УДК 517.5

Д. С. Скороходов (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ГЕЛЬДЕРА

We find the exact values of one-dimensional linear widths of the Hölder classes of functions in the space C and the quantity of the best approximation of the Hölder classes of functions by a wide class of linear positive methods.

Знайдено точні значення одновимірних лінійних поперечників класів Гельдера у просторі неперервних функцій і величину найкращого наближення класів Гельдера широким класом лінійних додатних методів.

1. Введение и постановка задачи. *1.* Пусть X — линейное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{M}$ — фиксированное подмножество пространства X. Напомним определения некоторых аппроксимативных характеристик множества $\mathcal{M}$ (см., например, [7, 13]). Для $N \in \mathbb{N}$ через L_N обозначим множество линейных многообразий пространства X, размерность которых не превышает N. *Колмогоровский N-поперечник* множества $\mathcal{M}$ в пространстве X определяется следующим образом:

$$d_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{F \in L_N} \sup_{f \in \mathcal{M}} \inf_{u \in F} \|f - u\|_X. \tag{1}$$

Через $\mathcal{L}(X; F)$, $F \in L_N$, обозначим пространство линейных непрерывных операторов $A : X \to F$. Величина

$$\lambda_N(\mathcal{M}; X) := \inf_{F \in L_N} \inf_{A \in \mathcal{L}(X;F)} \sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - Af\|_X \tag{2}$$

называется *линейным N-поперечником* множества $\mathcal{M}$ в пространстве X.

В настоящее время точные значения поперечников d_N и λ_N известны для ряда важных классов $\mathcal{M}$ в различных пространствах X (см., например, [7–9, 14]). Данная статья посвящена вопросу о точных значениях поперечников (1) и (2) для классов функций, заданных вогнутым модулем непрерывности.

Пусть C — пространство непрерывных на $[0,1]$ функций, $\widetilde{C}$ — пространство непрерывных 1-периодических функций. Оба пространства оснастим стандартной нормой

$$\|f\| := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

где либо $f \in C$, либо $f \in \widetilde{C}$. Для $\delta > 0$ *модуль непрерывности* функции $f \in C$ определяется следующим образом:

$$\omega_C(f, \delta) := \sup\left\{\left|f(x') - f(x'')\right| : x', x'' \in [0,1],\ |x' - x''| \le \delta\right\}.$$

Модуль непрерывности периодической функции $f \in \widetilde{C}$ определяется подобным образом:

$$\omega_{\widetilde{C}}(f, \delta) := \sup\left\{\left|f(x') - f(x'')\right| : x', x'' \in \mathbb{R},\ |x' - x''| \le \delta\right\}.$$

Пусть ω — произвольный модуль непрерывности (см. [7], § 6.1). Рассмотрим класс функций

$$H^\omega := \{f \in C\colon \omega_C(f,\delta) \le \omega(\delta)\ \ \forall \delta \in [0,1]\}$$

и его 1-периодический аналог — класс $\widetilde{H}^\omega$. В частном случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, классы H^ω и $\widetilde{H}^\omega$ обычно называются *классами Гельдера* порядка α и обозначаются через H^α и $\widetilde{H}^\alpha$ соответственно. Точные значения колмогоровских N-поперечников этих классов известны для всех $N \in \mathbb{N}$:

$$d_N(H^\omega; C) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right) \tag{3}$$

и

$$d_N\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{2\left[\frac{N+1}{2}\right]}\right), \tag{4}$$

где $[z]$ — целая часть числа z. Равенство (3) было установлено В. М. Тихомировым [13] и Ю. И. Григоряном [1]. Соотношение (4) для нечетных N было получено Н. П. Корнейчуком [4] (см. также [5]), а для четных N — В. И. Рубаном [12].

В то же время точные значения линейных поперечников $\lambda_N(H^\omega; C)$ и $\lambda_N\big(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\big)$ известны лишь в тривиальном случае, когда ω линеен на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2N}\right]$. Задача об их вычислении неоднократно ставилась Н. П. Корнейчуком (см. [6, 8 – 10]). По-видимому, основная причина сложности этой задачи состоит в отсутствии общих методов получения оценок снизу для линейных поперечников, которые бы существенно использовали линейность приближающих методов.

В данной работе вычислены одномерные линейные поперечники $\lambda_1(H^\omega; C)$ и $\lambda_1\big(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\big)$. В частности, для $N = 1$ подтверждена гипотеза Н. П. Корнейчука (см. [9], § 8.2.2) о том, что

$$\lambda_{2N-1}\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = 2N \int\limits_0^{1/2N} \omega(t)\,dt.$$

2. Вместе с колмогоровскими и линейными поперечниками определенный интерес представляет также изучение и других аппроксимативных характеристик класса H^ω. Для $F \in L_N$ через $\mathcal{L}^+(C;F)$ обозначим множество *положительных* операторов $A \in \mathcal{L}(C;F)$, т. е. Af неотрицательна, если f неотрицательна. Также через $\mathcal{L}^{++}(C;F)$ обозначим множество операторов $A \in \mathcal{L}^+(C;F)$, представимых в виде

$$Af = \sum_{j=1}^N \varphi_j(f)\cdot e_j, \quad f \in C,$$

для некоторых линейных ограниченных положительных функционалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ на C и неотрицательных непрерывных функций $e_1, e_2, \ldots, e_N$. В дальнейшем будем называть операторы из множества $\mathcal{L}^{++}(C;F)$ *положительными миниэдральными* операторами, поскольку множество значений оператора A — миниэдральный конус в пространстве C.

Отметим, что множество положительных миниэдральных операторов достаточно широко. Действительно, каждый оператор $A \in \mathcal{L}(C;F)$, для которого $\sup_{f\in H^\omega}\|f - Af\| < \infty$, инвариантен на константах. Поэтому он представим в виде разности $A = A_1 - A_2$ двух операторов $A_1, A_2 \in \mathcal{L}^{++}(C;F)$.

Рассмотрим следующие аналоги линейных поперечников:

$$\lambda_N^{+}(H^\omega; C) := \inf_{F\in L_N} \inf_{A\in\mathcal{L}^{+}(C;F)} \sup_{f\in H^\omega} \|f - Af\|\,,$$

$$\lambda_N^{++}(H^\omega; C) := \inf_{F\in L_N} \inf_{A\in\mathcal{L}^{++}(C;F)} \sup_{f\in H^\omega} \|f - Af\|\,.$$

В данной работе найдены величины λ_1^{+}, λ_2^{+}, а также величина λ_N^{++} для всех $N \geq 1$.

