УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН Україні, Київ)

КУЛОНІВСЬКА ДИНАМІКА ДВОХ ТА ТРЬОХ РІВНИХ НЕГАТИВНИХ ЗАРЯДІВ НА ПЛОЩИНІ У ПОЛІ ФІКСОВАНИХ ДВОХ РІВНИХ ПОЗИТИВНИХ ЗАРЯДІВ

Periodic solutions bounded for positive times are found for the two-dimensional Coulomb equation of motion of two and three identical negative charges in the field of two equal fixed positive charges. These systems have equilibrium configurations, and the obtained bounded solutions converge to the indicated configurations in the infinite-time limit. The Lyapunov center theorem is applied.

Найдены периодические и ограниченные для положительного времени решения уравнений движения Кулона на плоскости для двух и трех отрицательных одинаковых зарядов в поле двух одинаковых фиксированных положительных зарядов. Эти системы имеют равновесные состояния, к которым сходятся полученные ограниченные решения в пределе бесконечного времени. При этом использована центральная теорема Ляпунова.

1. Вступ. Важливою задачею математики є знаходження розв'язків рівнянь руху Ньютона систем багатьох d-вимірних частинок (тіл, зарядів) з сингулярною потенціальною енергією U у вигляді збіжних на всьому часовому інтервалі рядів. Ці рівняння для систем N тіл з масами $m_j,\ j=1,\ldots,N$, мають вигляд

$$m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}=-\frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j},\quad j=1,\ldots,N,\quad x_{(N)}=(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^{dN},\quad x_j=(x_j^1,\ldots,x_j^d). \tag{1.1}$$

Важливим класом цих систем є такі, що мають рівноважні конфігурації (рівновагу), в яких симетрична матриця U^0 частинних других похідних потенціальної енергії не має нульових власних значень, а потенціальна енергія є дійсно аналітичною функцією в них. Кулонівські лінійні системи двох та трьох негативних зарядів e_0 однакової маси в полі двох зовнішніх точкових фіксованих позитивних зарядів e' є саме такими. Цей важливий факт дозволив нам побудувати періодичні розв'язки поблизу рівноваги рівнянь руху Кулона цих негативних зарядів, розташованих на такій прямій, що позитивні заряди розташовані симетрично на перпендикулярі до цієї прямої [1]. Ми застосували теореми Ляпунова (центральну), Мозера, Вайнстайна та Зігеля, які вимагають знання спектра матриці U^0. Перші дві теореми, які гарантують існування періодичних розв'язків у вигляді збіжних рядів, обмежували значення $\frac{e_0}{e'}$ через умову нерезонансності. Теорема Вайнстайна встановлює існування періодичних розвязків без цієї умови, але може бути застосована тільки для систем зі стійкою рівновагою (U^0 є додатно визначеною матрицею і рівновага є мінімумом потенціальної енергії).

У цій статті ми вперше розглядаємо кулонівську площинну систему двох та трьох негативних зарядів e_0 однакової маси в полі двох точкових фіксованих позитивних зарядів e'. Ми також переформулюємо наші результати для системи таких трьох негативних зарядів на прямій у простішому вигляді, тому що ми змогли знайти корені характеристичного полінома U^0 в явній формі (так само, як і для площинних систем) без використання формули Кардано, як це було в [1]. Ми встановлюємо, що матриця U^0 є прямою сумою двох (2×2)- чи (3×3)-матриць відповідно для площинних систем двох чи трьох зарядів. При цьому (3×3)-матриці зображуються сумами таких, що мають нульові власні значення, та матриць, пропорційних одиничній. Аналогічну властивість має і (3×3)-матриця U^0 у системі трьох зарядів на прямій.

Для використання згаданих теорем та визначення спектра U^0 необхідно перерахувати змінні. Ми це зробимо для їх індексів (перший індекс у парі відповідає номеру заряду) наступним чином:

$$(1,1) = 1, \ldots, (N,1) = N, (1,2) = N+1, \ldots, (N,2) = 2N, \ldots,$$
$$(N(d-1), d) = N(d-1)+1, \ldots, (N,d) = dN.$$

Тоді рівняння руху Ньютона для систем тіл з однаковою масою m мають вигляд

$$m\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U(x_{(n)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad x_{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Існування обмежених для додатного часу розв'язків (1.1) доведемо з допомогою наступної теореми.

