УДК 512.544

О. О. Пипка (Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО ЗВ'ЯЗКИ МІЖ ЦЕНТРАЛЬНИМИ РЯДАМИ В ДЕЯКИХ ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННИХ ГРУПАХ

It is proved that the class of locally finite divisible-by-bounded groups is both a Schur class and a Baer class.

Доказано, что класс локально конечных групп, каждая из которых является расширением делимой группы с помощью ограниченной, является классом Шура и классом Бэра.

1. Вступ. Нехай G — група. Нагадаємо, що *верхнім центральним рядом* групи G називається ряд

$$\langle 1\rangle = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \zeta_2(G) \leq \ldots \zeta_\alpha(G) \leq \zeta_{\alpha+1}(G) \leq \ldots \zeta_\gamma(G),$$

де $\zeta_1(G) = \zeta(G)$ — центр групи G, $\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G) = \zeta(G/\zeta_\alpha(G))$ для кожного порядкового числа α, та $\zeta_\lambda(G) = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(G)$ для кожного граничного порядкового числа λ.

Нижнім центральним рядом групи G називається ряд

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \gamma_\alpha(G) \geq \gamma_{\alpha+1}(G) \geq \ldots \gamma_\delta(G),$$

де $\gamma_2(G) = [G, G]$ – комутант групи G, $\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$ для кожного порядкового числа α, та $\gamma_\lambda(G) = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(G)$ для кожного граничного порядкового числа λ.

Між верхнім та нижнім центральними рядами існує досить сильний та щільний зв'язок. Наприклад, якщо G — нільпотентна група, то існує таке натуральне число k, що $G = \zeta_k(G)$, що тягне за собою рівність $\gamma_{k+1}(G) = \langle 1\rangle$.

Одним із найбільш цікавих та корисних результатів в теорії нескінченних груп є така теорема.

Теорема 1. *Нехай C — підгрупа центра $\zeta(G)$ групи G. Якщо фактор-група G/C скінченна, то скінченною буде і підгрупа $[G, G]$.*

Цей результат було доведено в роботах Б. Неймана [12] та Р. Бера [2], проте багато алгебраїстів знають цю теорему як *теорему Шура*. Це непорозуміння має досить цікаву історію і пов'язане з деякими огріхами при цитуванні першоджерел.

У зв'язку з цим результатом природно постає таке питання: *для яких класів груп $\mathfrak{X}$ включення $G/\zeta(G) \in \mathfrak{X}$ завжди тягне за собою включення $[G, G] \in \mathfrak{X}$?* Клас груп $\mathfrak{X}$, що задовольняє таку умову, називається *класом Шура* [6]. Як ми бачимо, теорема Шура стверджує, що клас всіх скінченних груп є класом Шура.

Р. Бер в роботі [2] отримав наступне узагальнення теореми Шура.

Теорема 2. *Якщо фактор-група $G/\zeta_k(G)$ скінченна, то скінченною буде і підгрупа $\gamma_{k+1}(G)$.*

У зв'язку з цим результатом ми можемо визначити таке поняття. Клас груп $\mathfrak{X}$ називається *класом Бера*, якщо з того, що $G/\zeta_k(G) \in \mathfrak{X}$ для деякого натурального числа k, випливає, що $\gamma_{k+1}(G) \in \mathfrak{X}$ [9]. Очевидно, теорема Бера показує, що клас всіх скінченних груп є класом Бера. Зазначимо також, що кожен клас Бера є водночас і класом Шура. З означення випливає, що обернене твердження в загальному випадку може і не виконуватись. На жаль, до цього часу ще не було знайдено жодного відповідного прикладу класу Шура, який би не був класом Бера.

Деякі інші приклади класів Шура та Бера можна знайти, наприклад, у статтях [3 – 6, 8, 10, 13]. Також зазначимо, що дана тематика є актуальною не лише для груп. Аналогічні дослідження проводяться в алгебрах Лі, алгебрах Лейбніца, кільцях Лі та модулях. Це наштовхує на думку, що цей ланцюг можна продовжити й іншими алгебраїчними структурами.

Нагадаємо, що група G *обмежена* або *має скінченну експоненту* b, якщо $g^b = 1$ для кожного елемента g групи G, а число b є найменшим натуральним числом з цією властивістю.