2. Основные результаты. Пусть ω — произвольный вогнутый модуль непрерывности. Пусть также либо одновременно $\mathcal{M} = H^\omega$ и $X = C$, либо одновременно $\mathcal{M} = \widetilde{H}^\omega$ и $X = \widetilde{C}$. Напомним, что одна из двух рассмотренных в данной работе задач состоит в вычислении величины

$$\lambda_1(\mathcal{M}; X) := \inf_{\substack{F\subset X\\ \dim F=1}} \inf_{A\in\mathcal{L}(X;F)} \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f - Af\|.$$

Для одномерного подпространства F пространства X положим

$$E(\mathcal{M}; F) := \inf_{A\in\mathcal{L}(X;F)} \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f - Af\|$$

и обозначим через K подпространство констант. Поскольку $K \subset \mathcal{M}$, величина $E(\mathcal{M}; F)$ конечна только в том случае, когда $F = K$. Следовательно,

$$\lambda_1(\mathcal{M}; X) = \inf_{A\in\mathcal{L}(X;K)} \sup_{f\in\mathcal{M}} \|f - Af\|. \tag{5}$$

Далее, пусть V — множество функций $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\sigma(0) = 0$, ограниченной на отрезке $[0,1]$ вариации и V_1 — подпространство V, состоящее из функций $\sigma \in V$, для которых $\sigma(1) = 1$. Применяя теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала на C и $\widetilde{C}$, равенство (5) запишем в виде

$$\lambda_1(\mathcal{M}; X) = \inf_{\sigma\in V_1} \sup_{f\in\mathcal{M}} \left\| f - \int_0^1 f(t)\, d\sigma(t) \right\|. \tag{6}$$

Далее будем говорить, что функция $\sigma^* \in V_1$ *порождает* наилучший линейный метод приближения множества $\mathcal{M}$ пространством констант, если

$$\sup_{f\in\mathcal{M}} \left\| f - \int_0^1 f(t)\, d\sigma^*(t) \right\| = \lambda_1(\mathcal{M}; X).$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда*

$$\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = 2\int_0^{1/2} \omega(t)\, dt$$

и наилучший линейный метод приближения класса $\widetilde{H}^\omega$ пространством констант порождается функцией $\sigma(t) = t$, $t \in [0,1]$.

Теорема 2. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда существует неубывающая функция $g_\omega \in V_1$ такая, что $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ для всех $t \in [0,1]$, и*

$$\lambda_1(H^\omega; C) = \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg_\omega(t) \qquad \text{для всех} \quad x \in [0,1]. \tag{7}$$

Кроме того, функция g_ω порождает наилучший линейный метод приближения класса H^ω пространством констант.

Следующее утверждение легко выводится из теоремы 2.

Предложение 1. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Если существуют функция $g \in V_1$ и число $\lambda \geq 0$ такие, что равенство*

$$\int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) = \lambda \tag{8}$$

выполнено для всех $x \in [0,1]$, то $\lambda = \lambda_1(H^\omega; C)$.

Отметим, что теорема 2 устанавливает связь между линейным поперечником $\lambda_1(H^\omega; C)$ и функцией $g_\omega \in V_1$, порождающей наилучший линейный метод приближения класса H^ω пространством констант. Таким образом, соотношение (7) можно рассматривать как неявный ответ на вопрос о точном значении поперечника $\lambda_1(H^\omega; C)$. Более того, $\lambda_1^{++}(H^\omega; C) = \lambda_1^{+}(H^\omega; C) = \lambda_1(H^\omega; C)$, поскольку g_ω — неубывающая функция. Для классов Гельдера H^α, $\alpha \in (0,1)$, воспользуемся предложением 1, чтобы явно вычислить поперечник $\lambda_1\left(H^\alpha; C\right)$.

Теорема 3. *Если $\alpha \in (0,1)$, то*

$$\lambda_1\left(H^\alpha; C\right) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}. \tag{9}$$

Кроме того, наилучший линейный метод приближения класса H^α пространством констант порождается функцией

$$g(x) := \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^x \frac{dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}, \quad x \in [0,1], \tag{10}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема 2 также позволяет получить новые оценки сверху поперечника λ_N:

$$\lambda_N(H^\omega; C) \leq \lambda_1(H^{\omega_N}; C),$$

где $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. В частности, для $\alpha \in (0,1)$,

$$\lambda_N\left(H^\alpha; C\right) \leq \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2N^\alpha\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отметим, что полученные оценки точны, если сузить множество всех линейных операторов $\mathcal{L}(C;F)$ в определении (2) к множеству линейных положительных миниэдральных операторов $\mathcal{L}^{++}(C;F)$. Для строгой формулировки соответствующего результата введем несколько дополнительных определений.

Для $\varepsilon \in (0, 1/2N)$ через $\chi_1^\varepsilon, \chi_2^\varepsilon, \ldots, \chi_N^\varepsilon$ обозначим произвольный набор неотрицательных непрерывных функций таких, что

1) $\chi_k^\varepsilon(t) = 1$, $t \in \big[(k-1)/N + \varepsilon, k/N - \varepsilon\big]$, для всех $k = 1, 2, \ldots, N$;

2) $\operatorname{supp} \chi_k^\varepsilon \subset \big[(k-1)/N - \varepsilon, k/N + \varepsilon\big]$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N$;

3) $\chi_1^\varepsilon(t) + \chi_2^\varepsilon(t) + \ldots + \chi_N^\varepsilon(t) = 1$ для всех $t \in [0,1]$.

Далее, для $g \in V_1$ построим оператор $A_g^\varepsilon : C \to C$ следующим образом:

$$A_g^\varepsilon f = \sum_{k=1}^{N} \chi_k^\varepsilon \int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\, dg(Nt - k + 1). \tag{11}$$

Обозначив линейную оболочку системы функций $\{\chi_k^\varepsilon\}_{k=1}^N$ через $\mathcal{F}_N$, несложно видеть, что $A_g^\varepsilon \in \mathcal{L}(C; \mathcal{F}_N)$ для всех $g \in V_1$ и $A_g^\varepsilon \in \mathcal{L}^{++}(C; \mathcal{F}_N)$ для неубывающих функций $g \in V_1$.

