УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭНТРОПИЙНЫЕ ЧИСЛА И ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We establish the exact order estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii – Besov classes of periodic functions of two variables in the space L_∞ and use the obtained results in estimating the lower bounds for Kolmogorov, linear, and trigonometric widths. We also study the behavior of similar approximating characteristics of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the spaces L_1 and $B_{1,1}$.

Встановлено точні за порядком оцінки ентропійних чисел класів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій двох змінних у просторі L_∞ і одержані результати застосовано для оцінювання знизу колмогоровських, лінійних та тригонометричних поперечників. Досліджено також поведінку аналогічних асимптотичних характеристик класів $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах L_1 і $B_{1,1}$.

1. Введение. В настоящей работе продолжаются исследования асимптотических характеристик, которые изучались в работах [1, 2] (там же можно ознакомиться с подробной библиографией). При этом главное внимание сосредоточено на получении точных по порядку оценок энтропийных чисел и ряда поперечников (колмогоровского, линейного, тригонометрического) классов Никольського – Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций двух переменных в пространстве L_∞. Кроме того, аналогичные вопросы исследуются и для классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространствах L_1 и $B_{1,1}$. Соответствующие асимптотические характеристики будут определены ниже, а сначала приведем необходимые обозначения и определения, а также сформулируем вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве полученных результатов.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi]$, обозначает множество функций f, 2π-периодических по каждой переменной и таких, что

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname{ess}\sup_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \qquad p = \infty.$$

Всюду ниже будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\pi_d)$, для которых выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \qquad j = \overline{1, d},$$

и множество таких функций будем обозначать $L_p^0(\pi_d)$.

Теперь приведем определение классов функций $B^r_{p,\theta}$ (в частности, H^r_p), которые исследуются в работе. При этом будет удобно пользоваться определением этих классов в терминах так называемой декомпозиционной нормировки (см., например, [3, 4]).

Для векторов $s = (s_1, \ldots, s_d),\ s_j \in \mathbb{N}$, и $k = (k_1, \ldots, k_d),\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{k \colon k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\right\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ введем обозначение

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\widehat{f}(k) = \displaystyle\int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коэффициенты Фурье функции f.

Пусть $1 < p < \infty,\ r = (r_1, \ldots, r_d),\ r_j > 0,\ j = \overline{1, d}$. Тогда, с точностью до абсолютных постоянных, классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см., например, [3, 4]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \qquad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p = \left\{ f \colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p \le 1 \right\}.$$

Отметим, что при соответствующем видоизменении „блоков“ $\delta_s(f, \cdot)$ приведенное определение классов $B^r_{p,\theta}$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$ (см., например, [4], замечание 2.1).

Пусть $V_l(t),\ l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k - l}{l}\right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d),\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d),\ 1 \le p \le \infty$, положим

$$A_s(f, x) = (f * A_s)(x),$$

где $*$ — операция свертки. Тогда при $1 \le p \le \infty,\ r = (r_1, \ldots, r_d),\ r_j > 0,\ j = \overline{1, d}$, с точностью до абсолютных постоянных, классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \qquad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p = \left\{ f \colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f, \cdot)\|_p \le 1 \right\}.$$

В комментариях к полученным ниже результатам будет идти речь о классах $W^r_{p,\alpha}$, и поэтому для удобства напомним их определение.

Пусть $F_r(x,\alpha)$ — многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x,\alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \qquad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумму входят только те векторы $k = (k_1, \ldots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тогда через $W^r_{p,\alpha}$ обозначим класс функций f, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x,\alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x-y,\alpha)\,dy,$$

$$\varphi \in L_p(\pi_d), \qquad \|\varphi\|_p \le 1.$$

В последующих рассуждениях будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \ldots$ $\ldots, r_d)$, которые содержатся в определении рассматриваемых классов функций, упорядочены в виде $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$. Вектору $r = (r_1, \ldots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' =$ $= (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Таким образом, $r' = (r'_1, \ldots, r'_d)$ — вектор с координатами $r'_j = r_1 \gamma'_j$, $j = \overline{1,d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует такая постоянная $C > 0$, что $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что все постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от параметров, содержащихся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. В некоторых случаях мы будем указывать эту зависимость в явном виде. Если $\mathfrak{M}$ — некоторое конечное множество, то через $|\mathfrak{M}|$ будем обозначать количество его элементов.

