УДК 514.76

М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева (Запорож. нац. ун-т)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА С ЗАДАННЫМ ГРАССМАНОВЫМ ОБРАЗОМ

We study the properties of submanifolds of the Grassmanian manifold of the four-dimensional pseudo-Euclidean space and also the Grassman image of a surface in this space. The theorem on the existence of a surface in the pseudo-Euclidean space with the given Grassman image is formulated and proved.

Вивчаються властивості підмноговидів грассманова многовиду чотиривимірного псевдоевклідового простору, а також грассманів образ поверхні цього простору. Формулюється та доводиться теорема про існування поверхні псевдоевклідового простору з заданим грассмановим образом.

Множество $G(2,4)$ двумерных плоскостей в евклидовом пространстве R_4, проходящих через фиксированную точку O, называют грассмановым многообразием [2]. В псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ (с метрикой сигнатуры $-+++$) множество $G(2,4)$ состоит из двумерных евклидовых, псевдоевклидовых и изотропных плоскостей. Как и в евклидовом пространстве, на нем можно ввести структуру гладкого многообразия, но не связного, а представляющего собой дизъюнктное объединение трех связных подмногообразий, которые будем обозначать ${}^PG(2,4)$, ${}^EG(2,4)$ и ${}^{Iz}G(2,4)$ соответственно. Геометрия грассмановых подмногообразий псевдоевклидова пространства изучалась в работах С. Е. Козлова, И. Маазикаса, Д. В. Иванова, Т. Хангана, а также авторами в работах [3–5]. В данной статье будем рассматривать подмногообразия неизотропных плоскостей.

При стандартном плюккеровом вложении [1] грассманова многообразия $G(2,4)$ метрика пространства ${}^1R_4$ порождает в пространстве бивекторов метрику пространства ${}^3R_6$ — псевдоевклидова шестимерного пространства индекса 3, а точечное представление каждого из подмногообразий ${}^EG(2,4)$ и ${}^PG(2,4)$ представляет собой четырехмерную поверхность с индуцированной псевдоримановой метрикой сигнатуры $(--++)$. Поверхность, являющаяся представлением ${}^EG(2,4)$, лежит на пятимерной сфере действительного радиуса 1, а в случае ${}^PG(2,4)$ — мнимого радиуса i.

Пусть V^2 — некоторая двумерная поверхность пространства ${}^1R_4$. Тип поверхности определяется типом касательной плоскости к ней. Будем рассматривать такие поверхности или области на поверхностях, в каждой точке которых тип касательной плоскости не меняется. Рассмотрим поверхность $\bar r(u,v) = (f(u)\operatorname{ch} v, f(u)\operatorname{sh} v, g(u)\cos v, g(u)\sin v)$, где $f(u)$, $g(u)$ — функции класса C^k, $k \geq 1$. Скалярные квадраты касательных векторов $\bar r_u$ и $\bar r_v$ имеют вид $-(f'(u))^2 + (g'(u))^2$ и $(f(u))^2 + (g(u))^2$ соответственно. Тогда, например, при $f(u) = \operatorname{sh} u$, $g(u) = \operatorname{ch} u$ имеем псевдоевклидову, при $f(u) = \operatorname{ch} u$, $g(u) = \operatorname{sh} u$ — евклидову, а при $f(u) = g(u) = \cos u$ — изотропную поверхность. Далее будем рассматривать только евклидовы и псевдоевклидовы поверхности.

Каждой точке $x \in V^2$ поставим в соответствие двумерную плоскость, проходящую через фиксированную точку O и параллельную нормальной плоскости N_x поверхности V^2 в точке x. Тем самым задается отображение поверхности V^2 в грассманово многообразие $G(2,4)$, а образ этого отображения — двумерная поверхность Γ^2 — называется грассмановым образом поверхности V^2. Геометрия грассманова образа поверхности евклидова пространства хорошо изучена. Наиболее интересными являются вопросы о задании поверхности своим грассмановым образом, о единственности такого задания, о деформациях, сохраняющих грассманов образ. Эти вопросы исследовались в работах К. Лейхвайса, Ю. Вонга, Ю. Муто, Ю. А. Аминова, А. В. Борисенко, В. А. Горькавого и др. В данной статье рассматривается вопрос о существовании поверхности псевдоевклидова пространства ${}^1R_4$ с заданным грассмановым образом. Для решения этого вопроса докажем некоторые свойства подмногообразий грассманова многообразия $G(2,4)$.