Також нагадаємо, що групу G називають *подільною*, якщо для кожного елемента g групи G та кожного цілого числа n рівняння $x^n = g$ завжди має розв'язок у групі G. Іншими словами, група G подільна, якщо для кожного цілого числа n виконується рівність $G^n = G$.

Відомо, що клас локально скінченних груп скінченної експоненти є класом Шура [11] та класом Бера [9]. Більш того, клас локально скінченних груп, в яких силовські p-підгрупи мають скінченну експоненту, є класом Шура та класом Бера [13].

Одним із шляхів продовження подібних досліджень є розгляд класу локально скінченних груп, кожна з яких є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої, тобто таких локально скінченних груп, що містять нормальну подільну підгрупу D, для якої фактор-група G/D є обмеженою.

Цей клас груп з'являється при вивченні різних питань теорії нескінченних груп, особливо теорії нескінченних абелевих груп, що ілюструє наступний результат.

Теорема 3 (див., наприклад, [7], теорему 100.1)**.** *Періодична група T є прямою сумою подільної та обмеженої груп тоді і тільки тоді, коли кожна мішана група з періодичною частиною T розщеплюється.*

Основною метою даної статті є доведення того факту, що клас локально скінченних груп, кожна з яких є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої, є класом Шура і класом Бера. Більш конкретно, будуть доведені такі теореми.

Теорема A. *Припустимо, що група G має ряд таких нормальних підгруп $G \geq D \geq \zeta(G)$, що $G/\zeta(G)$ локально скінченна, $D/\zeta(G)$ подільна та абелева, а G/D обмежена. Тоді $[G, G]$ також локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.*

Теорема B. *Припустимо, що група G має ряд таких нормальних підгруп $G \geq D \geq \zeta_k(G)$, що $G/\zeta_k(G)$ локально скінченна, $D/\zeta_k(G)$ подільна та абелева, а G/D обмежена. Тоді підгрупа $\gamma_{k+1}(G)$ також локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.*

2. Доведення теореми A.

Лема 1. *Припустимо, що фактор-група $G/\zeta(G)$ локально скінченна, подільна та абелева. Тоді G абелева.*

Доведення. Для кожного елемента a групи G визначимо відображення $\xi_a \colon G \to G$ за правилом $\xi_a(x) = [x, a]$. Розглянемо $\xi_a(xy)$:

$$\xi_a(xy) = [xy, a] = [x, a]^y [y, a] = [x, a][y, a] = \xi_a(x)\xi_a(y),$$

оскільки $[x, a] \in \zeta(G)$. Це означає, що $\xi_a(x)$ — епіморфізм групи G. Більш того,

$$\operatorname{Im}(\xi_a) = [G, a], \qquad \operatorname{Ker}(\xi_a) = C_G(a).$$

Тоді за теоремою про епіморфізми

$$[G, a] = \operatorname{Im}(\xi_a) \cong G/\operatorname{Ker}(\xi_a) = G/C_G(a).$$

Очевидно, що $\zeta(G) \leq C_G(a)$, звідки випливає включення $G/C_G(a) \leq G/\zeta(G)$. Якщо $C_G(a) \neq G$, то фактор-група $G/C_G(a)$ є нетривіальною подільною абелевою групою. Розглянемо

$$[x, a^2] = [x, aa] = [x, a][x, a]^a = [x, a][x, a] = [x, a]^2.$$

За індукцією по n ми можемо отримати, що $[x, a^n] = [x, a]^n$. Оскільки $G/\zeta(G)$ періодична, то існує таке натуральне число t, що $a^t \in \zeta(G)$. Отже, $[x, a]^t = [x, a^t] = 1$ для кожного елемента $x \in G$. Це означає, що підгрупа $[G, a]$ є обмеженою. Оскільки $[G, a] \cong G/C_G(a)$, то ми отримуємо суперечність, яка показує, що $C_G(a) = G$. Нарешті, оскільки a є довільним елементом групи G, то G абелева.

