УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

ПОВНА КЛАСИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННИХ НАПІВГРУП, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ПЕРЕСТАВНОЮ НАПІВГРУПОЮ

A semigroup S is called permutable if $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ for any pair of congruences ρ, σ on S. A local Automorphism of semigroup S is defined as an isomorphism between two of its subsemigroups. The set of all local Automorphisms of the semigroup S with respect to an ordinary operation of composition of binary relations forms an inverse monoid of local Automorphisms. We present a complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local Automorphisms is permutable.

Полугруппа S называется перестановочной, если для любой пары конгруэнций ρ, σ на S имеет место равенство $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. Локальным автоморфизмом полугруппы S называют изоморфизм между двумя ее подполугруппами. Множество всех локальных автоморфизмов полугруппы S относительно обычной операции композиции бинарных отношений образует инверсный моноид локальных автоморфизмов. В статье приведена полная классификация конечных полугрупп, для которых инверсный моноид локальных автоморфизмов является перестановочным.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент x^{-1} такий, що $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо (див. [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і тільки тоді, коли вона регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують. Напівгрупа, що містить одиницю, називається моноїдом. Розглянемо довільну математичну структуру C. Локальним автоморфізмом структури C називають ізоморфізм між її підструктурами. Множина всіх локальних автоморфізмів відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів математичної структури C. Цей моноїд будемо позначати через $L\mathrm{Aut}(C)$. Зазначимо, що найбільш природним чином інверсний моноїд з'являється саме у вигляді $L\mathrm{Aut}(C)$. Наприклад, якщо C — скінченна напівгрупа правих нулів, то $L\mathrm{Aut}(C)$ є симетричною інверсною напівгрупою. Відомо (див., наприклад, [2]), що інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(C)$ дає більшу інформацію про структуру C, ніж група автоморфізмів цієї структури. Далі, напівгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно операції композиції бінарних відношень. Класичним прикладом переставної напівгрупи є група. До переставних напівгруп також належать скінченна симетрична інверсна напівгрупа, інверсний моноїд локальних автоморфізмів скінченновимірного векторного простору, інверсний моноїд локальних автоморфізмів скінченної лінійно впорядкованої напіврешітки, напівгрупа Брандта та інші напівгрупи. В наших дослідженнях ми розглядаємо лише скінченні напівгрупи. У статтях [3–5] відповідно класифіковано всі в'язки, всі комутативні і всі нільнапівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. У даній роботі ми завершуємо класифікацію скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Основним результатом статті є теорема 2.

1. Означення. Термінологія. Формулювання потрібних результатів. Напівгрупа називається переставною, якщо для будь-яких двох її конгруенцій ρ і σ виконується рівність $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, де $\circ$ — позначення композиції бінарних відношень.

Напівгрупу, кожний елемент якої є ідемпотентом, називають в'язкою. Комутативна в'язка називається напіврешіткою. Нетривіальну напіврешітку називають примітивною, якщо кожний її ненульовий елемент є атомом.

Нехай S — довільна напівгрупа. Ізоморфізм між піднапівгрупами напівгрупи S називають *локальним автоморфізмом* напівгрупи S. Множина всіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який ми позначимо через $L\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $\xi \in L\mathrm{Aut}(S)$, то через $\mathrm{dom}(\xi)$ і $\mathrm{im}(\xi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму ξ.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку всіх її піднапівгруп будемо позначати через $\mathrm{Sub}(S)$. Якщо напівгрупа S містить найменшу непорожню піднапівгрупу (наприклад, одинична підгрупа у групі), то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ вважається саме ця піднапівгрупа. Якщо ж найменшої непорожньої піднапівгрупи в S не існує, то найменшим елементом $\mathrm{Sub}(S)$ будемо вважати порожню множину $\varnothing$, і в цьому випадку порожнє перетворення є нулем інверсного моноїда $L\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через Δ_A позначимо відношення рівності на піднапівгрупі A. Зрозуміло, що Δ_A є ідемпотентом моноїда $L\mathrm{Aut}(S)$. Кожний ідемпотент напівгрупи $L\mathrm{Aut}(S)$ має таку форму. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через $h(A)$ будемо позначати висоту піднапівгрупи A у решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини (відносно звичайного канонічного порядку на S). Якщо $a \in S$, то (за означенням) $\mathrm{rank}\,(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напіврешітці $E(S)$. Легко перевірити, що при такому означенні рангу елемента виконується характеристична нерівність, а саме $\mathrm{rank}\,(a \cdot b) \le \min\{\mathrm{rank}\,(a), \mathrm{rank}\,(b)\}$. Зазначимо, що таке означення рангу елемента інверсної напівгрупи скінченної довжини в багатьох випадках (наприклад, у випадку скінченної симетричної інверсної напівгрупи) тотожне класичному означенню. Конкретизуємо наше означення рангу для інверсного моноїда $L\mathrm{Aut}(S)$ у випадку, коли S — скінченна напівгрупа. Отже, нехай $f \in L\mathrm{Aut}(S)$, тоді (за означенням) $\mathrm{rank}\,(f) = h(\mathrm{im}(f))$, де $h(\mathrm{im}(f))$ — висота піднапівгрупи $\mathrm{im}(f)$ в решітці $\mathrm{Sub}(S)$.