Теорема 4. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности, $N \in \mathbb{N}$ и $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. Тогда*

$$\lambda_N^{++}(H^\omega; C) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

Более того, если функция $g \in V_1$ порождает наилучший линейный метод приближения класса H^{ω_N} пространством констант, то

$$\lambda_N^{++}(H^\omega; C) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{f \in H^\omega} \big\| f - A_g^\varepsilon f \big\|.$$

Объединяя теоремы 3 и 4, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Если $\alpha \in (0,1)$ и $N \in \mathbb{N}$, то*

$$\lambda_N^{++}(H^\alpha; C) = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2N^\alpha \Gamma\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

Еще одним следствием теорем 2 и 4 является следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда*

$$\lambda_2^{+}(H^\omega; C) = \lambda_2^{++}(H^\omega; C).$$

Перейдем к доказательству основных результатов.

3. Линейный одномерный поперечник класса $\widetilde{H}^\omega$. В этом пункте мы докажем теорему 1. Для этого необходимо показать справедливость равенств

$$\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega; \widetilde{C}\right) = \sup_{f \in \widetilde{H}^\omega} \left\| f - \int\limits_0^1 f(t)\, dt \right\| = 2 \int\limits_0^{1/2} \omega(t)\, dt. \tag{12}$$

Для $a, t \in [0,1]$ введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\varphi}_\omega(a;t) := \min\big\{\omega(|a-t|);\, \omega(|a-t+1|);\, \omega(|a-t-1|)\big\}.$$

Очевидно, что $\tilde{\varphi}_\omega(a;\cdot)$ принадлежит классу $\widetilde{H}^\omega$ для всех $a \in [0,1]$.

Начнем с доказательства справедливости второго знака равенства в (12).

Лемма 1. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда для $x \in [0,1]$*

$$\sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x)-\int\limits_0^1 f(t)\,dt\right| = 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt.$$

Доказательство. Действительно, пусть $x \in [0,1]$ и $f \in \widetilde{H}^\omega$. Тогда

$$\left|f(x)-\int\limits_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int\limits_0^1 |f(x)-f(t)|\,dt \le \int\limits_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,dt = 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt.$$

С другой стороны,

$$\sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x)-\int\limits_0^1 f(t)\,dt\right| \ge \sup_{a\in[0,1]}\left|\tilde{\varphi}_\omega(a;x)-\int\limits_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(a;t)\,dt\right| \ge$$

$$\ge \left|\tilde{\varphi}_\omega(x;x)-\int\limits_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\,dt\right| = 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt.$$

Лемма 1 доказана.

Теперь перейдем к доказательству справедливости первого знака равенства в (12). Для всех $\sigma \in V_1$ и $x \in [0,1]$ положим

$$\widetilde{M_\sigma}(x) := \sup_{f\in\widetilde{H}^\omega}\left|f(x)-\int\limits_0^1 f(t)\,d\sigma(t)\right|.$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда для всех функций $\sigma \in V_1$ существует такая точка $\tilde{x}_\sigma \in [0,1]$, что*

$$\widetilde{M_\sigma}\left(\tilde{x}_\sigma\right) \ge 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. что для всех $x \in [0,1]$

$$\widetilde{M_\sigma}\,(x) < 2\int\limits_0^{1/2}\omega(t)\,dt$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \widetilde{M}_\sigma(x)\, dx < 2\int_0^{1/2} \omega(t)\, dt. \tag{13}$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \widetilde{M}_\sigma(x)\, dx \geq \int_0^1 \sup_{a\in[0,1]} \left|\tilde{\varphi}_\omega(a;x) - \int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(a;t)\, d\sigma(t)\right| dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 \left|\int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\, d\sigma(t)\right| dx \geq \left|\int_0^1\int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\, d\sigma(t)\, dx\right|.$$

Применяя теорему Фубини (см., например, [2], § 36) и лемму 1, получаем

$$\int_0^1 \widetilde{M}_\sigma(x)\, dx \geq \left|\int_0^1\int_0^1 \tilde{\varphi}_\omega(x;t)\, dx\, d\sigma(t)\right| = 2\int_0^{1/2} \omega(t)\, dt.$$

Последнее неравенство противоречит неравенству (13).

Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Из леммы 2 и формулы (6) несложно видеть, что

$$\lambda_1\left(\widetilde{H}^\omega;\widetilde{C}\right) = \inf_{\sigma\in V_1}\sup_{x\in[0,1]} \widetilde{M}_\sigma(x) \geq \inf_{\sigma\in V_1} \widetilde{M}_\sigma(\tilde{x}_\sigma) \geq 2\int_0^{1/2} \omega(t)\, dt.$$

Объединяя последнее неравенство с леммой 1, устанавливаем справедливость первого равенства в (12). Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Линейный одномерный поперечник класса H^ω. В данном пункте мы докажем теорему 2. Для этого используем схему доказательства теоремы 1 с необходимыми изменениями для непериодического случая. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда существует такая неубывающая функция $g_\omega \in V_1$, что $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ для всех $t \in [0,1]$ и для всех $x \in [0,1]$ имеет место равенство*

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg_\omega(t) = \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t). \tag{14}$$

Утверждение леммы 3, по-видимому, известно. Однако автору неизвестны ссылки на соответствующий результат. Поэтому для полноты изложения приведем доказательство леммы 3, которое основано на следующем утверждении.

Лемма 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда существует такая неубывающая функция $g_n \in V_1$, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$*

$$\int\limits_0^1 \omega\left(\left|\frac{k}{n} - t\right|\right) dg_n(t) = \int\limits_0^1 \omega(t)\, dg_n(t). \tag{15}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай строго вогнутого модуля непрерывности ω. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим стандартный симплекс

$$\mathcal{P}_n = \big\{a = (a_0, \ldots, a_n) \colon a_0 + \ldots + a_n = 1, \quad a_j \geq 0,\, j = 0, \ldots, n\big\}.$$

С каждой точкой $a \in \mathcal{P}_n$ будем ассоциировать кусочно-постоянную функцию

$$z_a := \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_{(j/n, 1]} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2} \chi_{\{j/n\}} + a_n \chi_{\{1\}}, \tag{16}$$

где χ_E — характеристическая функция множества E. Покажем существование такой точки $a \in \mathcal{P}_n$, что для функции $g_n = z_a$ выполнены равенства (15).