Лемма 1. *Подмногообразие $S^2(\bar{e})$ двумерных плоскостей пространства ${}^1R_4$, ортогональных фиксированному вектору $\bar{e}$, является двумерным.*

Доказательство. В пространстве ${}^1R_4$ ортогональным дополнением к фиксированному вектору $\bar{e}$ является трехмерное пространство (евклидово R_3, если $\bar{e}$ — псевдоевклидов вектор, и псевдоевклидово ${}^1R_3$, если $\bar{e}$ — евклидов вектор). Очевидно, что все двумерные плоскости, ортогональные вектору $\bar{e}$, принадлежат этому трехмерному пространству. Таким образом, имеем грассманово многообразие двумерных плоскостей трехмерного пространства, размерность которого равна двум, что и требовалось доказать.

***Следствие* 1.** *При стандартном плюккеровом вложении f грассманова многообразия в пространство ${}^3R_6$ образ его подмногообразия $S^2(\bar{e})$ является подмногообразием некоторого трехмерного пространства $T^3(\bar{e})$.*

Действительно, пусть $\bar{e}$ — псевдоевклидов вектор, тогда $S^2(\bar{e})$ — подмногообразие в ${}^EG(2,4)$. Выберем в ${}^1R_4$ базис $\{\bar{e}_1 = \bar{e}, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Тогда плюккеровы координаты $(p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$ каждой точки из $f(S^2(\bar{e}))$ удовлетворяют системе уравнений $p^{12} = p^{13} = p^{14} = 0$, т. е. $f(S^2(\bar{e}))$ является подмногообразием трехмерного пространства $T^3(\bar{e}) = R_3 \subset^3 R_6$. Если же $\bar{e}$ — евклидов вектор, то выберем в ${}^1R_4$ базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2 = \bar{e}, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Тогда плюккеровы координаты каждой точки из $f(S^2(\bar{e}))$ удовлетворяют системе уравнений $p^{12} = p^{23} = p^{24} = 0$, т. е. $f(S^2(\bar{e}))$ принадлежит трехмерному пространству $T^3(\bar{e}) =^2 R_3 \subset^3 R_6$.

Лемма 2. *Семейство трехмерных подпространств пространства ${}^1R_4$, содержащих фиксированную двумерную плоскость π, является однопараметрическим.*

Если имеем семейство евклидовых трехмерных подпространств, содержащих фиксированную двумерную плоскость π (очевидно, евклидову), то все векторы, каждый из которых ортогонален некоторому подпространству из семейства, являются псевдоевклидовыми. Рассмотрим двумерную плоскость $\pi^{\perp}$, ортогональную к плоскости π. Она будет псевдоевклидовой. Выберем псевдоевклидов вектор $\bar{e}_0 \in \pi^{\perp}$. Обозначим через φ угол между псевдоевклидовыми векторами $\bar{e}_0$ и $\bar{e}$ в плоскости $\pi^{\perp}$. Тогда каждое значение $\varphi \in (-\infty, \infty)$ однозначно определяет трехмерное подпространство $T^3(\bar{e})$ семейства. Таким образом, семейство трехмерных евклидовых подпространств пространства ${}^1R_4$, содержащих фиксированную евклидову плоскость, зависит от одного параметра φ.

Если же имеем семейство псевдоевклидовых трехмерных пространств, проходящих через фиксированную евклидову (или псевдоевклидову) плоскость π, то каждое из этих пространств определяет ортогональный к нему вектор, являющийся евклидовым. Рассмотрим двумерную плоскость $\pi^{\perp}$, ортогональную к плоскости π. Она будет псевдоевклидовой (или соответственно евклидовой). В каждом из этих случаев выберем евклидов вектор $\bar{e}_0 \in \pi^{\perp}$. Обозначим через φ угол между евклидовыми векторами $\bar{e}_0$ и $\bar{e}$ в плоскости $\pi^{\perp}$. Тогда каждое значение $\varphi \in (-\infty, \infty)$ $\big($во втором случае $\varphi \in [0, 2\pi]\big)$ однозначно определяет трехмерное подпространство семейства. Таким образом, семейство трехмерных псевдоевклидовых подпространств пространства ${}^1R_4$, содержащих фиксированную неизотропную плоскость, зависит от одного параметра φ.

Следствие 2. *При стандартном плюккеровом вложении грассманова многообразия в пространство* ${}^3R_6$ *семейство трехмерных пространств* $T^3(\bar{e})$, *проходящих через фиксированную точку* P_0 *— образ плоскости* π, *является однопараметрическим.*

Каждое из пространств $T^3(\bar{e})$ определяется подмногообразием $S^2(\bar{e})$, которое, в свою очередь, определяется вектором $\bar{e}$. Согласно лемме 2, вектор $\bar{e}$ определяется параметром φ, геометрический смысл которого — угол между $\bar{e}$ и фиксированным вектором $\bar{e}_0$, т. е. рассматриваемое семейство пространств $T^3(\bar{e})$ зависит от одного параметра φ.

В работе [3] изучались свойства подмногообразий ${}^EG(2,4)$ и ${}^PG(2,4)$, был построен тензор кривизны и получены формулы для вычисления секционной кривизны $\bar{K}(\sigma)$.