Определим теперь асимптотические характеристики, которые будем исследовать.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство и $B_{\mathcal{X}}(y,r)$ — шар $\mathcal{X}$ радиуса r с центром в точке y, т. е.

$$B_{\mathcal{X}}(y,r) = \{x \in \mathcal{X} \colon \|x-y\| \le r\}.$$

Тогда величины (см., например, [5])

$$\varepsilon_k(\mathcal{A},\mathcal{X}) = \inf \left\{ \varepsilon \colon \exists y^1, \ldots, y^{2^k} \in \mathcal{X} \colon \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathcal{X}}(y^j, \varepsilon) \right\}$$

называются энтропийными числами множества $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathcal{X}$.

Пусть $\mathcal{Y}$ — нормированное пространство, $\mathrm{Lin}_M(\mathcal{Y})$ — совокупность подпространств $\mathcal{Y}$ размерности, не превышающей M, и W — некоторое выпуклое и центрально-симметричное подмножество в $\mathcal{Y}$. Тогда величина

$$d_M(W,\mathcal{Y}) = \inf_{L_M \in \mathrm{Lin}_M(\mathcal{Y})} \sup_{x \in W} \inf_{y \in L_M} \|x-y\|_{\mathcal{Y}}$$

называется колмогоровским поперечником множества W в пространстве $\mathcal{Y}$. Поперечник $d_M\big(W,\mathcal{Y}\big)$ введен в 1936 г. А. Н. Колмогоровым [6] и характеризует аппроксимативные возможности M-мерных подпространств.

Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — нормированные пространства и $L(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ — совокупность непрерывных линейных отображений $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{Z}$. Тогда величина

$$\lambda_M\big(W,\mathcal{Y}\big)=\inf_{\substack{L_M\in \operatorname{Lin}_M(\mathcal{Y})\\ \Lambda\in L(\mathcal{Y},L_M)}}\ \sup_{x\in W}\|x-\Lambda x\|_{\mathcal{Y}},$$

где нижняя грань берется по всем подпространствам $\mathcal{Y}$ размерности, не превышающей M, и всем линейным непрерывным операторам из $\mathcal{Y}$ в L_M, называется линейным поперечником множества W в пространстве $\mathcal{Y}$. Поперечник $\lambda_M\big(W,\mathcal{Y}\big)$ введен в 1960 г. В. М. Тихомировым [7] и характеризует аппроксимативные возможности M-мерных линейных операторов.

Пусть $F\subset L_q(\pi_d)$ — некоторый класс функций. Тогда тригонометрический поперечник класса F в пространстве L_q $\big($обозначается $d_M^T(F,L_q)\big)$ определяется по формуле [8]

$$d_M^T(F,L_q)=\inf_{\Theta_M}\ \sup_{f\in F}\ \inf_{t(\Theta_M,\cdot)}||f-t(\Theta_M,\cdot)||_q,$$

где

$$t(\Theta_M,x)=\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(k^j,x)},\qquad \Theta_M=\left\{k^1,\ldots,k^M\right\},$$

— всевозможные наборы векторов $k^j=\big(k_1^j,\ldots,k_d^j\big)$, $j=\overline{1,M}$, из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, c_j — произвольные комплексные числа.

Упомянутые поперечники классов $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p и $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных изучались во многих работах (см., например, [9–11] и приведенную там библиографию).

Теперь сформулируем несколько вспомогательных утверждений, первое из которых является следствием одного неравенства Б. Карла (см., например, [12]).

Лемма А [13, 14]. *Пусть $\mathcal{K}$ — компакт в сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Предположим, что для пары чисел (a,b), где $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, либо $a=0$, $b<0$, выполняются соотношения*

$$d_m(\mathcal{K},\mathcal{X})\ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\varepsilon_m(\mathcal{K},\mathcal{X})\gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\varepsilon_m(\mathcal{K},\mathcal{X})\asymp d_m(\mathcal{K},\mathcal{X})\asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

Лемма Б [9, с. 11]. *Имеет место оценка*

$$\sum_{(s,\gamma')\geq n}2^{-\alpha(s,\gamma)}\asymp 2^{-\alpha\, n}n^{\nu-1},\qquad \alpha>0.$$

Теорема A [1]. *Пусть* $r_1 > 0,\ 1 \le \theta < \infty$. *Тогда при* $d \ge 1$

$$\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_1) \gg M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

2. Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ в пространствах L_∞ и L_1. Сначала установим точные по порядку оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций двух переменных в пространстве L_∞. Прежде чем сформулировать полученный результат, приведем дополнительно несколько обозначений, которые используются в процессе его доказательства.