Отметим, что для всех $a \in \mathcal{P}_n$ функция z_a не убывает на отрезке $[0, 1]$. Более того, для всех $x \in [0, 1]$

$$\int\limits_0^1 \omega(|x - t|)\, dz_a(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \omega\left(\left|x - \frac{j}{n}\right|\right). \tag{17}$$

Следовательно, функция z_a удовлетворяет равенствам (15) тогда и только тогда, когда для всех $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \omega\left(\frac{|k - j|}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \omega\left(\frac{j}{n}\right). \tag{18}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(a) := \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k \omega\left(\frac{|j - k|}{n}\right), \quad a \in \mathcal{P}_n.$$

Обозначим через Ω_n множество всех точек $b \in \mathcal{P}_n$, для которых

$$\mathcal{F}(b) = \max_{a \in \mathcal{P}_n} \mathcal{F}(a).$$

Очевидно, что $\Omega_n \neq \varnothing$. Докажем, что множество Ω_n содержит только точки с положительными координатами. Действительно, выберем произвольную точку $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \Omega_n$ и предположим противное: $b_0 = 0$. Через $s \in \mathbb{N}$, $s \leq n$, обозначим индекс, для которого $b_0 = b_1 = \ldots = b_{s-1} = 0$ и $b_s > 0$. Тогда для всех $\varepsilon \in (0, b_s)$ точка

$$b^{\varepsilon} := (\varepsilon, 0, \ldots, b_s - \varepsilon, b_{s+1}, \ldots, b_n)$$

принадлежит множеству $\mathcal{P}_n$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\mathcal{G}(\varepsilon) := \mathcal{F}(b^\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, b_s)$. Несложно видеть, что

$$\mathcal{G}'(\varepsilon) = 2\left\{-2\varepsilon\omega\left(\frac{s}{n}\right) + \sum_{k=s}^{n} b_k\left[\omega\left(\frac{k}{n}\right) - \omega\left(\frac{k-s}{n}\right)\right]\right\} \geq$$

$$\geq 2\omega\left(\frac{s}{n}\right)(b_s - 2\varepsilon).$$

Поэтому $\mathcal{G}'(0) > 0$ и $\mathcal{F}(b^\varepsilon) > \mathcal{F}(b)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Последнее противоречит выбору точки b. Таким образом, $b_0 > 0$. Аналогично можно показать, что $b_n > 0$.

Далее предположим, что $b_s = 0$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq n-1$. Пусть s_1 и s_2 — ближайшие к s слева и справа точки, для которых $b_{s_1} > 0$ и $b_{s_2} > 0$. Положим

$$p = \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} \qquad \text{и} \qquad q = \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}.$$

Для каждого $\varepsilon \in \big(0, \min\{p^{-1}b_{s_1}; q^{-1}b_{s_2}\}\big)$ рассмотрим точку

$$b^\varepsilon := \big(b_0, \ldots, b_{s_1-1}, b_{s_1} - p\varepsilon, 0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots, 0, b_{s_2} - q\varepsilon, b_{s_2+1}, \ldots, b_n\big)$$

с координатой ε на позиции с индексом s. Очевидно, что $b^\varepsilon \in \mathcal{P}_n$.

Из строгой вогнутости модуля непрерывности ω следует, что для всех $j = 0, 1, \ldots, s_1$

$$\omega\left(\frac{s-j}{n}\right) > p\,\omega\left(\frac{s_1-j}{n}\right) + q\,\omega\left(\frac{s_2-j}{n}\right) \tag{19}$$

и для всех $j = s_2, s_2+1, \ldots, n$

$$\omega\left(\frac{j-s}{n}\right) > p\,\omega\left(\frac{j-s_1}{n}\right) + q\,\omega\left(\frac{j-s_2}{n}\right). \tag{20}$$

Рассмотрим функцию $\mathcal{G}(\varepsilon) := \mathcal{F}(b^\varepsilon)$, $\varepsilon \in \big(0, \min\{p^{-1}b_{s_1}; q^{-1}b_{s_2}\}\big)$. Очевидно, что

$$\mathcal{G}'(\varepsilon) = 2\sum_{j=0}^{n} b_j^\varepsilon\left[\omega\left(\frac{|s-j|}{n}\right) - p\omega\left(\frac{|s_1-j|}{n}\right) - q\omega\left(\frac{|s_2-j|}{n}\right)\right].$$

Применяя неравенства (19) и (20), получаем

$$\mathcal{G}'(0) = 2\left\{\sum_{j=0}^{s_1} b_j\left[\omega\left(\frac{s-j}{n}\right) - p\omega\left(\frac{s_1-j}{n}\right) - q\omega\left(\frac{s_2-j}{n}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=s_2}^{n} b_j\left[\omega\left(\frac{j-s}{n}\right) - p\omega\left(\frac{j-s_1}{n}\right) - q\omega\left(\frac{j-s_2}{n}\right)\right]\right\} \geq$$

$$\geq 2b_{s_1}\left[\omega\left(\frac{s-s_1}{n}\right) - q\omega\left(\frac{s_2-s_1}{n}\right)\right] +$$

$$+2b_{s_2}\left[\omega\left(\frac{s_2-s}{n}\right)-p\omega\left(\frac{s_2-s_1}{n}\right)\right]>0.$$

Следовательно, $\mathcal{F}(b^\varepsilon)>\mathcal{F}(b)$ для любого достаточно малого $\varepsilon>0$. Последнее противоречит выбору точки b.

Таким образом, множество Ω_n содержит только точки с положительными координатами. Пусть $b\in\Omega_n$ — произвольная фиксированная точка. Отметим, что функция $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируема на своей области определения и в точке b достигает своего максимума на множестве $\mathcal{P}_n$. Несложно видеть, что имеют место условия принципа множителей Лагранжа. Согласно этому принципу существует такой множитель λ, $\lambda\neq0$, что функция

$$\mathcal{L}(a):=\mathcal{F}(a)+\lambda\left(\sum_{j=0}^n a_j-1\right),\quad a\in\mathcal{P}_n,$$

удовлетворяет условиям стационарности в точке $a=b$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_k}(b)=2\sum_{j=0}^n b_j\omega\left(\frac{|k-j|}{n}\right)+\lambda=0,\quad k=0,1,\ldots,n.$$

Последние соотношения влекут равенства (18) для точки b.