Лемма 3. *Пусть* T^2 *— двумерная площадка, касательная к* ${}^EG(2,4) \subset^3 R_6$ *в точке* P_0, *и секционная кривизна удовлетворяет условию* $\bar{K}(\sigma) \neq 1$. *Тогда найдется такое трехмерное подпространство* $T^3 \subset^3 R_6$, *проходящее через точку* P_0, *что проекция* T^2 *на* T^3 *является двумерной площадкой* (*другими словами, найдется* T^3, *на которое* T^2 *проектируется регулярно*).

Доказательство. Воспользуемся методом от противного. Обозначим через T^4 касательное пространство к ${}^EG(2,4)$ в точке P_0. Предположим, что существуют площадки $T^2(P_0) \subset T^4$, которые нельзя регулярно спроектировать ни на одно пространство T^3, проходящее через точку P_0. То есть предположим, что существуют площадки, в которых для любого пространства T^3 найдется вектор, ортогональный этому пространству. Рассмотрим образ $f(S^2(\bar{e}))$ подмногообразия $S^2(\bar{e})$ многообразия ${}^EG(2,4)$. Его точки являются образами двумерных евклидовых плоскостей в ${}^1R_4$, проходящих через точку и ортогональных фиксированному псевдоевклидову вектору $\bar{e} \in^1 R_4$. Согласно лемме 1, оно двумерно. Найдем параметрические уравнения подмногообразия $S^2(\bar{e})$. В пространстве ${}^1R_4$ от стандартного базиса $\{\bar{e}_i\}$ перейдем к базису $\{\bar{e}'_i\}$ по формулам $\bar{e}'_1 = \operatorname{ch}\varphi\bar{e}_1 + \operatorname{sh}\varphi\bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = \operatorname{sh}\varphi\bar{e}_1 + \operatorname{ch}\varphi\bar{e}_2$, $\bar{e}'_3 = \bar{e}_3$, $\bar{e}'_4 = \bar{e}_4$ с помощью поворота на угол φ в плоскости векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. В качестве вектора $\bar{e}$ возьмем вектор $\bar{e}'_1$. Тогда произвольная двумерная евклидова плоскость, ортогональная $\bar{e}$ и проходящая через начало координат, определяется двумя взаимно ортогональными векторами

$$\bar{X} = \sum_{i=2}^{4} \alpha^i \bar{e}'_i$$

и

$$\bar{Y} = \sum_{i=2}^{4} \beta^i \bar{e}'_i.$$

Относительно базиса $\{\bar{e}_i\}$ плюккеровы координаты этой плоскости имеют вид

$$\bar{p} = \big(0, \alpha^{[2}\beta^{3]} \operatorname{sh}\varphi, \alpha^{[2}\beta^{4]} \operatorname{sh}\varphi, \alpha^{[2}\beta^{3]} \operatorname{ch}\varphi, \alpha^{[2}\beta^{4]} \operatorname{ch}\varphi, \alpha^{[3}\beta^{4]}\big).$$

В пространстве с базисом $\bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ вычислим векторное произведение векторов $\bar{X}$ и $\bar{Y}$:

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \big(\alpha^{[3}\beta^{4]}, \alpha^{[4}\beta^{2]}, \alpha^{[2}\beta^{3]}\big).$$

Будем считать, что α^i и β^i выбраны так, что $[\bar{X}, \bar{Y}]$ является единичным вектором. Тогда его координаты можно записать в виде

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = (\sin\theta, \cos\theta\cos\gamma, \cos\theta\sin\gamma).$$

В параметризации (θ, γ) параметрические уравнения $f(S^2(\bar{e}))$ имеют вид

$$\bar{p} = (0, \cos\theta\sin\gamma\operatorname{sh}\varphi, -\cos\theta\cos\gamma\operatorname{sh}\varphi, \cos\theta\sin\gamma\operatorname{ch}\varphi, -\cos\theta\cos\gamma\operatorname{ch}\varphi, \sin\theta).$$

Пусть точке P_0, через которую проходят $f(S^2(\bar{e}))$ и $T^3(\bar{e})$, соответствует плоскость R_2, определяемая векторами $\bar{e}_3, \bar{e}_4$. Тогда плюккеровы координаты $(0,0,0,0,0,1)$ этой плоскости соответствуют значению $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Касательный вектор $\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial\gamma}$ к $f(S^2(\bar{e}))$ в этой точке будет нулевым, а множество векторов $\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}$ определяет двумерную плоскость, касательную к $f(S^2(\bar{e}))$ в точке P_0. В качестве базиса этой плоскости возьмем векторы

$$\bar{f}_1 = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, -\operatorname{sh}\varphi, 0, -\operatorname{ch}\varphi, 0, 0),$$

$$\bar{f}_2 = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, \operatorname{sh}\varphi, 0, -\operatorname{ch}\varphi, 0).$$

