\square_{n,\alpha,1}(f-g)\right\| + \left\|g - \sigma^\square_{n,\alpha,1}(g)\right\| \leq$$

$$\leq \Big(1 + \|\sigma^\square_{n,\alpha,1}\|\Big)\|f-g\| + \gamma_1(\alpha)\frac{1}{n^\alpha}\left\|d_\alpha g\right\|.$$

Остается учесть, что в силу того же принципа сравнения

$$\|\sigma^\square_{n,\alpha,1}\| = \sup_{\|f\|\leq 1}\|\sigma^\square_{n,\alpha,1}(f)\| \leq \|\varphi_{\alpha,1}\|_A.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *При любых α и $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ ($L_\infty = C$)*

$$\|f - \sigma^\square_{n,\alpha,\beta}(f)\|_{L_p} \asymp K_\alpha\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

В теоремах этого пункта множитель $\dfrac{1}{n}$ можно заменить на произвольное $\varepsilon > 0$ (см. [4]). Поэтому из теоремы 5 и неравенства (4) получаем такое следствие.

Следствие 2. *При любом $\varepsilon > 0$*

$$K_1(\varepsilon, f) := \inf_g \Big(\|f-g\| + \varepsilon^\alpha\|d_\alpha(g)\|\Big) \asymp \left\|\int\limits_1^\infty \frac{\Big(\dot\Delta^2_{(e_1^\circ+e_2^\circ)\varepsilon u} + \dot\Delta^2_{(e_1^\circ-e_2^\circ)\varepsilon u}\Big)f(\cdot)}{u^2}du\right\|.$$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости таких средних в точках Лебега.

Точкой Лебега функции $f \in L_1$ называют точку x_0, для которой существует такое число $s = s(x_0)$, что

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^d}\int\limits_{|x_0|\leq r}\big|f(x_0+x) - s\big|dx = 0.$$

Оказывается, что ни при каких α и $\beta > 0$ не может быть сходимости $\sigma^\square_{n,\alpha,\beta}(f)$ и $G^\square_{n,\alpha}(f)$ к f в точках Лебега любой функции $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 6. *Если $t\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, а $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(t)\sin(ty)dt = o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to +\infty$, то не может быть для любой $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$ во всех ее точках Лебега $\lim_{n\to\infty}\sigma^\square_n(f;x) = f(x)$, если*

$$\sigma^\square_n(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\max\{|k_1|,|k_2|\}\right)\widehat{f}_k e_k.$$

Доказательство. Как известно, для сходимости таких средних в точках Лебега $\Big($при множителях $\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$ с непрерывной функцией $\varphi\Big)$ достаточно, чтобы $\varphi(0) = 1$ и $\varphi \in A^*(\mathbb{R}^d)$ (см. [1], п. 1.25). На самом деле, это и необходимое условие ([5], [4], п. 8.1.3). Поэтому достаточно применить теорему 2.

Теорема 6 доказана.

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 331 с.
2. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Anal. and Math. Phys. – 2012. – **2**, № 1. – P. 1 – 68.
3. *Подкорытов А. Н.* Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам // Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон. – 1980. – № 1. – С. 51 – 58.
4. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
5. *Belinsky E. S., Liflyand E. R., Trigub R. M.* The Banach algebra A^* and its properties // Fourier Anal. and Appl. – 1997. – **3**, № 2.
6. *Харди Г. Х.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 505 с.
7. *Marcinkiewicz I.* Sur une methode remarquable de sommation des series doubles de Fourier. Collected papers. – Warszawa: PWN, 1964. – P. 527 – 538.
8. *Shapiro H. S.* Some Tauberian teorems with applications to approximation theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**. – P. 499 – 504.
9. *Тригуб Р. М.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 1. – С. 24 – 49.
10. *Жижиашвили Л. В.* О суммировании двойных рядов Фурье // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 3. – С. 548 – 564.
11. *Тиман М. Ф., Пономаренко В. Г.* О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 9. – С. 59 – 67.
12. *Кузнецова О. И., Тригуб Р. М.* Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 34 – 36.
13. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378 – 1409.
14. *Draganov B. R.* Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators // J. Approxim. Theory. – 2010. – **162**. – P. 952 – 979.

Получено 18.06.14