Теперь рассмотрим случай произвольного вогнутого модуля непрерывности ω. Для каждого $m\in\mathbb{N}$ положим

$$\omega_m(t):=\omega(t)+\frac{\sqrt{t}}{m},\quad t\in[0,1].$$

Очевидно, что ω_m — строго вогнутый модуль непрерывности. Выше было доказано, что существует точка $b^m\in\mathcal{P}_n$ такая, что

$$\sum_{j=0}^n b_j^m\omega_m\left(\frac{|k-j|}{n}\right)=\sum_{j=0}^n b_j^m\omega_m\left(\frac{j}{n}\right),\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{21}$$

Поскольку множество $\mathcal{P}_n$ компактно, то без уменьшения общности можно предположить, что последовательность $\{b^m\}_{m=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $b\in\mathcal{P}_n$. Устремляя m к бесконечности в равенствах (21), получаем

$$\sum_{j=0}^n b_j\omega\left(\frac{|k-j|}{n}\right)=\sum_{j=0}^n b_j\omega\left(\frac{j}{n}\right),\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Лемма 4 доказана.

***Доказательство леммы* 3.** В силу леммы 4 для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует неубывающая функция $g_n\in V_1$, удовлетворяющая равенствам (15). Рассмотрим последовательность функций $\{g_n\}_{n=1}^\infty$. Отметим, что для всех $n\in\mathbb{N}$ $g_n\in V_1$ и g_n не убывает на отрезке $[0,1]$. Следовательно, в силу теоремы Хелли (см. [2]) существует подпоследовательность $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, которая поточечно сходится к функции $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$. Более того, $g\in V_1$, g не убывает на отрезке $[0,1]$ и для всех $f\in C$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^1 f(t)\,dg_{n_k}(t)=\int\limits_0^1 f(t)\,dg(t).$$

В частности, для всех $x \in [0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg_{n_k}(t) = \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t).$$

Из последнего соотношения видно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для всех $k > N$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg_{n_k}(t) - \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) \right| < \varepsilon. \tag{22}$$

Теперь для всех $k > N$ рассмотрим функцию

$$T_k(x) := \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg_{n_k}(t), \quad x \in [0,1].$$

Ясно, что T_k принадлежит классу H^ω. Также в силу выбора последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ функция T_k принимает равные значения в точках $\dfrac{j}{n_k}$, $j = 0, 1, \ldots, n_k$. Применяя эти замечания к неравенству (22), получаем

$$\left| \int\limits_0^1 \omega(t)\, dg_{n_k}(t) - \int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) \right| \le \varepsilon + \omega\left(\frac{1}{2n_k}\right).$$

Следовательно, для всех $x \in [0,1]$

$$\int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^1 \omega(t)\, dg_{n_k}(t) = \int\limits_0^1 \omega(t)\, dg(t). \tag{23}$$

Наконец, отметим, что если $\tilde{g}(t) = 1 - g(1-t)$, $t \in [0,1]$, то

$$\int\limits_0^1 \omega(|x-t|)\, d\tilde{g}(t) = \int\limits_0^1 \omega(|1-x-t|)\, dg(t) = \int\limits_0^1 \omega(t)\, dg(t) =$$

$$= \int\limits_0^1 \omega(1-t)\, dg(t) = \int\limits_0^1 \omega(t)\, d\tilde{g}(t).$$

Таким образом, функция

$$g_\omega(t) := \frac{g(t) + \tilde{g}(t)}{2}, \quad t \in [0,1],$$

принадлежит множеству V_1, не убывает на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет равенству (14). Кроме того, равенство $g_\omega(t) + g_\omega(1-t) = 1$ выполнено для всех $t \in [0,1]$.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\omega(a;t) := \omega(|a-t|), \quad a,t \in [0,1].$$

Несложно видеть, что $\varphi_\omega(a;\cdot) \in H^\omega$ и $\varphi_\omega(a;a) = 0$ для всех $a \in [0,1]$.

Лемма 5. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда для $x \in [0,1]$*

$$\sup_{f\in H^\omega} \left| f(x) - \int_0^1 f(t)\, dg_\omega(t) \right| = \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t), \tag{24}$$

где функция g_ω определена в лемме 3.

Доказательство. Действительно, пусть $x \in [0,1]$ и $f \in H^\omega$. Из определения функции $g_\omega \in V_1$ получаем

$$\left| f(x) - \int_0^1 f(t)\, dg_\omega(t) \right| = \left| \int_0^1 [f(x) - f(t)]\, dg_\omega(t) \right| \le$$

$$\le \int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg_\omega(t) = \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t).$$

С другой стороны,

$$\sup_{f\in H^\omega} \left| f(x) - \int_0^1 f(t)\, dg_\omega(t) \right| \ge \sup_{a\in[0,1]} \left| \varphi_\omega(a;x) - \int_0^1 \varphi_\omega(a;t)\, dg_\omega(t) \right| \ge$$

$$\ge \left| \int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\, dg_\omega(t) \right| = \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t).$$

Лемма 5 доказана.

Для всех функций $\sigma \in V_1$ и точек $x \in [0,1]$ положим

$$M_\sigma(x) := \sup_{f\in H^\omega} \left| f(x) - \int_0^1 f(t)\, d\sigma(t) \right|.$$

Лемма 6. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности. Тогда для всех $\sigma \in V_1$ существует такая точка $x_\sigma \in [0,1]$, что*

$$M_\sigma(x_\sigma) \ge \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t).$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. что для всех $x \in [0,1]$

$$M_\sigma(x) < \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t).$$

Тогда

$$\int_0^1 M_\sigma(x)\, dg_\omega(x) < \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t). \tag{25}$$

С другой стороны, применяя теорему Фубини и лемму 3, получаем

$$\int_0^1 M_\sigma(x)\, dg_\omega(x) \geq \int_0^1 \sup_{a\in[0,1]} \left|\varphi_\omega(a;x) - \int_0^1 \varphi_\omega(a;t)\, d\sigma(t)\right| dg_\omega(x) \geq$$

$$\geq \int_0^1 \left|\int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\, d\sigma(t)\right| dg_\omega(x) \geq$$

$$\geq \left|\int_0^1 \int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\, d\sigma(t) dg_\omega(x)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \int_0^1 \varphi_\omega(x;t)\, dg_\omega(x) d\sigma(t)\right| = \int_0^1 \omega(x)\, dg_\omega(x).$$

Последнее противоречит неравенству (25).