Плоскость векторов $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ определяется углом φ. Поскольку $T^3(\bar{e})$ определяется параметром φ и плоскость, натянутая на векторы $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, также определяется этим параметром и принадлежит $T^3(\bar{e})$, то из регулярности проектирования площадки T^2 на плоскость векторов $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ будет следовать регулярность ее проектирования на $T^3(\bar{e})$. Поэтому те площадки, которые проектируются с вырождением на $T^3(\bar{e})$, будут проектироваться с вырождением и на плоскость векторов $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$. Мы допустили, что такие площадки существуют. Пусть $\bar{k}$ и $\bar{l}$ — направляющие векторы одной из таких площадок и векторы $\bar{k}$ и $\bar{l}$ имеют в T^4 такие координаты:

$$\bar{k} = (0, k_1, k_2, k_3, k_4, 0), \qquad \bar{l} = (0, l_1, l_2, l_3, l_4, 0).$$

В плоскости векторов $\bar{k}$ и $\bar{l}$ существует ненулевой вектор $C_1\bar{k} + C_2\bar{l}$, ортогональный $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$. Следовательно, система уравнений

$$C_1(k_1\operatorname{sh}\varphi - k_3\operatorname{ch}\varphi) + C_2(l_1\operatorname{sh}\varphi - l_3\operatorname{ch}\varphi) = 0,$$

$$C_1(-k_2\operatorname{sh}\varphi + k_4\operatorname{ch}\varphi) + C_2(-l_2\operatorname{sh}\varphi + l_4\operatorname{ch}\varphi) = 0$$

относительно C_1 и C_2 имеет нетривиальное решение, а значит, ее определитель равен нулю. При любом φ это требование дает три уравнения

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ -k_2 & -l_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -k_3 & -l_3 \\ k_4 & l_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} k_1 & -l_3 \\ -k_2 & l_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -k_3 & l_1 \\ k_4 & -l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Из первых двух уравнений следует, что найдутся два таких числа λ и μ, что

$$k_1 = \lambda l_1, \qquad k_2 = \lambda l_2, \qquad k_3 = \mu l_3, \qquad k_4 = \mu l_4.$$

Поскольку $\bar{k}$ и $\bar{l}$ линейно независимы, то числа λ и μ различны. Из третьего уравнения получаем

$$l_1 l_4 - l_2 l_3 = 0. \tag{1}$$

Найдем теперь секционную кривизну $\bar{K}$ многообразия ${}^E G(2,4)$ для площадки векторов $\bar{k}$ и $\bar{l}$. Для этого сначала определим внешнюю кривизну $\bar{K}_e$ точечного подмногообразия ${}^E G(2,4)$, как гиперповерхности, принадлежащей пятимерной сфере единичного радиуса. Используя уравнения Гаусса для подмногообразия ${}^E G(2,4)$, полученные в [3], запишем формулу внешней кривизны в виде

$$\bar{K}_e = -\frac{(\bar{p}_{u^1u^1}, \bar{q})(\bar{p}_{u^2u^2}, \bar{q}) - (\bar{p}_{u^1u^2}, \bar{q})^2}{\bar{p}^2_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1}, \bar{p}_{u^2})},$$

где $\bar{q} = (-p^{34}, p^{24}, -p^{23}, p^{14}, -p^{13}, p^{12})$ — дополнительный бивектор к бивектору $\bar{p}$. Преобразуем эту формулу к виду

$$\bar{K}_e = -\frac{(\bar{p}_{u^1}, \bar{q}_{u^1})(\bar{p}_{u^2}, \bar{q}_{u^2}) - \dfrac{1}{4}\big[(\bar{p}_{u^1}, \bar{q}_{u^2}) + (\bar{p}_{u^2}, \bar{q}_{u^1})\big]^2}{\bar{p}^2_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1}, \bar{p}_{u^2})^2}.$$

Пусть в точке P_0 выполняется условие $p^{34} = 1$, тогда $p^{34}_{u^i} = 0$. Поэтому формулу кривизны можно записать в виде

$$\bar{K}_e =$$

$$= -\frac{\left\{\begin{vmatrix} p^{13}_{u^1} & p^{13}_{u^2} \\ p^{42}_{u^1} & p^{42}_{u^2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p^{14}_{u^1} & p^{14}_{u^2} \\ p^{23}_{u^1} & p^{23}_{u^2} \end{vmatrix}^2 - 2\begin{vmatrix} p^{23}_{u^1} & p^{23}_{u^2} \\ p^{13}_{u^1} & p^{13}_{u^2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p^{14}_{u^1} & p^{14}_{u^2} \\ p^{42}_{u^1} & p^{42}_{u^2} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} p^{14}_{u^1} & p^{14}_{u^2} \\ p^{13}_{u^1} & p^{13}_{u^2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p^{23}_{u^1} & p^{23}_{u^2} \\ p^{42}_{u^1} & p^{42}_{u^2} \end{vmatrix}\right\}}{\bar{p}^2_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1}, \bar{p}_{u^2})^2}.$$