Теорема 1.1. *Нехай матриця частинних других похідних потенціальної енергії U в* (1.2) *має ненульові власні значення $m\sigma_j$ у рівновазі x_j^0, $j = 1, \ldots, n$, а U є у ній дійсно аналітичною функцією, та $\sigma_j < 0$, $j = 1, \ldots, p$. Тоді рівняння руху* (1.2) *має обмежені для додатного часу розв'язки, які є дійсно-аналітичними функціями в початку координат за p дійсними параметрами та*

$$||x - x^0||_\lambda < \infty, \quad ||\dot{x}||_\lambda < \infty, \tag{1.3}$$

де

$$||x||_\lambda = \sup_{t \geq 0} \max_{j \in (1,\ldots,n)} e^{\lambda t}|x_j(t)|, \quad \lambda < \lambda_0 = \min_{j=1,\ldots,p} \lambda_j, \quad \lambda_j = \sqrt{-\sigma_j}.$$

Можливість застосування цієї теореми зумовлена тим, що кулонівський потенціал є дійсно-аналітичною функцією поза початком координат і дійсно-аналітичну функцію можна продовжити до голоморфної в комплексному околі аналітичності. У статті [1] ми використовували цю теорему з умовою відсутності резонансів між λ_j, $j \leq p$. Результати про існування локальної та точної глобальної динаміки для інших кулонівських систем отримано в [2–4].

Опишемо коротко структуру статті. У другому пункті ми доводимо існування обмежених розв'язків (1.1) з умовою (1.3) для площинної системи двох негативних однакових зарядів. У третьому та четвертому пунктах ми доводимо існування обмежених (з умовою (1.3)) та періодичних розв'язків (1.1) для систем трьох негативних зарядів відповідно на прямій та площині. У додатку наведено найбільш вагомі міркування у доведенні теореми 1.1.

2. Два заряди на площині. У цьому пункті ми розглядаємо площинну систему двох однакових негативних зарядів у полі двох однакових позитивних зарядів, розташованих у точках b_1, b_2, з потенціальною енергією

$$U(x_{(2)}) = e_0^2|x_1 - x_2|^{-1} - e_0 e' \sum_{j,k=1,2} |x_j - b_k|^{-1}, \tag{2.1}$$

де

$$|x_j|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2, \quad x_j = (x_j^1, x_j^2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$b_j = (b_j^1, b_j^2) \in \mathbb{R}^2, \quad b_j^1 = 0, \quad b_1^2 = -b_2^2 = b.$$

Рівняння руху для цієї системи збігається з (1.1), де $N = 2,\ d = 2$.

Перші частинні похідні цієї потенціальної енергії мають вигляд

$$\frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_1^\alpha} = -e_0^2 \frac{x_1^\alpha - x_2^\alpha}{|x_1 - x_2|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^{2} \frac{x_1^\alpha - b_k^\alpha}{|x_1 - b_k|^3},$$
$$\frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_2^\beta} = -e_0^2 \frac{x_2^\beta - x_1^\beta}{|x_1 - x_2|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^{2} \frac{x_2^\beta - b_k^\beta}{|x_2 - b_k|^3}.$$

Рівновагу задамо рівностями $x_1^{01} = a,\ x_2^{01} = -a,\ x_1^{02} = 0,\ x_2^{02} = 0$, прирівнюючи до нуля праві частини виразів для цих похідних. В результаті виникають рівноважні співвдношення між e_0, $e',\ a,\ b$:

$$\frac{e_0}{(2a)^3} = \frac{e'}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3}.$$

Тут ми врахували, що

$$|x_j^0 - b_k|^2 = a^2 + b^2.$$

З рівноважного співвідношення випливає

$$a = (4 - \eta')^{-1/2} \sqrt{\eta'} b = (3 - \eta)^{-1/2} \sqrt{\eta} b, \quad \eta' = \left(\frac{e_0}{e'}\right)^{2/3} < 4, \quad \eta = \frac{3}{4}\eta' < 3. \tag{2.2}$$

Другі частинні похідні потенціальної енергії мають вигляд

$$\frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} = \frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_2^\beta \partial x_1^\alpha} = e_0^2 \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_1 - x_2|^3} - 3\frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{|x_1 - x_2|^5} \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

та

$$\frac{\partial^2 U(x_{(2)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha} =$$
$$= -\frac{e_0^2 \delta_{\alpha,\beta}}{|x_1 - x_2|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - b_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5} \right] + 3e_0^2 \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{|x_1 - x_2|^5},$$

де $\delta_{\alpha,\beta}$ — функція Кронекера. Задамо $u, u',\ u_*,\ u'_*,\ u''_*$ так:

$$u' = \frac{e_0^2}{4a^3}, \quad u'_* = u_* - \frac{3u'}{2}, \quad u_* = u'\eta,$$
$$u''_* = \frac{6e_0 e' b^2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^5} = \frac{6e_0 e'}{(2a)^5} \left(\frac{e_0}{e'}\right)^{5/3} \frac{3 - \eta}{\eta} a^2 = u'(3 - \eta),$$

та

$$T_j(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5}.$$

При цьому ми використали рівноважне співвідношення та (2.2) у виразі для u''_*.