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Объединяя лемму 6 с формулой (6), имеем

$$\lambda_1(H^\omega; C) = \inf_{\sigma\in V_1} \sup_{x\in[0,1]} M_\sigma(x) \geq \inf_{\sigma\in V_1} M_\sigma\left(x_\sigma\right) \geq \int_0^1 \omega(t)\, dg_\omega(t).$$

Теорема 2 доказана.

***Доказательство предложения* 1.** Предположим, что существуют функция $g \in V_1$ и действительное число λ такие, что для всех $x \in [0,1]$ выполнено равенство (8), т. е.

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) = \lambda.$$

Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t)\, dg_\omega(x) = \lambda,$$

где функция g_ω определена в лемме 3. Применяя теорему Фубини и теорему 2, можно доказать, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t)\, dg_\omega(x) = \int_0^1 \int_0^1 \omega(|t-x|)\, dg_\omega(x)\, dg(t) = \lambda_1(H^\omega; C).$$

Поэтому $\lambda = \lambda_1(H^\omega; C)$, что и требовалось доказать.

5. Линейный одномерный поперечник классов Гельдера. Докажем в данном пункте теорему 3, т. е. найдем точное значение поперечника $\lambda_1 (H^\alpha; C)$, $\alpha \in (0,1)$, и явно построим функцию, порождающую наилучший линейный метод приближения класса H^α пространством констант.

***Доказательство теоремы* 3.** Покажем, что функция g, определенная в (10), порождает наилучший линейный метод приближения класса H^α пространством констант. Сначала отметим, что $g \in V_1$ и $g(x) + g(1-x) = 1$ для всех $x \in [0,1]$. Далее, чтобы показать, что функция g удовлетворяет равенствам (7), для всех $x \in [0,1]$ положим

$$I(x) := \int\limits_0^1 |x-t|^\alpha \, dg(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^1 \frac{|x-t|^\alpha \, dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}}.$$

Покажем, что функция I постоянна. Действительно, для всех $x \in (0,1)$

$$I'(x) = \frac{\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} \, dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}} - \int\limits_x^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1} \, dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}} \right).$$

Подставляя $t = \dfrac{x(1-u)}{1-xu}$ в первый интеграл и $t = \dfrac{x}{1-(1-x)u}$ во второй, получаем

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} \, dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}} = \sqrt{x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}} \int\limits_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha/2-1/2} \, du,$$

$$\int\limits_x^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1} \, dt}{t^{1/2+\alpha/2}(1-t)^{1/2+\alpha/2}} = \sqrt{x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}} \int\limits_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha/2-1/2} \, du.$$

Таким образом, $I'(x) = 0$. Следовательно, в силу теоремы 2 функция g порождает наилучший линейный метод приближения класса H^α пространством констант. Кроме того,

$$\lambda_1 (H^\alpha; C) = \int\limits_0^1 t^\alpha \, dg(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^1 \frac{t^{\alpha/2-1/2} \, dt}{(1-t)^{1/2+\alpha/2}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$$

Теорема 3 доказана.

6. Наилучший линейный положительный метод приближения класса H^ω. Перейдем к доказательству теоремы 4. Сначала приведем две вспомогательные леммы.

Лемма 7. *Пусть* ω *— вогнутый модуль непрерывности,* $N \in \mathbb{N}$ *и* $\omega_N(t) = \omega(t/N)$, $t \in [0,1]$. *Пусть также* $m \in \mathbb{N}$ *и* $\{[\alpha_j, \beta_j]\}_{j=1}^m$ *— произвольная система непересекающихся отрезков, содержащихся на отрезке* $[0,1]$, *суммарной длины* $1/N$. *Тогда существует неубывающая функция* $g \in V_1$, *для которой*

$$\bigvee_0^1 g = \sum_{j=1}^m \bigvee_{\alpha_j}^{\beta_j} g, \tag{26}$$

и для всех $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\, dg(t) \ge \lambda_1(H^{\omega_N}; C). \tag{27}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 существует неубывающая функция $\overline{g} \in V_1$ такая, что для всех $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \omega_N(|x-t|)\, d\,\overline{g}(t) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

Введя в рассмотрение функцию

$$\overline{g}_N(x) := \begin{cases} \overline{g}\,(Nx)\,, & x \in [0, 1/N]\,, \\ 1, & x \in [1/N, 1]\,, \end{cases}$$

последнее соотношение запишем в виде

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\, d\overline{g}_N(t) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C), \quad x \in [0, 1/N]. \tag{28}$$

Более того, для всех $x \in (1/N, 1]$

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\, d\overline{g}_N(t) = \int_0^{1/N} \omega(|x-t|)\, d\overline{g}_N(t) \ge$$

$$\ge \int_0^{1/N} \omega(|1/N-t|)\, d\overline{g}_N(t) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

Далее, положим $\beta_0 = 0$, $\alpha_{m+1} = 1$, и пусть набор чисел $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m = 1/N$ таков, что $\gamma_k - \gamma_{k-1} = \beta_k - \alpha_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Определим функцию g следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} \overline{g}_N\,(x - \alpha_k + \gamma_{k-1})\,, & x \in [\alpha_k, \beta_k]\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \\ \overline{g}_N\,(\gamma_k)\,, & x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}]\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Докажем, что функция g является требуемой. Действительно, в силу построения функция g не убывает, принадлежит V_1 и удовлетворяет равенству (26). Для доказательства неравенства (27) предположим сначала, что $x \in [\alpha_r, \beta_r]$ для некоторого $r = 1, 2, \ldots, m$, и рассмотрим $y = x - \alpha_r + \gamma_{r-1}$. Тогда для всех $u \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k]\,$, $k = 1, 2, \ldots, r-1$, будем иметь

$$y \ge \gamma_{r-1} \ge \gamma_k \ge u,$$

$$\alpha_r - \alpha_k \ge \sum_{j=k}^{r-1} (\beta_j - \alpha_j) = \gamma_{r-1} - \gamma_{k-1},$$

и, следовательно,
$$(y+\alpha_r-\gamma_{r-1})-(u+\alpha_k-\gamma_{k-1})\ge y-u\ge 0.$$
Аналогично, для всех $u\in[\gamma_{k-1},\gamma_k]$, $k=r+1,\ldots,m$,
$$y\le\gamma_r\le\gamma_{k-1}\le u,$$
$$\alpha_r-\alpha_k\le-\sum_{j=r}^{k-1}(\beta_j-\alpha_j)=\gamma_{r-1}-\gamma_{k-1},$$
и, как результат,
$$(y+\alpha_r-\gamma_{r-1})-(u+\alpha_k-\gamma_{k-1})\le y-u\le 0.$$