Выполним в этой формуле замены

$$p^{13}_{u^1} = k_1, \qquad p^{14}_{u^1} = k_2, \qquad p^{23}_{u^1} = k_3, \qquad p^{24}_{u^1} = k_4,$$

$$p^{13}_{u^2} = l_1, \qquad p^{14}_{u^2} = l_2, \qquad p^{23}_{u^2} = l_3, \qquad p^{24}_{u^2} = l_4.$$

Тогда в числителе получим выражение

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ k_3 & l_3 \end{vmatrix}^2 - 2\begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ -k_4 & \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся полученными соотношениями для координат векторов $\bar{k}$ и $\bar{l}$ и приведем это выражение к виду

$$(\mu - \lambda)^2 l_1^2 l_4^2 + (\mu - \lambda)^2 l_2^2 l_3^2 - 2(\mu - \lambda)^2 l_1 l_4 l_2 l_3 = (\mu - \lambda)^2 (l_1 l_4 - l_2 l_3)^2.$$

Таким образом, $\bar{K}_e = 0$. Следовательно, секционная кривизна $\bar{K} = \bar{K}_e + 1$ грассманова подмногообразия ${}^E G(2,4)$ равна 1. А по условию леммы она отлична от 1. Получили противоречие.

Лемма 3 доказана.

Для подмногообразия ${}^P G(2,4)$ можно сформулировать и доказать аналогичную лемму. Отличие в формулировке будет состоять в том, что секционная кривизна подмногообразия должна удовлетворять неравенству $\bar{K}(\sigma) \neq -1$.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о существовании поверхности с заданным грассмановым образом. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть Γ^2 — двумерная регулярная класса C^4 поверхность в ${}^E G(2,4)$ (или ${}^P G(2,4)$). Если кривизна $\bar{K}(\sigma)$ грассманова подмногообразия ${}^E G(2,4)$ (или ${}^P G(2,4)$) для площадки, касательной к Γ^2 в точке P_0, удовлетворяет условию $\bar{K}(\sigma) \neq 1$ (или $\bar{K}(\sigma) \neq -1$), то существует окрестность точки P_0, являющаяся грассмановым образом регулярной класса C^2 поверхности V^2 пространства ${}^1R_4$.*

Доказательство. Радиус-вектор $\bar{x}$ искомой поверхности V^2 пространства ${}^1R_4$ имеет координаты $\bar{x}_i = x_i(u^1, u^2)$, $i = \overline{1,4}$. Тогда условие ортогональности касательных $\bar{x}_{u^\alpha} = (x_{1u^\alpha}, x_{2u^\alpha}, x_{3u^\alpha}, x_{4u^\alpha})$, $\alpha = 1,2$, и нормальных $\bar{n_\sigma} = (n^1_\sigma, n^2_\sigma, n^3_\sigma, n^4_\sigma)$, $\sigma = 1,2$, векторов искомой поверхности V^2 примет вид

$$-x_{1u^\alpha} n^1_\sigma + \sum_{k=2}^{4} x_{ku^\alpha} n^k_\sigma = 0. \tag{2}$$

Поскольку поверхность $\Gamma^2 \subset^E G(2,4)$ пространства ${}^3R_6$ задается параметрическими уравнениями $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2)$, $i,j = \overline{1,4}$, $i < j$, то систему уравнений (2) можно преобразовать так, чтобы она стала системой от неизвестных производных искомых функций x_i и содержала заданные функции $p^{ij}(u^1, u^2)$. Положим $\lambda^{ij} = \dfrac{p^{ij}}{p^{34}}$ и будем считать, что в точке $P_0 \in \Gamma^2$ координата p^{34} равна 1. Тогда в некоторой окрестности выбранной точки координата p^{34} не равна нулю. Введем столбцы $c = \begin{pmatrix} \lambda^{24} \\ \lambda^{32} \end{pmatrix}$ и $d = \begin{pmatrix} \lambda^{14} \\ \lambda^{31} \end{pmatrix}$ и обозначим символами $|d_{u^i} c_{u^j}|$ миноры, составленные из производных от элементов этих столбцов. После этого полученную систему уравнений (2) можно разрешить относительно производных функции x_1 и записать в виде

$$\begin{aligned} x_{1u^1} &= A x_{2u^1} - B x_{2u^2}, \\ x_{1u^2} &= -C x_{2u^1} + D x_{2u^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $A = \dfrac{|d_{u^1} c_{u^2}|}{|d_{u^1} d_{u^2}|}$, $B = \dfrac{|d_{u^1} c_{u^1}|}{|d_{u^1} d_{u^2}|}$, $C = -\dfrac{|d_{u^2} c_{u^2}|}{|d_{u^1} d_{u^2}|}$, $D = -\dfrac{|d_{u^2} c_{u^1}|}{|d_{u^1} d_{u^2}|}$. От системы (3) можно перейти к одному дифференциальному уравнению в частных производных на функцию x_2. Если обозначить эту функцию через Ψ, то уравнение будет иметь вид

$$C\Psi_{u^1u^1} + (A - D)\Psi_{u^1u^2} - B\Psi_{u^2u^2} + \Psi_{u^1}(C_{u^1} + A_{u^2}) - \Psi_{u^2}(D_{u^1} + B_{u^2}) = 0. \tag{4}$$