Нехай $T_j^0(\alpha,\beta)$ буде рівноважним значенням для $T_j(\alpha,\beta)$. Тоді ($|x_j^0 - b_k|^2 = a^2 + b^2$)

$$T_j^0(\alpha,\beta) = 2(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,\beta}(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}).$$

Доведемо це. Нехай

$$\tilde{T}_j^0(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{2}(x_j^{0\alpha} - b_k^\alpha)(x_j^{0\beta} - b_k^\beta),$$

тоді

$$\tilde{T}_1^0(1,2) = -((a-b_1^1)b_1^2 + (a-b_2^1)b_2^2) = -(ab-ab) = 0,$$

$$\tilde{T}_2^0(1,2) = -((-a-b_1^1)b_1^2 + (-a-b_2^1)b_2^2) = ab-ab = 0,$$

$$\tilde{T}_1^0(1,1) = (a-b_1^1)(a-b_1^1) + (a-b_2^1)(a-b_2^1) = 2a^2,$$

$$\tilde{T}_2^0(1,1) = (-a-b_1^1)(-a-b_1^1) + (-a-b_2^1)(-a-b_2^1) = 2a^2,$$

$$\tilde{T}_1^0(2,2) = \tilde{T}_2^0(2,2) = (b_1^2)^2 + (b_2^2)^2 = 2b^2.$$

Неважко перевірити, що елементи матриця U^0 других похідних у рівновазі мають вигляд

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta} = U^0_{2,\alpha;2,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{e_0^2}{(2a)^3} - \frac{6e_0e'}{(\sqrt{a^2+b^2})^5}(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}) + 3\frac{e_0^2}{(2a)^3}\delta_{\alpha,1}\right) =$$

$$= \delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{u'}{2} - \delta_{\alpha,1}u'_* - \delta_{\alpha,2}u''_*\right),$$

$$U^0_{1,\alpha;2,\beta} = U^0_{2,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}).$$

Таким чином,

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}U^0_{\alpha;j,k}, \quad U^0 = U^0_1 \oplus U^0_2. \tag{2.3}$$

Перенумеруємо тепер індекси змінних за правилом

$$(1,1) = 1, \quad (2,1) = 2, \quad (1,2) = 3, \quad (2,2) = 4. \tag{2.4}$$

Як наслідок, елементи симетричних двовимірних матриць U_1^0, U_2^0 задано таким чином:

$$U^0_{1;1,1} = U^0_{1;2,2} = \frac{u'}{2} - u'_*, \quad U^0_{2;3,3} = U^0_{2;4,4} = \frac{u'}{2} - u''_*, \quad U^0_{1;1,2} = -u', \quad U^0_{2;3,4} = \frac{u'}{2}.$$

Очевидно, що характеристичний поліном матриці U^0 обчислено так:

$$p(\lambda) = \mathrm{Det}\,(-U^0 + \lambda I) = \left(\left(\frac{u'}{2} - u'_* - \lambda\right)^2 - u'^2\right)\left(\left(\frac{u'}{2} - u''_* - \lambda\right)^2 - \frac{u'^2}{4}\right).$$

Його корені ζ_j мають вигляд

$$\zeta_1 = -\frac{u'}{2} - u'_*, \quad \zeta_2 = \frac{3u'}{2} - u'_*, \quad \zeta_3 = u' - u''_*, \quad \zeta_4 = -u''_* = -u'(3-\eta),$$

або

$$\zeta_1 = u' - u_* = u'(1-\eta), \quad \zeta_2 = 3u' - u_* = u'(3-\eta), \quad \zeta_3 = u'(\eta - 2), \quad \zeta_4 = -u'(3-\eta).$$

Наступна теорема випливає з теореми 1.1, яка гарантує існування обмежених для додатного часу розв'язків (1.1) з умовою (1.3).

Теорема 2.1. *Нехай* $\eta = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{e_0}{e'}\right)^{2/3}$ *належить одному з трьох інтервалів*: $(0,1),\ (2,3),\ (1,2)$. *Тоді площинне рівняння руху Кулона* (1.1) *при* $N = 2$ *з потенціальною енергією* (2.1) *має обмежені для додатного часу розв'язки, які є дійсно-аналітичними функціями в нулі двох для перших двох інтервалів чи трьох для третього інтервалу параметрів, такі, що виконується* (1.3), *де* $\lambda_0 = \sqrt{m^{-1}u'(2-\eta)},\ \lambda_0 = \sqrt{m^{-1}u'(3-\eta)},\ \lambda_0 = \min(\sqrt{m^{-1}u'(2-\eta)},$ $\sqrt{m^{-1}u'(\eta-1)})$ *відповідно для цих інтервалів,* $u' = \dfrac{e_0^2}{4a^3}$ *та* $x^0 = (x_1^0; x_2^0) = (a, 0; -a, 0)$ — *рівновага.*

На інтервалі $u \in (1,2)$ лише одне власне значення ζ_2 є додатним, на інтервалі $(0,1)$ $\zeta_2 > \zeta_1 > 0$, на інтервалі $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ $\zeta_2 > \zeta_3 > 0$, а на інтервалі $\left(\dfrac{5}{2}, 3\right)$ $0 < \zeta_2 < \zeta_3$. На перших трьох інтервалах та четвертому відповідно немає резонансу $\sqrt{\zeta_j},\ j = 1,3,4$, з $\sqrt{\zeta_2}$ та $\sqrt{\zeta_j}$, $j = 1,2,4$, з $\sqrt{\zeta_3}$. Наступна теорема випливає з центральної теореми Ляпунова [5].