Для простого числа p через $\mathbb{Z}_p$ позначимо відповідне поле. Множина всіх верхніх трикутних матриць вигляду $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де a, b, c — довільні елементи з поля $\mathbb{Z}_p$, відносно звичайної операції множення матриць утворює групу, яку називають групою Гейзенберга над полем $\mathbb{Z}_p$ і позначають через $\mathrm{Heis}\,(\mathbb{Z}_p)$.

Напівгрупа називається уніпотентною, якщо вона містить точно один ідемпотент.

Напівгрупу S, що містить нуль, називають нільнапівгрупою, якщо для довільного $x \in S$ існує натуральне число n таке, що $x^n = 0$.

Нехай G — скінченна група. Найменше натуральне число k таке, що для довільного $g \in G$ виконується рівність $g^k = 1$, називають експонентою групи G і позначають через $\exp\,(G)$.

Тепер сформулюємо кілька тверджень, які ми використовуємо у даній статті.

Твердження 1 див. [6], теорема 2. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі умови*:

1) *для будь-яких a, $b \in S$, якщо $\mathrm{rank}\,(a) = \mathrm{rank}\,(b)$, то $SaS = SbS$*;

2) *для будь-якого $e \in E(S)(\mathrm{rank}\,(e) \ge 2)$ існують ідемпотенти f і g такі, що $f \ne g$, $f < e$, $g < e$ і $\mathrm{rank}\,(f) = \mathrm{rank}\,(g) = \mathrm{rank}\,(e) - 1$.*

***Зауваження* 1** (див. [6], теорема 1)**.** Якщо ранг довільного елемента нетривіальної інверсної напівгрупи S з нулем не перевищує 1, то напівгрупа S переставна тоді і тільки тоді, коли вона є напівгрупою Брандта.

***Зауваження* 2** (див. [7], теорема 2)**.** Зазначимо, що умова 1 твердження 1 еквівалентна лінійній впорядкованості (відносно включення)множини ідеалів напівгрупи S .

***Зауваження* 3** (див. [6], лема 1)**.** Умовою 2 часто зручніше користуватися в еквівалентній формі. А саме, якщо $u < v$, де $u, v \in E(S)$ і $\operatorname{rank}(u) \geq 1$, то існує елемент $w \in E(S)$ такий, що $u \neq w$, $w < v$ і $\operatorname{rank}(u) = \operatorname{rank}(w)$.

Твердження 2 (див. [3], теорема 1)**.** *Нехай S — скінченна напівгрупа. Множина ідеалів напівгрупи $L\mathrm{Aut}(S)$ лінійно впорядкована відносно включення тоді і тільки тоді, коли в решітці $\mathrm{Sub}(S)$ неізоморфні піднапівгрупи мають різні висоти.*

2. Скінченні групи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. У статті [5] доведено дві такі леми.

Лема 1. *Якщо скінченна напівгрупа S містить щонайменше два ідемпотенти і інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(S)$ є переставним, то кожний елемент напівгрупи S є ідемпотентом.*

Лема 2. *Якщо скінченна напівгрупа S є уніпотентною і інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(S)$ є переставним, то напівгрупа S є або групою або нільнапівгрупою.*

З цих двох лем безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай S — скінченна напівгрупа. Якщо інверсний моноїд локальних автоморфізмів $L\mathrm{Aut}(S)$ є переставним, то напівгрупа S є або групою, або нільнапівгрупою, або в'язкою.*

Позначимо через $\mathcal{PLA}$ клас усіх скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Скінченні в'язки і скінченні нільнапівгрупи з класу $\mathcal{PLA}$ класифіковано відповідно у статтях [3] і [5]. Крім того, відомо (див. [4]), що скінченна абелева група належить класу $\mathcal{PLA}$ тоді і тільки тоді, коли вона є елементарною абелевою p-групою. Отже, щоб завершити класифікацію скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним, залишається з'ясувати структуру неабелевої групи з класу $\mathcal{PLA}$.

Лема 3. *Нехай скінченна група G належить класу $\mathcal{PLA}$. Тоді група G є p-групою, де p — просте число.*

Доведення. Нехай $|G| = m$. Припустимо, що прості числа p_1 і p_2 $(p_1 \neq p_2)$ є дільниками числа m. За теоремою Коші група G містить підгрупи A і B, порядки яких відповідно p_1 і p_2. Оскільки інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(G)$ є переставним, то множина його ідеалів лінійно впорядкована відносно включення (див. [8], теорема 4). Позаяк $h(A) = h(B) = 1$, то згідно з твердженням 2 $A \cong B$. Суперечність. Таким чином, число m має лише один простий дільник. Позначимо його через p. Отже, $m = p^n$ для деякого натурального числа n.