Для существования решения уравнения (4) необходимо, чтобы коэффициенты в нем были гладкими функциями. Поскольку поверхность Γ^2 регулярна, то производные d_{u^i} и c_{u^j} являются гладкими функциями. Следовательно, для того чтобы коэффициенты уравнения были гладкими функциями, необходимо, чтобы определитель $|d_{u^1}d_{u^2}|$ был отличен от нуля. Чтобы это доказать, найдем явный вид этого определителя.

Пусть σ — касательная плоскость к Γ^2 в точке P_0. Согласно лемме 3, если $\bar{K}(\sigma) \neq 1$ (или $\bar{K}(\sigma) \neq -1$), то существует трехмерное подпространство T^3, на которое σ (а значит, и Γ^2) проектируется без вырождения.

Покажем, как можно выбрать это подпространство. Перейдем в пространстве ${}^3R_6$ от стандартного базиса к базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$. Рассмотрим трехмерное подпространство $T^3 =^2 R_3$ пространства ${}^3R_6$, которое задается уравнениями $p^{12} = p^{23} = p^{24} = 0$. Тогда $\bar{\tau} = (p^{14}, p^{13}, p^{34})$ — проекция радиуса-вектора $\bar{p}$ поверхности Γ^2 на пространство T^3 и $\bar{v} = (q^{14}, q^{13}, q^{34}) = (-p^{23}, p^{24}, p^{12})$ — проекция нормали $\bar{q}$ к ${}^EG(2,4)$ на T^3. Проекция $\tilde{\Gamma}^2$ поверхности Γ^2 на T^3 описывается вектор-функцией $\bar{\tau}(u^1u^2,)$. Так как Γ^2 регулярна, то и $\tilde{\Gamma}^2$ тоже регулярна, т. е. касательная плоскость к $\tilde{\Gamma}^2$— проекция касательной плоскости к Γ^2 — является двумерной. Итак, в качестве трехмерного пространства, на которое Γ^2 проектируется без вырождения, можно выбрать пространство $T^3 =^2 R_3$.

Выразим определитель $|d_{u^1}d_{u^2}|$ через вектор $\bar{\tau}$ и его производные и получим

$$|d_{u^1}d_{u^2}| = -\frac{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}{(p^{34})^3}, \tag{5}$$

где $(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})$ — смешанное произведение векторов $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_{u^1}$, $\bar{\tau}_{u^2}$. Поскольку проекция $\tilde{\Gamma}^2 \subset \subset T^3$ является частью сферы действительного $\big($если $\Gamma^2 \subset^E G(2,4)\big)$ или мнимого (если $\Gamma^2 \subset \subset^P G(2,4))$ радиуса, то $|d_{u^1}d_{u^2}| = -\dfrac{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}{(p^{34})^3} = -\dfrac{\big|[\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}]\big|}{(p^{34})^3}$ $\left(\text{или } |d_{u^1}d_{u^2}| = \dfrac{\big|[\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}]\big|}{(p^{34})^3}\right)$. А так как $\tilde{\Gamma}^2$ регулярна и, по договоренности, знаменатель последней дроби не равен нулю, то определитель всегда существует и отличен от нуля, что и требовалось доказать. Следовательно, коэффициенты A, B, C, D являются гладкими функциями. Таким образом, в соответствии с теорией уравнений в частных производных [6], в некоторой окрестности начальной точки существует решение уравнения (4).

Перейдем к доказательству регулярности искомой поверхности, т. е. найдем условия, при которых определитель ее метрического тензора отличен от нуля.