Теорема 2.2. *Нехай* η *належить* $(0,3)\backslash\left[\dfrac{5}{2}, 3\right) \cup 1 \cup 2$ *або* $\left(\dfrac{5}{2}, 3\right)$. *Тоді площинне кулонівське рівняння руху* (1.1) *при* $N = 2$ *з потенціальною енергією* (2.1) *має періодичний розв'язок, який залежить від дійсного параметра* c. *Цей розв'язок та його період* $\tau(c)$ *є дійсно-аналітичними функціями у нулі цього параметра та* $\tau(0) = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\zeta_2}}$ *або* $\tau(0) = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\zeta_3}}$.

3. Три заряди на прямій. У цьому пункті ми розглядаємо систему трьох однакових негативних зарядів на прямій в полі двох точкових фіксованих позитивних однакових зарядів розташованих симетрично відносно цієї прямої, з потенціальною енергією

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq k=1}^{3} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - 2e'e_0 \sum_{k=1}^{3} (\sqrt{x_k^2 + b^2})^{-1}, \quad -e_j = e_0 > 0, \quad e' > 0, \quad x_j \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Рівняння руху для цієї системи збігається з (1.1), де $N = 3,\ d = 1$.

Перші частинні похідні цієї потенціальної енергії мають вигляд

$$\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_j} = -e_j \sum_{k=1, k\neq j}^{3} e_k \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3} + \frac{2e'e_0 x_j}{\left(\sqrt{x_j^2 + b^2}\right)^3}.$$

Рівновагу задано рівностями $x_1^0 = -a,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = a$. Перша похідна потенціальної енергії у рівновазі для $j = 2$ дорівнює нулю. Рівноважне співвідношення, що обмежує значення a та b,

$$\frac{5e_0^2}{4a^2} - \frac{2e'e_0a}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = 0,$$

випливає з $\dfrac{\partial}{\partial x_j}U(x_{(3)}) = 0,\ j = 1, 3$. З нього виводяться нові співвідношення

$$\frac{e_0^2}{4a^2} = u', \quad \frac{2e_0e'}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = 5u', \quad (\sqrt{a^2+b^2})^{-1} = \frac{1}{2a}\left(\frac{5e_0}{e'}\right)^{1/3} \tag{3.2}$$

$$a = (4-\eta')^{-1/2}\sqrt{\eta'}b, \quad \eta' = \left(\frac{5e_0}{e'}\right)^{2/3} < 4, \quad \frac{e_0}{e'} < \frac{8}{5}. \tag{3.3}$$

Другі частинні похідні потенціальної енергії мають вигляд

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j^2} = 2e_j \sum_{k=1, k\neq j}^{3} e_k |x_j - x_k|^{-3} + \frac{2e_0e'}{(\sqrt{x_j^2+b^2})^3} - \frac{6e_0e'x_j^2}{(\sqrt{x_j^2+b^2})^5},$$

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_k \partial x_j} = -2e_je_k|x_j - x_k|^{-3}.$$

Неважко перевірити з допомогою (3.2), (3.3), що елементи матриці U^0 других похідних у рівновазі мають вигляд

$$U_{2,1}^0 = U_{1,2}^0 = U_{2,3}^0 = U_{3,2}^0 = -\frac{2e_0^2}{a^3} = -8u', \qquad U_{3,1}^0 = U_{1,3}^0 = -u',$$

$$U_{1,1}^0 = U_{3,3}^0 = 9u' + \frac{2e_0e'}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} - \frac{6e_0e'a^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^5}, \quad U_{2,2}^0 = 16u' + \frac{2e_0e'}{b^3}.$$

Рівності (3.2), (3.3) приводять до таких:

$$\frac{6e_0e'a^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^5} = u_* = 5uu', U_{2,2}^0 = u'g, \quad U_{1,1}^0 = U_{3,3}^0 = 14u' - u_* = (14-5u)u',$$

де

$$g = 16 + 40(4-\eta')^{-3/2} = 16 + g_*(u), \quad g_* = 5\sqrt{27}(3-u)^{-3/2}, \quad u = \frac{3}{4}\left(\frac{5e_0}{e'}\right)^{2/3} = \frac{3}{4}\eta' \tag{3.4}$$

та $21 < g < \infty, 0 < u < 3$, тобто

$$u'^{-1}U^0 = \begin{pmatrix} 14-5u & -8 & -1 \\ -8 & g & -8 \\ -1 & -8 & 14-5u \end{pmatrix} = -2U_{*1} + 5(3-u)I,$$

$$U_*(g_1) = U_{*1} = 2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & 2g_1 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2g_1 = -g + 5(3-u).$$

Тут I — одинична матриця, U_{*1} має тотожні перший та третій рядки, тому $\mathrm{Det}\, U_{*1} = 0$. Це дозволяє знайти корені характеристичних поліномів p_{*1} для U_{*1} та p' для $U' = u'^{-1}U^0$:

$$p_*(\lambda, q) = \mathrm{Det}\,(\lambda I - U_*(q)) = -[(q-\lambda)(\lambda-1)+32]\lambda = [\lambda^2 - (q+1)\lambda + q - 32]\lambda.$$