Пусть $N_\varepsilon(F,\mathcal{X})$ — минимальное количество замкнутых шаров радиуса ε пространства $\mathcal{X}$, необходимых для покрытия (компактного) множества F, а $M_\varepsilon(F,\mathcal{X})$ — максимальное число таких точек $x_i \in F$, что $\|x_i - x_j\|_{\mathcal{X}} > \varepsilon,\ i \ne j$. Тогда, как известно, справедливы соотношения

$$N_\varepsilon(F,\mathcal{X}) \le M_\varepsilon(F,\mathcal{X}) \le N_{\frac{\varepsilon}{2}}(F,\mathcal{X}). \tag{1}$$

Нам также будут необходимы следующие множества:

$$\mathcal{S}_n = \left\{ s = (2n_1, 2n_2), n_1 + n_2 = \frac{n}{2} \right\},$$

$$\mathcal{D}_n = \bigcup_{s\in\mathcal{S}_n} \rho(s).$$

Отметим, что для количества элементов множеств $\mathcal{D}_n$ выполнено соотношение $|\mathcal{D}_n| \asymp 2^n n$.

Теорема 1. *Пусть* $d = 2$ *и* $r = (r_1, r_1),\ r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тогда при* $2 \le p \le \infty,\ 2 \le \theta \le \infty$ *имеют место оценки*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \asymp d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Замечание **1.** При $p = \infty$ условие $r_1 > \dfrac{1}{2}$ можно ослабить, а именно можно предполагать, что $r_1 > 0$.

Доказательство. Чтобы воспользоваться леммой A, установим оценку сверху поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$, а снизу — энтропийных чисел $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$. Итак, начнем с установления оценки снизу величины $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$. Предварительно заметим, что в силу вложения $B^r_{\infty,\theta} \subset B^r_{p,\theta},\ 1 \le p < \infty$, при этом достаточно ограничиться рассмотрением классов $B^r_{\infty,\theta}$.

Пусть $\theta \in [2,\infty)$. Тогда воспользуемся набором функций $\{f_i\}_{i=1}^{A_n},\ A_n \ge 2^{\frac{|\mathcal{D}_n|}{2}}$, построенным В. Н. Темляковым [15] при исследовании классов H^r_∞. Не останавливаясь подробно на структуре функций из этого набора, отметим только, что они являются некоторыми тригонометрическими полиномами с „номерами” гармоник из $\mathcal{D}_n$, имеющими следующие свойства:

1) $\|\delta_s(f_i^n)\|_\infty \le 1,\ i = \overline{1, A_n},\ s \in \mathcal{S}_n$;

2) $\|f_i^n - f_j^n\|_\infty \ge C_1 n,\ i \ne j,\ C_1$ — некоторая абсолютная постоянная.

Отправляясь от свойства 1, нетрудно убедиться, что каждая функция из набора

$$F_n = \left\{ C_2(r_1,\theta) 2^{-r_1 n} n^{-\frac{1}{\theta}} f_i^n \right\}_{i=1}^{A_n}$$

с соответствующей постоянной $C_2(r_1,\theta)$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta}$. Действительно, для любой функции $f_i^n,\ i = \overline{1, A_n}$, можем записать

$$\|f_i^n\|_{B^r_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{s\in\mathcal{S}_n} 2^{(s,r)\theta}\|A_s(f_i^n)\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{s\in\mathcal{S}_n} 2^{(s,r)\theta}\left\|A_s * \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1}\delta_{s'}(f_i^n)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\in\mathcal{S}_n} 2^{(s,r)\theta}\|A_s\|_1^\theta\left\|\sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1}\delta_{s'}(f_i^n)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\in\mathcal{S}_n} 2^{(s,r)\theta}\sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1}\|\delta_{s'}(f_i^n)\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta} \ll 2^{nr_1}n^{1/\theta}.$$

Отсюда следует, что $F_n \subset B^r_{\infty,\theta}$.