Таким образом,
$$\int\limits_0^1\omega(|x-t|)\,dg(t)=\sum_{k=1}^m\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\omega(|x-t|)\,d\overline{g}_N\,(t-\alpha_k+\gamma_{k-1})=$$
$$=\sum_{k=1}^m\int\limits_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k}\omega\left(|(y-\gamma_{r-1}+\alpha_r)-(u+\alpha_k-\gamma_{k-1})|\right)\,d\overline{g}_N\,(u)\ge$$
$$\ge\sum_{k=1}^m\int\limits_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k}\omega(|y-u|)\,d\overline{g}_N(u)=\int\limits_0^1\omega(|y-u|)\,d\overline{g}_N(u)\ge$$
$$\ge\lambda_1(H^{\omega_N};C),$$
что доказывает неравенство (27) для всех $x\in[\alpha_r,\beta_r]$, $r=1,2,\ldots,m$.

Для остальных точек $x\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{j=1}^m[\alpha_j,\beta_j]$ неравенство (27) может быть доказано аналогичным образом. Следовательно, функция g удовлетворяет (26) и (27).

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть ω — вогнутый модуль непрерывности, $N\in\mathbb{N}$ и $\omega_N(t)=\omega(t/N)$, $t\in$ $\in[0,1]$. Тогда для каждой неубывающей функции $g\in V_1$ мера Лебега точек $x\in[0,1]$, для которых*
$$\int\limits_0^1\omega(|x-t|)\,dg(t)<\lambda_1(H^{\omega_N};C),$$
не превышает $1/N$.

Доказательство. Пусть $g\in V_1$ не убывает. Для $x\in[0,1]$ положим
$$M_g(x):=\int\limits_0^1\omega(|x-t|)\,dg(t).$$
Очевидно, что функция M_g непрерывна. Отсюда следует, что множество

$$V = \{x \in [0,1] \colon M_g(x) < \lambda_1(H^{\omega_N}; C)\}$$

открыто. Предположим противное, т. е. что $\mu V > 1/N$. Тогда существует подмножество $U \subset V$, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, \ldots, m$ и $m \in \mathbb{N}$, суммарной длины $\mu U = 1/N$. Согласно лемме 7 существует неубывающая функция $\widetilde{g} \in V_1$ такая, что

$$\bigvee_0^1 \widetilde{g} = \sum_{j=1}^m \bigvee_{\alpha_j}^{\beta_j} \widetilde{g},$$

и для всех $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \omega(|x-t|)\, d\widetilde{g}(t) \geq \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

Далее по теореме Фубини

$$\int_0^1 M_g(x)\, d\widetilde{g}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \omega(|x-t|)\, d\widetilde{g}(x)\, dg(t) \geq \lambda_1(H^{\omega_N}; C) \int_0^1 dg(t) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

С другой стороны, по предположению $M_g(x) < \lambda_1(H^{\omega_N}; C)$ для всех $x \in U$. Следовательно,

$$\int_0^1 M_g(x)\, d\widetilde{g}(x) = \int_U M_g(x)\, d\widetilde{g}(x) < \lambda_1(H^{\omega_N}; C) \int_U d\widetilde{g}(x) = \lambda_1(H^{\omega_N}; C).$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

***Доказательство теоремы* 4.** Пусть $F \in L_N$ и $A \in \mathcal{L}^{++}(C; F)$ — произвольный оператор, для которого $\sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\| < \infty$. Согласно определению существуют неубывающие функции $e_1, e_2, \ldots, e_N \in C$ и положительные линейные ограниченные функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ на C такие, что

$$Af = \sum_{k=1}^N \varphi_k(f) \cdot e_k, \quad f \in C.$$

Известно (см. [3], § 2.1), что каждый линейный ограниченный положительный оператор $\varphi_k \colon C \to \mathbb{R}$ представим в виде

$$\varphi_k(f) = \int_0^1 f(t)\, dg_k(t)$$

с неубывающей функцией $g_k \in V$. Без ограничения общности будем считать, что $g_k \in V_1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, для всех $f \in C$ и $x \in [0,1]$

$$Af(x) = \sum_{k=1}^N e_k(x) \int_0^1 f(t)\, dg_k(t).$$

Поскольку класс H^ω содержит пространство констант и $\sup_{f \in H^\omega} \|f - Af\| < \infty$, то $e_1 + e_2 + \ldots + e_N = 1$.

Теперь для всех $x \in [0,1]$ рассмотрим функцию $\varphi_\omega(x;t) := \omega(|x-t|)$, $t \in [0,1]$. Очевидно, что $\omega(|x-\cdot|) \in H^\omega$ и, следовательно,

$$\sup_{f\in H^\omega} \|f - Af\| \geq \sup_{x\in[0,1]} \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_\omega(x;t) - (A\varphi_\omega(x;\cdot))(t)| \geq \sup_{x\in[0,1]} \left(A\varphi_\omega(x;\cdot)\right)(x).$$

Для всех $k = 1,2,\ldots,N$ и $\varepsilon > 0$ из леммы 7 получаем

$$\mu\left\{x \in [0,1]\colon \int\limits_0^1 \varphi_\omega(x;t)\,dg_k(t) < \lambda_1(H^{\omega_N};C) - \varepsilon\right\} < \frac{1}{N}.$$

Поэтому существует точка $x_\varepsilon \in [0,1]$, для которой

$$\int\limits_0^1 \varphi_\omega(x_\varepsilon;t)\,dg_k(t) \geq \lambda_1(H^{\omega_N};C) - \varepsilon$$

при всех $k = 1,2,\ldots,N$. Следовательно,

$$\left(A\varphi_\omega\left(x_\varepsilon;\cdot\right)\right)\left(x_\varepsilon\right) \geq \left(\lambda_1(H^{\omega_N};C) - \varepsilon\right)\sum_{k=1}^N e_k\left(x_\varepsilon\right) = \lambda_1(H^{\omega_N};C) - \varepsilon.$$