Корені $p_*(q)$ записано так:

$$2\lambda = q + 1 \pm \sqrt{(q-1)^2 + 128}, \quad \lambda = 0.$$

Корені p',

$$p'(\lambda') = -2^3 p_*\left(-\frac{\lambda'}{2} + \frac{5(3-u)}{2}, g_1\right),$$

мають вигляд

$$\lambda' = 5(3-u) - g_1 - 1 \pm \sqrt{(g_1-1)^2 + 128}, \quad \lambda' = 5(3-u) = \zeta_1'. \tag{3.5}$$

Нехай ζ_2', ζ_3' — корені, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня:

$$\zeta_2' = \frac{g + 5(3-u)}{2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{g+5(u-3)}{2} + 1\right)^2 + 128}, \tag{3.6}$$

$$\zeta_3' = \frac{g + 5(3-u)}{2} - 1 - \sqrt{\left(\frac{g+5(u-3)}{2} + 1\right)^2 + 128}. \tag{3.7}$$

Тоді

$$\zeta_2' > \zeta_1' > 0, \quad \zeta_3' < \zeta_2'. \tag{3.8}$$

При цьому ми використали те, що $g > 21$, $0 < u < 3$ та $\dfrac{g - 5(3-u)}{2} > 2$. Таким чином, немає резонансу ζ_2' з ζ_1', ζ_3'. Крім того, нерівність

$$\zeta_3' < 5(3-u) + \frac{g+5(u-3)}{2} - 1 - \frac{g+5(u-3)}{2} - 1 < 5(3-u) - 2$$

означає, що $\zeta_3' < 0$, якщо $u \geq \dfrac{13}{5}$.

Точна умова додатності ζ_3' має вигляд

$$\left(\frac{g+5(3-u)}{2} - 1\right)^2 > \left(\frac{g+5(u-3)}{2} + 1\right)^2 + 128,$$

тобто

$$g(5(3-u) - 2) > 128. \tag{3.9}$$

Неважко бачити, що $\zeta_3' > 0$ при $0 \leq u \leq \dfrac{6}{5}$, тому що $g \geq 21$, $5(3-u) - 2 > 7$ та

$$g(5(3-u) - 2) > 147.$$

Таким чином, ми довели таке твердження.

Твердження 3.1. *Корінь* ζ_3' *— додатний при* $0 \leq u \leq \frac{6}{5}$ *і від'ємний при* $\frac{13}{5} \leq u < 3$. *Крім того, має місце* (3.8).

Неважко перевірити, що $\zeta_3' > 0$ при $u = \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$ та $\zeta_3' < 0$ при $u = 2$. Виникає припущення, що $\zeta_3' > 0$ при $0 \leq u < 2$ та $\zeta_3' < 0$ при $2 \leq u < 3$.

Умова нейтральності $3e_0 = 2e'$ приводить до такого:

$$u = \frac{3}{4}\left(\frac{5e_0}{e'}\right)^{2/3} = \frac{3}{4}\left(\frac{10}{3}\right)^{2/3} = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^{1/3} < \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} < \frac{5}{2}(1,4)^{-1} = \frac{25}{14} < \frac{9}{5}.$$

Очевидно, що власні значення ζ_j матриці U^0 мають вигляд

$$\zeta_j = u'\zeta_j'.$$

Це і центральна теорема Ляпунова доводять наступну теорему.

Теорема 3.1. *Кулонівське рівняння руху на прямій* (1.1) *при* $N = 3$ *з потенціальною енергією* (3.1) *має періодичний розв'язок, який залежить від дійсного параметра c. Цей розв'язок та його період* $\tau(c)$ *є дійсно-аналітичними функціями в нулі цього параметра та* $\tau(0) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\zeta_2}}$.

Наступна теорема є наслідком теореми 1.1.

Теорема 3.2. *Якщо* $\zeta_3' < 0$, *то кулонівське рівняння руху на прямій* (1.1) *при* $N = 3$ *з потенціальною енергією* (3.1) *має обмежений для додатного часу розв'язок, який залежить від дійсного параметра, є дійсно-аналітичною функцією в нулі і такий, що має місце* (1.3) *з* $\lambda_0 = \sqrt{-\frac{\zeta_3}{m}}$ *та* $x^0 = (-a, 0, a)$ *— рівновага.*

Ці теореми є значно простішими, ніж їхні аналоги в [1]. Зауважимо, що в четвертому пункті [1] потрібно виправити помилки: збільшити u на 5 та викреслити a у виразі для $U^0_{2,2}$.