Пусть $M = |\mathcal{D}_n| \asymp 2^n n$. Тогда из (1), в силу свойства 2 для функций f_i^n, $i = \overline{1, A_n}$, получаем искомую оценку снизу величины $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$ в случае $\theta \in [2,\infty)$:

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \gg \varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty) \gg \varepsilon_M(F_n, L_\infty) \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1}n^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{2}$$

Если же $\theta = \infty$, то искомая оценка снизу для $\varepsilon_M(H^r_p, L_\infty)$ следует из результата, полученного В. Н. Темляковым [15]:

$$\varepsilon_M(H^r_\infty, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1}, \qquad r_1 > 0. \tag{3}$$

Теперь приведем известные оценки сверху колмогоровских поперечников $d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$, выделив при этом несколько случаев.

Пусть $2 \le \theta < \infty$, $2 \le p < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{2}$. Тогда в [16], в частности для $d = 2$, получена оценка

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{4}$$

В случае $2 \le \theta < \infty$, $p = \infty$, $r_1 > 0$ соответствующая оценка сверху поперечника $d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty)$ следует из результата, полученного в [17], при этом

$$d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{5}$$

Важно отметить, что оценка (5) реализуется подпространством тригонометрических полиномов размерности M.

Пусть теперь имеет место случай $2 \le p < \infty$, $\theta = \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{2}$. Тогда (см. [18])

$$d_M(H^r_p, L_\infty) \ll M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1}. \tag{6}$$

Наконец, при $p = \infty$, $\theta = \infty$, $r_1 > 0$ оценка поперечника $d_M(H^r_\infty, L_\infty)$ имеет вид

$$d_M(H^r_\infty, L_\infty) \ll M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1} \tag{7}$$

и реализуется подпространством тригонометрических полиномов (см. [9, с. 55]) размерности M.

Таким образом, принимая во внимание оценки (2), (4) – (7) и используя лемму А, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 1 доказана.

Прокомментируем полученный результат и приведем соответствующее утверждение для классов $W^r_{p,\alpha}$.

Сначала отметим, что порядки величин, содержащихся в теореме 1, в одномерном случае приведены в работе [1], при этом

$$\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp d_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1},$$

$2 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$ ($r_1 > 0$ при $p = \infty$).

Далее, приняв во внимание замечания к оценкам (5), (7) и воспользовавшись теоремой 1, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1$'$. *Пусть $d = 2,\ r = (r_1, r_1),\ r_1 > 0$. Тогда при $2 \le \theta \le \infty$ имеют место оценки*

$$\lambda_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp d^T_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теперь приведем результат, касающийся энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов $W^r_{p,\alpha}$ в пространстве L_∞.

Теорема 2. *Пусть $d = 2,\ r = (r_1, r_1),\ r_1 > \dfrac{1}{2}$. Тогда при $2 \le p < \infty$ справедливы оценки*

$$\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, L_\infty) \asymp d_M(W^r_{p,\alpha}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Доказательство. Соотношения (8) следуют из известных результатов и леммы А. Так, оценка сверху поперечника $d_M(W^r_{p,\alpha}, L_\infty),\ 2 \le p \le \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$, в частности при $d = 2$, установлена Э. С. Белинским [18]. Соответствующая оценка снизу для энтропийных чисел $\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, L_\infty)$ при $d = 2,\ 1 < p < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{p}$ получена В. Н. Темляковым [15]. Таким образом, принимая во внимание эти оценки и используя лемму А, приходим к (8).

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 2.** В связи с оценками (8) отметим, что порядки величин $\varepsilon_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_\infty)$ и $d_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_\infty)$ известны [19] и являются следствием результатов, полученных в работах [15] и [18]. Что касается поперечников $\lambda_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_\infty)$ и $d^T_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_\infty)$, то вопрос об их порядках при $d \ge 2$ остается, по-видимому, открытым.

Теперь перейдем к исследованию асимптотических характеристик классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_1. Рассмотрим сначала одномерный случай.

Теорема 3. *Пусть $1 \le p \le \infty,\ r_1 > 0,\ 1 \le \theta \le \infty$. Тогда при $d = 1$ справедливы соотношения*

$$d_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_1) \asymp \lambda_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_1) \asymp d^T_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_1) \asymp M^{-r_1}. \tag{9}$$

Доказательство. Оценки сверху для всех трех поперечников следуют из теоремы 3.6 [10] (гл. 1, § 3), в которой получен порядок величины

$$E_n(H_p^{r_1})_1 = \sup_{f \in H_p^{r_1}} \inf_{t \in T(n)} \|f - t\|_1 \asymp n^{-r_1}, \qquad r_1 > 0, \quad 1 \le p \le \infty,$$

где $T(n)$ — множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, полагая $M = 2n + 1$, имеем, например, для поперечника $d_M(B_{p,\theta}^{r_1}, L_1)$

$$d_M(B_{p,\theta}^{r_1}, L_1) \le d_M(H_p^{r_1}, L_1) \ll E_n(H_p^{r_1})_1 \ll M^{-r_1}. \tag{10}$$

Переходя в (9) к доказательству оценок снизу, заметим, что для этого достаточно получить соответствующую оценку для колмогоровского поперечника.