Для производных от координат x_3 и x_4 радиуса-вектора искомой поверхности V^2 можно записать системы, аналогичные системе (3). Рассмотрим пространство ${}^1R_3$, ортогональное орту $\bar{e}_2$. Выберем в этом пространстве базис $(-\bar{e}_3, \bar{e}_4, -\bar{e}_1)$, т. е. будем рассматривать в нем метрику сигнатуры $(++-)$. Радиус-вектор проекции поверхности V^2 на это подпространство относительно такого базиса имеет вид $\tilde{x} = (-x_3, x_4, -x_1)$. Между рассмотренным ранее пространством $T^3 =^2 R_3$ и пространством ${}^1R_3$, ортогональным орту $\bar{e}_2$, установим соответствие так, чтобы координата p^{14} соответствовала $(-x_3)$, p^{13} — (x_4), а p^{34} — $(-x_1)$. Тогда координаты производных радиуса-вектора будут удовлетворять векторной системе

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{u^1} &= -\Psi_{u^1}\rho\Big\{\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^2}) + \big[\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}]\big]\Big\} + \Psi_{u^2}\rho\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^1}), \\ \tilde{x}_{u^2} &= -\Psi_{u^1}\rho\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\nu}_{u^2}) + \Psi_{u^2}\rho\Big\{\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\nu}_{u^1}) + \big[\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\tau}_{u^1}]\big]\Big\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\rho = \dfrac{1}{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}$.

Обозначим через $g_{ij} = (\bar{x}_{u^i}, \bar{x}_{u^j})$ метрический тензор поверхности V^2, $g = \det(g_{ij})$. Пусть $\tilde{V}^2$ — проекция поверхности V^2 на ${}^1R_3$, а $\tilde{g}_{ij} = (\tilde{x}_{u^i}\tilde{x}_{u^j})$ — ее метрический тензор. Тогда связь между g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ имеет вид

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij} + x_{2u^1}x_{2u^2}.$$

Найдем определитель матрицы

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{2u^1}x_{2u^1} & x_{2u^1}x_{2u^2} \\ x_{2u^1}x_{2u^2} & x_{2u^2}x_{2u^2} \end{pmatrix}.$$

Он запишется в виде

$$g = \tilde{g} - (\tilde{g}_{11}x_{1u^2}^2 - 2\tilde{g}_{12}x_{1u^1}x_{1u^2} + \tilde{g}_{22}x_{1u^1}^2) = -\big|[\tilde{x}_{u^1}, \tilde{x}_{u^2}]\big|^2 + (\tilde{x}_{u^1}x_{2u^2} - \tilde{x}_{u^2}x_{2u^1})^2.$$

С помощью системы (6) и условия $(\bar{\tau}, \bar{\nu}) = 0$ получим

$$[\tilde{x}_{u^1}, \tilde{x}_{u^2}] = -\bar{\nu}\rho I, \qquad \tilde{x}_{u^1}x_{2u^2} - \tilde{x}_{u^2}x_{2u^1} = -\bar{\tau}\rho I,$$

где

$$I = x_{2u^1}^2(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\nu}_{u^2}) - x_{2u^1}x_{2u^2}\big\{(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\nu}_{u^1}) + (\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^2})\big\} + x_{2u^2}^2(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^1}).$$

Учитывая $|\bar{\nu}|^2 - |\bar{\tau}|^2 = -1$ (или $|\bar{\nu}|^2 - |\bar{\tau}|^2 = 1$), имеем

$$g = -\rho^2 I^2 (g = \rho^2 I^2).$$

Наша задача свелась к нахождению условий, при которых $I \neq 0$. Для этого нам понадобится информация о типе уравнения (4). Выразим через векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{\nu}$ определители $|d_{u^i}c_{u^j}|$:

$$|d_{u^i}c_{u^j}| = \frac{-(\bar{\tau}_{u^i}, \bar{v}_{u^j})p^{34} + p^{23}\begin{vmatrix} p^{34}_{u_j} & p^{34}_{u_i} \\ p^{14}_{u_j} & p^{14}_{u_i} \end{vmatrix} + p^{24}\begin{vmatrix} p^{34}_{u_j} & p^{34}_{u_i} \\ p^{31}_{u_j} & p^{31}_{u_i} \end{vmatrix}}{(p^{34})^3}. \tag{7}$$

Непосредственной проверкой легко установить, что связь между производными пар векторов $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ имеет вид

$$(\bar{p}_{u^i}, \bar{q}_{u^j}) + (\bar{p}_{u^j}, \bar{q}_{u^i}) = 2\big((\bar{\tau}_{u^i}, \bar{v}_{u^j}) + (\bar{\tau}_{u^j}, \bar{v}_{u^i})\big). \tag{8}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$-Bdu_1^2 + (D - A)du_1du_2 + Cdu_2^2,$$

коэффициенты которой те же, что и в уравнении (4). Используя равенства (7) и (8), получаем

$$B = \frac{(\bar{p}_{u^1}, \bar{q}_{u^1})p^{34}}{2(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}, \qquad C = -\frac{(\bar{p}_{u^2}, \bar{q}_{u^2})p^{34}}{2(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})},$$

$$D - A = -\frac{p^{34}}{2(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}\big\{(\bar{p}_{u^1}, \bar{q}_{u^2}) + (\bar{p}_{u^2}, \bar{q}_{u^1})\big\}.$$