4. Три заряди на площині. У цьому пункті ми розглядаємо систему трьох однакових негативних зарядів на площині в полі двох точкових фіксованих позитивних однакових зарядів, розташованих в точках $b_1,\ b_2$, симетричних відносно прямої, де зосереджена рівновага. Потенціальна енергія її має вигляд

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq k=1}^{3}\frac{e_je_k}{|x_j - x_k|} - e_0e'\sum_{j,k=1,2}|x_j - b_k|^{-1}, \tag{4.1}$$

де $x_je_j = -e_0 < 0,\ e'$ ті самі, що і в попередньому пункті, та

$$b_j = (b_j^1, b_j^2) \in \mathbb{R}^2, \quad b_j^1 = 0, \quad b_1^2 = -b_2^2 = b.$$

Рівняння руху для цієї системи збігається з (1.1), де $N = 3,\ d = 2$.

Перші частинні похідні цієї потенціальної енергії мають вигляд

$$\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_j^\alpha} = -e_0^2\sum_{k=1,k\neq j}^{3}\frac{x_j^\alpha - x_k^\alpha}{|x_j - x_k|^3} + e_0e'\sum_{k=1}^{2}\frac{x_1^\alpha - b_k^\alpha}{|x_j - b_k|^3}.$$

Рівновагу задано рівностями $x_1^{01} = -a,\ x_2^{0\alpha} = 0,\ x_3^{01} = a,\ x_j^2 = x_j^{02} = 0$. Рівноважне співвідношення між $e_0,\ e',\ a,\ b$ є таким, як і в попередньому пункті.

Другі частинні похідні цієї потенціальної енергії мають вигляд

$$\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_j^\alpha} = -e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \frac{x_j^\alpha - x_k^\alpha}{|x_j - x_k|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^{2} \frac{x_1^\alpha - b_k^\alpha}{|x_j - b_k|^3},$$

$$\frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_j^\alpha \partial x_k^\beta} = \frac{\partial U(x_{(3)})}{\partial x_k^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2 \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - x_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|x_j - x_k|^5} \right], \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad j \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 U(x_{(2)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \left[-\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - x_k|^3} + 3\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|x_j - x_k|^5} \right] +$$

$$+ e_0 e' \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - b_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5} \right].$$

Нехай $u,\ u',\ u_*,\ g_*,\ \eta'$ є такий, як і в попередньому пункті. Із (3.3), (3.4) випливає

$$u_*'' = \frac{6e_0 e' b^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^5} = \frac{6e_0 e'}{(2a)^5} \left(\frac{5e_0}{e'}\right)^{5/3} \frac{4-\eta'}{\eta'} a^2 = u'' u', \quad u'' = 5(3-u). \tag{4.2}$$

Покладемо

$$T_j(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5}$$

та нехай $T_j^0(\alpha,\beta)$ є рівноважним значенням $T_j(\alpha,\beta)$. Тоді $|x_j^0 - b_k|^2 = a^2 + b^2,\ j = 1,3,$ $|x_2^0 - b_k|^2 = b^2$, а також

$$T_j^0(\alpha,\beta) = 2(a^2+b^2)^{-5/2}\delta_{\alpha,\beta}(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}), \quad j = 1,3, \quad T_2^0(\alpha,\beta) = 2b^{-3}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,2}. \tag{4.3}$$

Першу рівність ми доводимо, як аналогічну для $j = 1,2$ з другого пункту. Ті самі міркування доводять другу рівність в (4.3). Як наслідок,

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} U^0_{\alpha;j,k}, \tag{4.4}$$

де (див. пункт 3)

$$U^0_{1;j,k} = U^0_{j,k}, \quad U^0_{2;2,1} = U^0_{2;1,2} = U^0_{2;2,3} = U^0_{2;3,2} = \frac{e_0^2}{a^3} = 4u', \qquad U^0_{2;3,1} = U^0_{2;1,3} = \frac{u'}{2}.$$

З (4.2) – (4.4), (3.2) – (3.4) випливає

$$U^0_{2;1,1} = U^0_{2;3,3} = -\frac{e_0^2}{a^3}\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \frac{2e_0 e'}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} - u_*'' = \frac{u'}{2} - u_*'',$$

$$U^0_{2;2,2} = -8u' - \frac{4e_0 e'}{b^3} = u' g'', \quad g'' = -8 - 2g_*.$$

Перераховуючи індекси змінних

$$(1,1) = 1; \quad (2,1) = 2, \quad (3,1) = 3, \quad (1,2) = 4, \quad (2,2) = 5, \quad (3,2) = 6, \tag{4.5}$$

отримуємо

$$U^0 = U_1^0 \oplus U_2^0,$$

де

$$u'^{-1}U_1^0 = -2U_{*1} + u''I,$$

$$u'^{-1}U_2^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - u'' & 4 & \frac{1}{2} \\ 4 & g'' & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} - u'' \end{pmatrix} = U_{*2} - u''I.$$

Тут $U_{*2} = U_*(g_2),\ g_2 = g'' + u''$, а U_* визначено у попередньому пункті.