Поэтому, сопоставляя (10) с оценкой энтропийных чисел $\varepsilon_M(B_{p,\theta}^r, L_1)$ (теорема A) при $\nu = 1$ и используя лемму A, приходим к искомой оценке снизу поперечника $d_M(B_{p,\theta}^{r_1}, L_1)$.

Теорема 3 доказана.

Далее, при рассмотрении многомерного случая нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Пусть Q_n^r обозначает множество вида

$$Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma) \le n} \rho(s),$$

которое называют ступенчатым гиперболическим крестом. В случае, когда $r = r' = (r'_1, \ldots, r'_d)$, соответствующее множество $Q_n^{r'}$ называют расширенным ступенчатым гиперболическим крестом.

Положим

$$T(Q_n^r) = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k \in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)}, \;\; c_k \in \mathbb{C} \right\}$$

и для $f \in L_q^0(\pi_d)$ определим величину

$$E_{Q_n^r}(f)_q = \inf_{t \in T(Q_n^r)} \|f - t\|_q, \qquad 1 \le q \le \infty,$$

— наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами с „номерами” гармоник из Q_n^r. Для $F \subset L_q^0(\pi_d)$ положим

$$E_{Q_n^r}(F)_q = \sup_{f \in F} E_{Q_n^r}(f)_q. \tag{11}$$

Аналогично определяются множество $T(Q_n^{r'})$, а также величины $E_{Q_n^{r'}}(f)_q$ и $E_{Q_n^{r'}}(F)_q$.

Перед тем как перейти к формулировке и доказательству полученных результатов, приведем, для полноты, известные оценки величин (11) и $E_{Q_n^{r'}}(F)_q$ для классов $F = B_{p,\theta}^r$ при $q = 1$.

Так, в [20] в несколько других обозначениях получены соотношения

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \qquad 1<p\le 2, \quad 1\le\theta<\infty, \quad r_1>0,$$
$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_1 \asymp 2^{-nr_1}, \qquad 2<p<\infty, \quad 1\le\theta\le 2, \quad r_1>0. \tag{12}$$

Затем в [21] в двумерном случае и при $r=(r_1,r_1)$, $r_1>0$, была установлена порядковая оценка

$$E_{Q_n^r}(B^r_{p,\theta})_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}, \qquad 2<p\le\infty, \quad 2<\theta<\infty. \tag{13}$$

Ниже мы получим точную по порядку оценку величины $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_1$, $2<p\le\infty$, $2\le\theta\le$ $\le\infty$, для всех размерностей $d>2$, но предварительно установим порядок тригонометрического поперечника классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_1.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $2\le p\le\infty$, $2\le\theta\le\infty$, $r_1>0$. *Тогда справедливо соотношение*

$$d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_1) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\theta\in[2,\infty)$. В этом случае оценка сверху следует из оценки величины $E_{Q_n^r}(B^r_{p,\theta})_p$, $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, которая, в свою очередь, является следствием соотношения

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}, \qquad 1<q<2<p<\infty, \quad 2\le\theta<\infty, \quad r_1>0$$

(см. [22], теорема 3).

Если же $\theta=\infty$, то искомая оценка сверху поперечника $d^T_M(H^r_p, L_1)$ следует из соотношения (см. [9, с. 35])

$$E_{Q_n^{r'}}(H^r_p)_p \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}, \qquad 2\le p<\infty, \quad r_1>0.$$

Оценка снизу в (14) следует из оценки колмогоровского поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_1)$ [1]:

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_1) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}, \qquad 2\le p\le\infty, \quad 2\le\theta\le\infty, \quad r_1>0.$$

Теорема 4 доказана.

***Замечание* 3.** При выполнении условий теоремы 4 порядок линейного поперечника $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_1)$ установлен в [20].

Теперь, воспользовавшись теоремой 4, получим порядок величины $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_1$ и таким образом дополним оценки (12), (13).