Используя введенное выше обозначение $\rho = \dfrac{1}{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}$, можно записать равенство

$$-B du_1^2 + (D - A) du_1 du_2 + C du_2^2 = -\frac{1}{2} p^{34} \rho (d\bar{p}, d\bar{q}), \tag{9}$$

т. е. тип уравнения определяется формой $(d\bar{p}, d\bar{q})$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (4) для функции x_2 имеет гиперболический тип. В силу условия (9) характеристики $\xi(u^1, u^2) = c$, $\eta(u^1, u^2) = c$ уравнения (4) являются характеристиками формы $(d\bar{p}, d\bar{q})$. Из этого следует, что $(\bar{\tau}_\xi, \bar{\nu}_\xi) = (\bar{\tau}_\eta, \bar{\nu}_\eta) = 0$, т. е. в выражении для I останется только второе слагаемое. Поэтому значения функции x_2 на характеристиках нужно задать так, чтобы выполнялось условие $x_{2\xi} x_{2\eta} \neq 0$, откуда следует, что $I \neq 0$.

Пусть теперь уравнение (4), а значит, и система (3) имеют эллиптический тип. Ее решение связано с теорией квазиконформных отображений М. А. Лаврентьева. В этом случае, при любых значениях скалярных произведений в выражении для I, равенство $I = 0$ возможно лишь при условиях $x_{2u^1} = x_{2u^2} = 0$. Покажем, что $x_{2u^1}^2 + x_{2u^2}^2 \neq 0$. Якобиан системы (3) можно записать в виде $-C x_{2u^1}^2 + (D - A) x_{2u^1} x_{2u^2} + B x_{2u^2}^2$. Поскольку система (3) эллиптическая, то $(D - A)^2 + 4BC < 0$. Поэтому якобиан равен нулю тогда и только тогда, когда $x_{2u^1} = x_{2u^2} = 0$. Так как система (3) имеет решение, то, согласно теореме о сохранении области из работы Г. Н. Положего [7], этот якобиан должен быть отличен от нуля. Следовательно, по крайней мере одно из слагаемых в выражении для I не равно нулю.

И, наконец, докажем, что некоторая окрестность прообраза точки $P \in \Gamma^2$ на найденной поверхности имеет своим грассмановым образом заданную в условии теоремы область поверхности Γ^2. Для этого необходимо и достаточно показать, что для любого вектора $\bar{n} = (n^1, n^2, n^3, n^4)$ из плоскости $N_x \subset^1 R_4$, соответствующей точке поверхности Γ^2, выполняется условие

$$-x_{1u^i} n^1 + x_{2u^i} n^2 + x_{3u^i} n^3 + x_{4u^i} n^4 = 0.$$

Покажем, что это равенство выполняется при $i = 1$. С помощью системы (6) можно записать

$$-x_{1u^i} n^1 + x_{2u^i} n^2 + x_{3u^i} n^3 + x_{4u^i} n^4 =$$

$$= -x_{2u^1} \rho \big\{ \bar{\tau} (\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^2}) (n^1 p^{34} - n^3 p^{14} + n^4 p^{13}) -$$

$$- (\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^1}) (n^1 p^{34} - n^3 p^{14} + n^4 p^{13}) \big\} + n^1 \big[\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\tau}_{u^1}]\big]^3 -$$

$$- n^3 \big[\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\tau}_{u^1}]\big]^1 + n^4 \big[\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\tau}_{u^1}]\big]^2 + \frac{n^2}{\rho}.$$

Поскольку вектор $\bar{n}$ лежит в плоскости бивектора $\bar{p}$, то можно убедиться, что $n^{[i} p^{jk]} = 0$. Пусть вектор $[\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}]$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3), тогда

$$-x_{1u^i} n^1 + x_{2u^i} n^2 + x_{3u^i} n^3 + x_{4u^i} n^4 = -x_{2u^1} \rho \big\{ a_1 (-n^1 p^{24} - n^4 p^{12} + n^2 p^{14}) +$$

$$+ a_2 (-n^1 p^{23} - n^3 p^{12} + n^2 p^{13}) + a_3 (n^3 p^{24} - n^4 p^{23} + n^2 p^{34}) \big\} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно показать, что равенство выполняется и при $i = 2$. Таким образом, найденная поверхность действительно имеет заданный грассманов образ.

Литература

1. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002.
2. *Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, № 2(278). – С. 41 – 80.
3. *Гургенидзе М. А.* О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 107 – 114.
4. *Гургенидзе М. А., Стеганцева П. Г.* Внутренняя геометрия грассманова многообразия псевдоевклидова пространства // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2008. – **826**, № 58. – С. 141 – 150.
5. *Величко И. Г., Гургенидзе М. А., Стеганцева П. Г.* Подмногообразия грассманова многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 2. – С. 56 – 76.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.
7. *Положий Г. Н.* Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применение // Мат. сб. – 1953. – **32(74)**. – С. 485 – 492.

Получено 03.12.15