Лема 2. *Припустимо, що група G має ряд таких нормальних підгруп $G \geq D \geq \zeta(G)$, що $G/\zeta(G)$ локально скінченна, $D/\zeta(G)$ подільна та абелева, а G/D обмежена. Тоді $[G, D]$ є подільною абелевою групою.*

Доведення. Покладемо $\zeta(G) = Z$. Оскільки D/Z подільна, то

$$D/Z = \mathop{\mathbf{Dr}}_{\lambda \in I} C_\lambda/Z,$$

де C_λ/Z — квазіциклічні p-підгрупи (p — просте число), тобто

$$C_\lambda/Z = \langle a_n Z | (a_{n+1}Z)^p = a_n Z \rangle.$$

Для довільного елемента $g \in G$ розглянемо

$$[g, (a_{n+1})^2] = [g, a_{n+1}a_{n+1}] = [g, a_{n+1}][g, a_{n+1}]^{a_{n+1}} =$$
$$= [g, a_{n+1}][g, a_{n+1}] = [g, a_{n+1}]^2,$$

оскільки за лемою 1 D є абелевою. Застосувавши індукцію, отримаємо

$$[g, a_{n+1}]^p = [g, (a_{n+1})^p] = [g, a_n].$$

Таким чином, отримані співвідношення показують, що група

$$[g, C_\lambda] = \langle [g, a_n] | n \in \mathbb{N} \rangle$$

є квазіциклічною p-групою. В свою чергу, група $[G, C_\lambda]$ породжується підгрупами $[g, C_\lambda]$ [9] (наслідок 2.2), і тому $[G, C_\lambda]$ є подільною групою для кожної підгрупи C_λ. Оскільки $D/Z = \mathbf{Dr}_{\lambda \in I} C_\lambda/Z$, то за наслідком 2.2 роботи [9] отримуємо

$$[G, D] = \langle [G, C_\lambda] | \lambda \in I \rangle.$$

Зазначимо, що група, породжена подільними підгрупами, також є подільною. Отже, $[G, D]$ — подільна абелева група.

***Доведення* теореми А.** За лемою 1 підгрупа D є абелевою. Оскільки

$$D/[G,D] \leq \zeta(G/[G,D]),$$

то

$$(G/[G,D])/\zeta(G/[G,D]) \leq (G/[G,D])/(D/[G,D]) \cong G/D.$$

За нашим припущенням фактор-група G/D обмежена. Це означає, що $(G/[G,D])/\zeta(G/[G,D])$ також обмежена. Тоді за теоремою 1 роботи [11] комутант $[G/[G,D], G/[G,D]]$ є локально скінченною та обмеженою групою. За лемою 2 група $[G,D]$ подільна та абелева. Оскільки

$$[G/[G,D], G/[G,D]] = [G,G]/[G,D],$$

то $[G,G]$ — локально скінченна група, яка є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.

3. Доведення теореми В.

Лема 3. *Нехай A — абелева нормальна підгрупа групи G. Припустимо, що фактор-група $A/(\zeta(G) \cap A)$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Тоді $[A,G]$ також локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.*

Доведення. Покладемо $\zeta(G) = Z$. Виберемо таку підмножину M групи G, що $G = \langle C_G(A), M\rangle$. Для довільного елемента $g \in G$ розглянемо відображення $\xi_g \colon A \to A$, яке визначається за правилом $\xi_g(x) = [x,g]$. Раніше ми вже довели, що відображення ξ_g є ендоморфізмом підгрупи A. Оскільки $(Z \cap A) \leq C_G(A)$, то $A/C_G(A) \leq A/(Z \cap A)$, звідки випливає, що $A/C_G(A)$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Ізоморфізм

$$[A,g] = \operatorname{Im}(\xi_g) \cong A/\operatorname{Ker}(\xi_g) = A/C_G(A)$$

показує, що підгрупа $[A,g]$ також локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. За наслідком 2.2 з роботи [9] $[A,G]$ є добутком підгруп $[A,g]$ для всіх $g \in M$. А це означає, що $[A,G]$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.

***Доведення* теореми В.** Розглянемо верхній центральний ряд

$$\langle 1\rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_{k-1} \leq Z_k = Z$$

групи G. Застосуємо індукцію по k.