Теорема 5. *Пусть* $2<p\le\infty$, $2<\theta\le\infty$, $r_1>0$. *Тогда справедливо соотношение*

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{15}$$

Доказательство. Оценка сверху следует из оценок величин $E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_p$, $2<p<\infty$, $2<\theta<\infty$, и $E_{Q_n^{r'}}(H^r_p)_p$, $2<p<\infty$, которые получены в [22] и [9, с. 35] соответственно.

Оценка снизу в (15) является следствием оценки тригонометрического поперечника $d^T_M(B^r_{p,\theta}, L_1)$, $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, которая установлена в предыдущей теореме.

Теорема 5 доказана.

В заключение этой части работы приведем утверждение, в котором получены оценки некоторых аппроксимативных характеристик классов $W^r_{p,\alpha}$.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда имеют место соотношения*

$$d_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \asymp d^T_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{16}$$

Доказательство. Оценки сверху для обоих поперечников реализуются при приближении функций $f \in W^r_{p,\alpha}$ в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S^\gamma_n(f) = \sum_{(s,\gamma)\le n} \delta_s(f)$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ (см. [9], гл. 2, § 2).

Соответствующие оценки снизу в (16) являются следствием оценки

$$d_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \gg (M^{-1}\log^{d-1} M)^{r_1}, \qquad r_1 > 0,$$

которая получена в [13].

Теорема 6 доказана.

Приведем некоторые комментарии относительно оценок (16).

В первую очередь отметим, что порядок линейного поперечника

$$\lambda_M(W^r_{p,\alpha}, L_1), \qquad 1 < p < \infty, \quad r_1 > 0,$$

известен [23], и при этом

$$\lambda_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Кроме того, воспользовавшись известными результатами, легко установить порядок энтропийных чисел $\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, L_1)$. Так, сопоставляя оценку сверху колмогоровского поперечника $d_M(W^r_{p,\alpha}, L_1)$ (см. (16)) с оценкой снизу энтропийных чисел $\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, L_1)$ [23]:

$$\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \gg (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}, \qquad 1 < p < \infty, \quad r_1 > 0,$$

в силу теоремы A приходим к соотношению

$$\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}, \qquad 1 < p < \infty, \quad r_1 > 0. \tag{17}$$

Наконец, в дополнение к соотношениям (16), (17) приведем оценки, которые следуют из работы [13] (см. также [18, 24]) и имеют вид

$$\varepsilon_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \asymp d_M(W^r_{\infty,\alpha}, L_1) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

3. Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве $B_{1,1}$. В предыдущем пункте получены оценки исследуемых асимптотических характеристик классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_1 при определенных ограничениях на параметры p и θ. В связи с этим обстоятельством представляется интересным исследовать аналогичные характеристики тех же классов, но в пространстве $B_{1,1}$, норма в котором определяется по формуле

$$\|f\|_{B_{1,1}} = \sum_s \|A_s(f)\|_1.$$

Для изложения полученных результатов нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Пусть

$$\overline{\rho}(s) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le k_j \le 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\right\}$$

и

$$T(\overline{\rho}(s)) = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k \in \overline{\rho}(s)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)} \right\}.$$

Заметим, что каждый полином $t \in T(\overline{\rho}(s))$, $s_j \ge 2$, $j = \overline{1, d}$, может быть представлен в виде

$$t(x) = e^{i(k^s, x)} t^1(x),$$

где $k^s = (k_1^{s_1}, \ldots, k_d^{s_d})$, $k_j^{s_j} = 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}$, $j = \overline{1, d}$, и $t^1(x)$ — полином степени $2^{s_j - 2}$ по переменной x_j, $j = \overline{1, d}$.

Далее, для $m = (m_1, \ldots, m_d)$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, обозначим через $RT(m)$ множество действительных тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le m_j, j = \overline{1, d}} \hat{t}(k) e^{i(k,x)},$$

и пусть

$$T'(\overline{\rho}(s)) = \left\{ t \colon t(x) = e^{i(k^s, x)} t^1(x),\ t^1 \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Для четного n определим следующие множества:

$$\Omega_n^* = \left\{ s \colon s_1 + \ldots + s_d = n,\ s_j - \text{четные числа},\ j = \overline{1, d} \right\},$$

$$Q'_n = \bigcup_{s \in \Omega_n^*} \overline{\rho}(s),$$

$$T'(Q'_n) = \left\{ t : t(x) = \sum_{s \in \Omega_n^*} e^{i(k^s, x)} t_s^1(x),\ t_s^1 \in RT(2^{s-2}) \right\},$$

$$T'(Q'_n)_\infty = \left\{ t \in T'(Q'_n) \colon \|t_s^1\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $r_1 > 0$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда имеют место соотношения*

$$d_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu - 1} M)^{r_1 + 1 - \frac{1}{\theta}}. \tag{18}$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться леммой А, получим оценку снизу энтропийных чисел $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1})$, а сверху — поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1})$. При этом оценку снизу достаточно установить при $\nu = d$ и $p = \infty$.