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\sup_{f\in H^\omega} \|f - Af\|_C \geq \left(A\varphi_\omega(\bar{x};\cdot)\right)(\bar{x}) \geq \lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Таким образом,

$$\lambda_N^{++}(H^\omega;C) = \inf_{F\in L_N} \inf_{A\in\mathcal{L}^{++}(C;F)} \sup_{f\in H^\omega} \|f - Af\| \geq \lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Остается доказать, что $\lambda_N^{++}(H^\omega;C) \leq \lambda_1(H^{\omega_N};C)$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2N)$ и функция $g \in V_1$ порождает наилучший линейный метод приближения класса H^{ω_N} пространством констант. Пусть также набор неотрицательных непрерывных функций $\chi_1^\varepsilon, \chi_2^\varepsilon, \ldots, \chi_N^\varepsilon$ имеет следующие свойства:

1) $\chi_k^\varepsilon(t) = 1$, $t \in \left[(k-1)/N + \varepsilon, k/N - \varepsilon\right]$, для всех $k = 1,2,\ldots,N$;

2) $\operatorname{supp}\chi_k^\varepsilon \subset \left[(k-1)/N - \varepsilon, k/N + \varepsilon\right]$ для всех $k = 1,2,\ldots,N$;

3) $\chi_1^\varepsilon(t) + \chi_2^\varepsilon(t) + \ldots + \chi_N^\varepsilon(t) = 1$ для всех $t \in [0,1]$.

Тогда для оператора A_g^ε, определенного в (11), получаем

$$\lambda_N^{++}(H^\omega;C) \leq \sup_{f\in H^\omega} \left\|f - A_g^\varepsilon f\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^N \sup_{x\in[0,1]} \sup_{f\in H^\omega} \chi_k^\varepsilon(x) \left| f(x) - \int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,dg(Nt-k+1) \right|. \qquad (29)$$

Покажем, что для всех $k = 1,2,\ldots,N$, $f \in H^\omega$ и $x \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$\chi_k^\varepsilon(x)\left|f(x)-\int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,dg(Nt-k+1)\right|\le \chi_k^\varepsilon(x)\left(\omega(\varepsilon)+\lambda_1(H^{\omega_N};C)\right). \tag{30}$$

Действительно, пусть $k\in\{1,2,\ldots,N\}$. Рассмотрим отрезки $I_k=[(k-1)/N,k/N]$ и $I_k^\varepsilon=$ $=[0,1]\cap[(k-1)/N-\varepsilon,k/N+\varepsilon]$. Поскольку supp $\chi_k^\varepsilon\subset I_k^\varepsilon$, достаточно проверить выполнение неравенства (30) для $x\in I_k^\varepsilon$.

Вначале, для всех $x\in I_k$ полагая $y=Nx-k+1$ и определяя функцию $z(y)=f(x)$, получаем

$$\left|f(x)-\int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,dg(Nt-k+1)\right|=\left|z(y)-\int\limits_0^1 z(u)\,dg(u)\right|.$$

Ясно, что $z\in H^{\omega_N}$, так как $f\in H^\omega$. Сопоставив данный факт с определением функции g и теоремой 2, будем иметь

$$\left|f(x)-\int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,dg(Nt-k+1)\right|\le\lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Последнее неравенство и неотрицательность функции χ_k^ε влекут выполнение неравенства (30) для всех $x\in I_k$.

Далее, если $x\in(k/N,k/N+\varepsilon]$, то

$$\left|f(x)-\int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,dg(Nt-k+1)\right|\le$$

$$\le\omega(\varepsilon)+\left|f(k/N)-\int\limits_{(k-1)/N}^{k/N} f(t)\,dg(Nt-k+1)\right|\le$$

$$\le\omega(\varepsilon)+\lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Используя подобные рассуждения, получаем такую же оценку сверху для $x\in\big[(k-1)/N-\varepsilon,$ $(k-1)/N\big)$. Следовательно, неравенство (30) доказано.

Наконец, объединяя неравенства (29) и (30), имеем

$$\lambda_N^{++}(H^\omega;C)\le\left(\omega(\varepsilon)+\lambda_1(H^{\omega_N};C)\right)\sum_{k=1}^N\chi_k^\varepsilon=\omega(\varepsilon)+\lambda_1(H^{\omega_N};C).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, из последнего неравенства получаем $\lambda_N^{++}(H^\omega;C)\le\lambda_1(H^{\omega_N};C)$.

Теорема 4 доказана.

***Доказательство следствия* 2.** Рассмотрим произвольное двумерное многообразие F пространства C и произвольный оператор $A\in\mathcal{L}^+(C;F)$, для которого величина $\sup_{f\in H^\omega}\|f-Af\|$ конечна. Очевидно, что F содержит пространство констант и $Ae=e$, где $e(x)=1$ для всех $x\in[0,1]$. Поэтому в силу ограниченности оператора A конус

$$F^{+} = \{Af : f \in C \text{ и } f \text{ неотрицательна}\}$$

является телесным конусом (см. [3], § 2) в многообразии F. Известно, что каждый конус в двумерном пространстве является миниэдральным (см., например, [3], § 6.1). Следовательно, согласно теореме 6.7 в [3], существуют неубывающие функции $e_1, e_2 \in C$ такие, что

$$F^{+} = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 : \lambda_1 \geq 0 \text{ и } \lambda_2 \geq 0\}.$$

Таким образом, оператор A представим в виде суммы

$$Af = \varphi_1(f)e_1 + \varphi_2(f)e_2,$$

где φ_1, φ_2 — линейные ограниченные положительные функционалы на C. Это значит, что $A \in \mathcal{L}^{++}(C; F)$ и, как следствие, $\lambda_2^{+}(H^{\omega}; C) = \lambda_2^{++}(H^{\omega}; C)$.

Следствие доказано.

Автор выражает благодарность профессору Владиславу Федоровичу Бабенко за интерес к данной работе и ценные обсуждения.

1. *Григорян Ю. И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 637 – 646.
2. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
3. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. – М.: Наука, 1985.
4. *Корнейчук Н. П.* Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 6. – С. 1218 – 1220.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **5**, № 1. – С. 93 – 124.
6. *Корнейчук Н. П.* О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения // Успехи мат наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 9 – 42.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976.
8. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987.
10. *Корнейчук Н. П.* О линейных поперечниках классов H^{ω} // Укр. мат журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1255 – 1264.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: специальные функции. Дополнительные главы. – М.: Физматлит, 2003.
12. *Рубан В. И.* Четные поперечники классов $W^{(r)}H_{\omega}$ в пространстве $C_{2\pi}$ // Мат. заметки. – 1974. – **15**, № 3. – С. 387 – 392.
13. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
14. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976.

Получено 02.09.14