Якщо $k = 1$, то $G/Z_1 = G/\zeta(G)$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Теорема А показує, що в цьому випадку підгрупа $\gamma_2(G) = [G,G]$ також локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.

Припустимо тепер, що $k > 1$ і ми вже довели, що підгрупа $\gamma_k(G/Z_1)$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Покладемо $K/Z_1 = \gamma_k(G/Z_1)$ та $L = \gamma_k(G)$. Отже, $L \leq K$. Застосовуючи теорему А до підгрупи K, отримуємо, що підгрупа $D = [K,K]$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Оскільки фактор-група K/D абелева, то LD/D також абелева. Таким чином, маємо

$$(LD/D)(LD/D \cap Z_1D/D) = (LD/D)((LD \cap Z_1D)/D) \cong LD/(LD \cap Z_1D) \cong$$

$$\cong (LD)(Z_1D)/(Z_1D) = (LZ_1D)/(Z_1D) \cong L/(L \cap Z_1D),$$

звідки випливає, що підгрупа $(LD/D)(LD/D \cap Z_1D/D)$ є епіморфним образом фактор-групи $L/(L \cap Z_1)$. Оскільки $L/(L \cap Z_1) \cong LZ_1/Z_1 \leq K/Z_1$, то $L/(L \cap Z_1)$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Отже, це виконується і для підгрупи $(LD/D)(LD/D \cap Z_1D/D)$. Застосовуючи лему 3 до фактор-групи G/D, отримуємо, що її підгрупа $V/D = [LD/D, G/D]$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої. Оскільки центр фактор-групи G/V містить LV/V, а фактор-група $(G/V)/(LV/V)$ нільпотентна класу не більше за k, то $\gamma_{k+1}(G) \leq V$. Це, в свою чергу, показує, що $\gamma_{k+1}(G)$ локально скінченна та є розширенням подільної групи за допомогою обмеженої.

Зауваження. Не можна узагальнити теорему A (відповідно, теорему B) на випадок, коли фактор-група $G/\zeta(G)$ (відповідно, $G/\zeta_k(G)$) періодична. С. І. Адян в роботі [1] побудував приклад такої вільної від скруту групи G, що $G/\zeta(G)$ — періодична скінченнопороджена p-група (p — просте число), але $[G, G]$ не обмежена. Іншими словами, клас періодичних груп не є ні класом Шура, ні класом Бера.

Література

1. *Adian S. I.* Certain torsion-free groups // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. – 1971. – **35**. – P. 459 – 468.
2. *Baer R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161 – 177.
3. *Ballester-Bolinches A., Camp-Mora S., Kurdachenko L. A., Otal J.* Extension of a Schur theorem to groups with a central factor with a bounded section rank// J. Algebra. – 2013. – **393**. – P. 1 – 15.
4. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Otal J.* On groups whose factor-group modulo the hypercentre has finite section p-rank // J. Algebra. – 2015. – **440**. – P. 489 – 503.
5. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Pypka A. A.* The theorems of Schur and Baer: a survey // Int. J. Group Theory. – 2015. – **4**. – P. 21 – 32.
6. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* The Schur property and groups with uniform conjugate classes // J. Algebra. – 1995. – **174**. – P. 823 – 847.
7. *Fuchs L.* Infinite abelian groups. – New York: Acad. Press, 1973. – Vol. 2.
8. *Kurdachenko L. A., Otal J.* The rank of the factor-group modulo the hypercenter and the rank of the some hypocenter of a group // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – **11**. – P. 1732 – 1741.
9. *Kurdachenko L. A., Otal J., Pypka A. A.* Relationships between the factors of the upper and the lower central series of a group // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2016. – **39**. – P. 1115 – 1124.
10. *Kurdachenko L. A., Shumyatsky P.* The ranks of central factor and commutator groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 2013. – **154**. – P. 63 – 69.
11. *Mann A.* The exponents of central factor and commutator groups // J. Group Theory. – 2007. – **10**. – P. 435 – 436.
12. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. – 1951. – **1**. – P. 178 – 187.
13. *Pypka A. A.* Analogues of theorems of Schur and Baer for some locally finite groups // Proc. F. Scorina Gomel State Univ. – 2014. – **87**. – P. 169 – 173.

Одержано 06.04.16