Пусть $\theta \in [1, \infty)$. В таком случае воспользуемся тем фактом (см. доказательство теоремы 3 [1]), что во множестве $T'(Q'_n)_\infty 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \subset B^r_{\infty,\theta}$ найдется набор функций $\{f_j\}_{j=1}^{2^M}$ таких, что при $i \ne j$ выполнено неравенство

$$\|f_i - f_j\|_2 \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}, \qquad M \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{19}$$

Отправляясь от (19), с помощью элементарных преобразований легко получить оценку

$$\|f_i - f_j\|_{B_{1,1}} \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Действительно, для $g \in T'(Q'_n)_\infty$ имеем

$$\|g\|_2^2 = \sum_{s\in\Omega_n^*} \left\| \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} A_{s'}(g) \right\|_2^2 \ll \sum_{s\in\Omega_n^*} \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} \|A_{s'}(g)\|_2^2 \le$$

$$\le \sum_{s\in\Omega_n^*} \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} \|A_{s'}(g)\|_1 \|A_{s'}(g)\|_\infty \le \|g\|_{B_{1,1}} \|g\|_{B_{\infty,\infty}} \ll \|g\|_{B_{1,1}}. \tag{20}$$

Далее, принимая во внимание, что согласно (19) существует 2^M функций $\{g_j\}_{j=1}^{2^M} \in T'(Q'_n)_\infty$ таких, что при $i \neq j$

$$\|g_i - g_j\|_2 \gg n^{\frac{d-1}{2}},$$

из (19) и (20) приходим к оценке

$$\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, B_{1,1}) \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{21}$$

Пусть теперь $\theta = \infty$. В этом случае оценка снизу величины $\varepsilon_M(H^r_\infty, B_{1,1})$ известна и получена В. Н. Темляковым [23]:

$$\varepsilon_M(H^r_\infty, B_{1,1}) \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1}. \tag{22}$$

Переходя к доказательству оценки сверху поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1})$, заметим, что в силу вложения $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{1,\theta}$ достаточно ограничиться рассмотрением случая $p = 1$. Покажем, что искомая оценка реализуется при приближении M-мерным подпространством тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из расширенного ступенчатого гиперболического креста $Q_n^{r'} = \bigcup_{(s,\gamma')\le n} \rho(s)$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Итак, пусть $f \in B^r_{1,\theta}$, $\theta \in [1, \infty)$. Тогда в качестве приближающего полинома для функции f рассмотрим полином вида

$$t_n = \sum_{(s,\gamma')<n} A_s(f),$$

где число $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет соотношению $2^n n^{\nu-1} \asymp M$. Приняв во внимание определение нормы в пространстве $B_{1,1}$, можем записать

$$\|f - t_n\|_{B_{1,1}} = \left\| \sum_{(s,\gamma')\ge n} A_s(f) \right\|_{B_{1,1}} = \sum_s \left\| A_s * \sum_{(s,\gamma')\ge n} A_s(f) \right\|_1 \le$$

$$\le \sum_{(s,\gamma')\ge n-d} \left\| A_s * \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} A_{s'}(f) \right\|_1 \le \sum_{(s,\gamma')\ge n-d} \|A_s\|_1 \left\| \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} A_{s'}(f) \right\|_1 \ll$$

$$\ll \sum_{(s,\gamma')\ge n-d} \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} \|A_{s'}(f)\|_1 \ll \sum_{(s,\gamma')\ge n-2d} \|A_s(f)\|_1 =$$

$$= \sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} 2^{(s,r)}\|A_s(f)\|_1 2^{-(s,r)} = I. \tag{23}$$

Далее, применив к I неравенство Гельдера с показателем θ (с естественной модификацией при $\theta = 1$) и воспользовавшись затем леммой Б, будем иметь

$$I \leq \left(\sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} 2^{(s,r)\theta}\|A_s(f)\|_1^\theta\right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} 2^{-(s,r)\theta'}\right)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{1,\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} 2^{-(s,r)\theta'}\right)^{1/\theta'} \leq \left(\sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} 2^{-(s,r)\theta'}\right)^{1/\theta'} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{24}$$