Характеристичні поліноми p_{*2} для U_{*2} та p_2' для $U_2' = u'^{-1}U_2^0$ мають вигляд

$$p_{*2}(\lambda) = p_*(\lambda, g_2), \quad p_2'(\lambda) = p_{*2}(\lambda + u'', g_2),$$

де $p_*(\lambda, q)$ — характеристичний поліном для $U_*(q)$ з попереднього пункту. Таким чином, корені $p_2'(\lambda')$ знаходяться так:

$$2\lambda' = -2u'' + g_2 + 1 \pm \sqrt{(g_2 - 1)^2 + 128}, \quad \lambda' = -u'' = \zeta_4'.$$

Нехай $\zeta_5',\ \zeta_6'$ — корені, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня

$$2\zeta_5' = g'' - u'' + 1 + \sqrt{(g'' + u'' - 1)^2 + 128},$$

$$2\zeta_6' = g'' - u'' + 1 - \sqrt{(g'' + u'' - 1)^2 + 128}.$$

Тоді $\zeta_4',\ \zeta_6' < 0$, тому що $g'' + 1 < 0,\ u'' > 0$, а $\zeta_5' > 0$, якщо

$$(|g''| - u'' + 1)^2 + 128 > (|g''| + u'' - 1)^2, \quad 4(u'' - 1)|g''| < 128. \tag{4.6}$$

Це справедливо, якщо $u'' = 5(3 - u) \leq 1$, тобто $u \geq \dfrac{14}{5}$. Покажемо, що $\zeta_5' < 0$ на відрізку $[0, 2]$, тобто мають місце обернені до (4.6) нерівності

$$(|g''| - u'' + 1)^2 + 128 < (|g''| + u'' - 1)^2, \quad 4(u'' - 1)|g''| > 128. \tag{4.7}$$

Ці нерівнисті виконуються при $u = 0, 2$. Це випливає з того, що при цих значеннях u вони збігаються відповідно з

$$56|g''| > 128, \quad 16|g''| > 128.$$

Це виконується, тому що при цих значеннях u

$$g_* = 5, \quad |g''| = 8 + 2g_* = 18; \quad g_* = 15\sqrt{3}, \quad |g''| = 8 + 30\sqrt{3} > 59.$$

Нерівності (4,7) виконуються на відрізку $[0, 2]$. Це легко перевірити, підставляючи мінімуми $|g''|, u''$ на ньому в (4.7). Отже, справджується таке твердження.

Твердження 4.1. *Корені* $\zeta_5' < 0$ *та* $\zeta_5' > 0$ *відповідно при* $0 < u \leq 2$, $\frac{14}{5} \leq u < 3$. *Крім того,* $\zeta_4' < 0$, $\zeta_6' < 0$ *та* $|\zeta_4'| < |\zeta_6'|$, $|\zeta_5'| < |\zeta_6'|$ *при* $0 < u < 3$.

Має місце наступне твердження.

Твердження 4.2. *Власні значення* ζ_j *матриці* U^0 *визначаються з рівності*

$$\zeta_j = u'\zeta_j', \quad j = 1, \ldots, 6,$$

де перші три з них задано формулами (3.57)–(3.7). *Серед них є три додатні та три від'ємні, якщо* $\frac{14}{5} \leq u < 3$ *або* $0 < u \leq \frac{6}{5}$. *При цьому у першому випадку* $\zeta_j' < 0$, $j = 3, 4, 6$, *а у другому* $\zeta_j' < 0$, $j = 4, 5, 6$.

Наступна теорема є наслідком теореми 1.1.

Теорема 4.1. *Нехай* $\frac{14}{5} \leq u < 3$ *або* $0 < u \leq \frac{6}{5}$. *Тоді площинне кулонівське рівняння руху* (1.1) *при* $N = 3$ *з потенціальною енергією* (4.1) *має обмежений для додатного часу розв'язок, який залежить від трьох дійсних параметрів, є дійсно-аналітичною функцією у нулі і такий, що виконується* (1.3) *відповідно з* $\lambda_0 = \min_{j=3,4,6} \lambda_j$, $\lambda_0 = \min_{j=4,5,6} \lambda_j$, $\sigma_j = \frac{\zeta_j}{m} < 0$ *та* $x^0 = (x_1^0; x_2^0, x_3^0) = (-a, 0; 0, 0; a, 0)$ — *рівновага.*

Припущення, що ζ_2 не має резонансу з ζ_5, дозволяє довести теорему, яка випливає з центральної теореми Ляпунова.

Теорема 4.2. *Нехай* $0 < u \leq 2$ *або* $\frac{14}{5} \leq u < 3$ *та* $\frac{\zeta_5}{\zeta_2} \neq n^2$, *де* n — *ціле число. Тоді площинне кулонівське рівняння руху* (1.1) *при* $N = 3$ *з потенціальною енергією* (4.1) *має періодичний розв'язок, який залежить від дійсного параметра* c. *Цей розв'язок та його період* $\tau(c)$ *є дійсно-аналітичними функціями у нулі та* $\tau(0) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\zeta_2}}$.