Аналогично, в случае $\theta = \infty$ из (23) находим

$$\|f - t_n\|_{B_{1,1}} \ll \sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} \|A_s(f)\|_1 \ll \sum_{(s,\gamma')\geq n-2d} 2^{-(s,r)} \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}. \tag{25}$$

Сопоставляя (23)–(25) и принимая во внимание соотношение $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, приходим к оценке

$$d_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1}) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{26}$$

Таким образом, для завершения доказательства соотношений (18) осталось воспользоваться леммой А по отношению к оценкам (21), (22) и (26).

Теорема 7 доказана.

Приведем некоторые комментарии.

В первую очередь отметим, что оценка снизу колмогоровского поперечника $d_M(H^r_\infty, B_{1,1})$ получена В. Н. Темляковым [23].

Далее, поскольку порядок поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1})$ реализуется подпространством тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из множества $Q^{r'}_n$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, то, как следствие (18), можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тогда имеют место соотношения*

$$\lambda_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp d^T_M(B^r_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{27}$$

***Замечание* 4.** Сопоставляя (18) и (27) с оценками, содержащимися в теореме 4, а также в теореме 5 [1], видим, что при $d \geq 2$, $2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$, $r_1 > 0$ порядки соответствующих величин в пространствах L_1 и $B_{1,1}$ различаются множителем $(\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}}$. Что касается одномерного случая, то здесь ситуация иная, а именно те характеристики классов $B^r_{p,\theta}$, о которых идет речь в настоящей работе, имеют одинаковые порядки в пространствах L_1 и $B_{1,1}$.

В заключение приведем утверждение, относящееся к классам $W^r_{p,\alpha}$.

Теорема 9. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда справедливы соотношения*

$$d_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1}) \asymp \varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 7, будем использовать лемму А. С одной стороны, примем во внимание известную оценку энтропийных чисел $\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1})$ [23]:

$$\varepsilon_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1}) \gg M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}, \qquad 1 \le p < \infty. \tag{29}$$

С другой стороны, нетрудно получить соответствующую оценку сверху для колмогоровского поперечника $d_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1})$.

Пусть $p \in (1,2]$. Тогда, учитывая, что $W^r_{p,\alpha} \subset B^r_{p,2}$, и используя оценку поперечника $d_M(B^r_{p,2}, B_{1,1})$ (см. теорему 7), можем записать

$$d_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1}) \ll d_M(B^r_{p,2}, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Если же $p \in (2,\infty)$, то, отправляясь от (30), имеем

$$d_M(W^r_{p,\alpha}, B_{1,1}) \ll d_M(W^r_{2,\alpha}, B_{1,1}) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Таким образом, для завершения доказательства соотношений (28) осталось воспользоваться леммой А по отношению к оценкам (29) – (31).

Теорема 9 доказана.

***Замечание* 5.** Сопоставляя теоремы 8 и 6 (см. также (17)), видим, что при $d \ge 2$ порядки соответствующих величин классов $W^r_{p,\alpha}$ в пространствах L_1 и $B_{1,1}$ различаются множителем $(\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}}$.

Литература

1. *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского – Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2015. – **67** , № 11. – С. 1540 – 1556.
2. *Dinh Dung.* Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension // J. Complexity. – 2001. – **17**, № 2. – P. 467 – 492.
3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)}_{p,\theta} * B(0 \le \le x_j \le 2\pi; j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
5. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quant. Approxim. – New York: Acad. Press, 1980. – P. 163 – 176.
6. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – P. 107 – 111.
7. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
8. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
9. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
10. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
11. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
12. *Carl B.* Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. – 1981. – **41**. – P. 290 – 306.
13. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 6. – С. 922 – 925.

14. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approxim. – 1996. – **2**, № 1. – P. 89 – 98.
15. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity. – 1995. – **11**. – P. 293 – 307.
16. *Романюк А. С.* О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 79 – 92.
17. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**. – P. 181 – 213.
18. *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1990. – С. 22 – 37.
19. *Temlyakov V. N.* On two problems in the multivariate approximation // East J. Approxim. – 1998. – **4**, № 4. – P. 505 – 514.
20. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 2. – С. 93 – 114.
21. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 3. – С. 429 – 442.
22. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
23. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
24. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.

Получено 02.03.16