5. Додаток. Першим кроком у доведенні теореми 1.1 є перетворення рівняння руху (1.2) у рівняння першого порядку у простій стандартній формі. Вона визначається рівністю [1]

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_{(l)}) = \lambda_j x_j + X_j(x_{(l)}), \quad j = 1, \ldots, n, \quad \lambda_{2j} = -\sqrt{-\sigma_j}, \quad \lambda_{2j-1} = \sqrt{-\sigma_j}, \tag{5.1}$$

де координати, що відповідають від'ємним (додатним) σ_j, є дійсними (комплексними), а X_j, що відповідають від'ємним (додатним) σ_j — дійсними (уявними) і всі вони залежать від дійсних частин комплексних координат. Зведення до такої форми (1.2) здійснюється комплексним перетворенням, яке є дійсним, якщо всі власні значення U^0 є від'ємними. Розв'язки (1.2) є дійсними, тому що обернене перетворення дає координати як дійсні та уявні частини розв'язків (5.1) [1]. Теорема 1.1 випливає з такої теореми.

Теорема 5.1. *Нехай дійсні частини* $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, p < l$, *в* (5.1) *є від'ємними, а дійсні частини* $\lambda_j, j = 1 + p, \ldots, l$, *не є такими. Нехай також* $X_j(x_{(l)})$ — *голоморфні функції в нулі такі, шо в їх степеневих розкладах по* x_j, $j = 1, \ldots, l$, *суми степенів цих змінних не менше ніж два. Тоді існують функції* $\varphi_j(x_{(p)})$, $j = p + 1, \ldots, l$, *які є голоморфними у початку координат та нулем у ньому і такі, що частинні розв'язки* (5.1) *при* $j = p + 1, \ldots, l$ *рівні*:

$$x_j(t) = \varphi_j(x_{(p)}(t)), \tag{5.2}$$

а при $j = 1, \ldots, p$ *задовольняють укорочене еволюційне рівняння*

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j^0(x_{(p)}) = \lambda_j x_j + X_j^0(x_{(p)}),$$

де

$$X_j^0(x_{(p)}) = X_j(x_{(p)}, \varphi_{(l\backslash p)}(x_{(p)})), \quad (l\backslash p) = p+1, \ldots, l.$$

Зазначимо, що X_j^0 — дійсна функція. Ідею доведення цієї теореми ми запозичили в розділі III монографії [6]. Щоб довести її, необхідно ввести нові координати u_j за правилом для дійсних $x_j = u_j$, $j = 1, \ldots, p$, та

$$u_j = x_j - \varphi_j(x_{(p)}), \quad j = p+1, \ldots, l,$$

де φ_j є аналогічними X_j. Згідно з теоремою про неявну голоморфну функцію існує обернене голоморфне перетворення, яке дозволяє вивести еволюційне рівняння для нових змінних. Для нових змінних має місце рівняння, яке випливає з (5.1):

$$\frac{du_j}{dt} = \lambda_j u_j + G_j(u_{(l)}), \quad j = 1, \ldots, l. \tag{5.3}$$

Якщо встановлено, що

$$G_j(u_{(p)}, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = p+1, \ldots, l, \tag{5.4}$$

то частинний розв'язок рівняння (5.3) визначається рівностями

$$u_j = 0, \quad j = p+1, \ldots, l.$$

Конкретний вираз для такої функції G_j можна знайти в [6]. Для φ_j виводиться рівняння, яке має розв'язок у вигляді збіжного степеневого ряду [6]. Резонансна умова при цьому не потрібна, оскільки

$$2 < n_1 + \ldots + n_p \leq c_2 | - \lambda_j + \sum_{k=1}^{p} n_k \lambda_k |, \quad j = p+1, \ldots, l, \tag{5.5}$$

де n_j — додатне ціле число.

Розв'язок укороченого еволюційного рівняння отримується з допомогою першої глобальної теореми Ляпунова [5] про існування обмеженого розв'язку (5.1) для додатного часу.

Зауважимо, що аналог Теореми 1.1 доводиться в [7] при умові диференційовності U навіть коли $\sigma_j = 0$ при деяких j.

Література

1. *Skrypnik W.* Periodic and bounded solutions of the Coulomb equation of motion of two and three point charges with equilibrium on line // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, № 5. – P. 668 – 682.
2. *Скрипник В. І.* Про голоморфні розв'язки гамільтонових рівнянь руху точкових зарядів // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 270 – 280.
3. *Скрипник В. І.* Про голоморфні розв'язки рівнянь руху Дарвіна точкових зарядів // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 4. – С. 546 – 554.
4. *On* exact solutions of Coulomb equation of motion of planar charges // J. Geometry and physics. – 2015. – **98**. – P. 285 – 291.
5. *Lyapunov A.* General problem of stability of motion. – Moscow, 1950. – 471 p. (in Russian) (English transl.: Int. J. Contr. – 1992. – **55**, № 3. – P. 521 – 790.
6. *Siegel C., Moser J.* Lectures on celestial mechanics, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
7. *Hartman P.* Ordinary differential equations. – New York etc.: Wiley and Sons, 1964.

Одержано 26.11.14,
після доопрацювання — 11.02.16