Лема 4. *Нехай G — скінченна p-група. Інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(G)$ задовольняє умову* 2 *твердження* 1 *тоді і тільки тоді, коли* $\exp(G) = p$.

Доведення. Припустимо, що $\exp(G) = p$. Нехай $A \leq G$, до того ж $|A| = p^\alpha$ і $\alpha \geq 2$. Якщо $\alpha = 2$, то група A є елементарною абелевою p-групою, яка містить дві різні підгрупи порядку p. Нехай тепер $\alpha \geq 3$. Припустимо, що A містить точно одну підгрупу порядку $p^{\alpha-1}$. Тоді згідно з теоремою 12.5.3 (див. [9]) підгрупа A є циклічною, а отже, $|A| = p$. Суперечність. Таким чином, існують підгрупи B і C $(B \neq C)$ такі, що $B < A$, $C < A$ і $|B| = |C| = p^{\alpha-1}$.

Нехай тепер інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(G)$ задовольняє умову 2 твердження 1. Покажемо, що $\exp(G) = p$. Нехай $a \in G$ — довільний елемент, відмінний від одиниці. Оскільки $|G| = p^n$, то існує натуральне число k $(1 \leq k \leq n)$ таке, що $|\langle a\rangle| = p^k$. Якщо припустити, що $k \geq 2$, то згідно з умовою 2 твердження 1 існують дві різні підгрупи циклічної групи $\langle a\rangle$ порядку p^{k-1}. Суперечність. Отже, $|\langle a\rangle| = p$. Звідси випливає, що $\exp(G) = p$.

Перед формулюванням наступної леми зауважимо такий факт. Нехай G — скінченна p-група. Якщо $K \leq G$ і $|K| = p^\alpha$, то $h(K) = \alpha$, де $h(K)$ — висота підгрупи K в решітці $\mathrm{Sub}(G)$.

Лема 5. *Нехай G — скінченна p-група. Множина ідеалів інверсного моноїда $L\mathrm{Aut}(G)$ лінійно впорядкована відносно включення тоді і тільки тоді, коли неізоморфні підгрупи групи G мають різні порядки.*

Доведення. Нехай множина ідеалів моноїда $L\mathrm{Aut}(G)$ лінійно впорядкована відносно включення. Тоді згідно з твердженням 2 будь-які неізоморфні підгрупи A і B мають різні висоти в решітці $\mathrm{Sub}(G)$. Отже, якщо $|A| = p^\alpha$ і $|B| = p^\beta$, то $\alpha \neq \beta$, тобто $|A| \neq |B|$.

Нехай тепер у групі G для будь-яких підгруп K і M з умови $|K| = |M| = p^r$ випливає $K \cong M$. Вище ми вже зазначали, що рівність $|K| = |M| = p^r$ еквівалентна рівності $h(K) = h(M) = r$. Отже, згідно з твердженням 2 множина ідеалів інверсного моноїда $L\mathrm{Aut}(G)$ лінійно впорядкована відносно включення.

Леми 4 і 5 дають можливість сформулювати критерій належності скінченної групи класу $\mathcal{PLA}$.

Твердження 4. *Нехай G — скінченна група. Інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(G)$ є переставним тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

(i) $\exp(G) = p$, *де p — просте число*;

(ii) *підгрупи групи G однакового порядку є ізоморфними.*

Наслідок. *Якщо скінченна група G належить класу $\mathcal{PLA}$, то будь-яка її підгрупа теж належить цьому класу.*

У статті [4] доведено, що скінченна абелева група G належить класу $\mathcal{PLA}$ тоді і тільки тоді, коли G є елементарною абелевою p-групою, де p — довільне просте число. Залишається з'ясувати структуру скінченної неабелевої групи, яка належить класу $\mathcal{PLA}$.

Теорема 1. *Скінченна неабелева група G належить класу $\mathcal{PLA}$ тоді і тільки тоді, коли G є групою Гейзенберга $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$, де p — просте непарне число.*

Доведення. Спочатку покажемо, що група $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ належить класу $\mathcal{PLA}$. Для цього застосуємо твердження 4. Легко перевірити, що $\exp(\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)) = p$. Оскільки порядок групи $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ дорівнює p^3, то її нетривіальні підгрупи мають порядки p і p^2. Зрозуміло, що підгрупи порядку p ізоморфні між собою. Позаяк кожна підгрупа порядку p^2 є елементарною абелевою групою, то будь-які дві підгрупи порядку p^2 ізоморфні. Отже, згідно з твердженням 4 група $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ належить класу $\mathcal{PLA}$.

Подальше наше завдання — показати, що групами Гейзенберга над полем $\mathbb{Z}_p$ вичерпуються всі некомутативні скінченні групи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним.

Згідно з лемою 3 група, що належить класу $\mathcal{PLA}$, є p-групою. Оскільки група порядку p^2 є абелевою, то почнемо з груп порядку p^3. Групи порядку p^3 і p^4 класифіковано Гельдером. Результати цієї класифікації можна знайти в монографії Бернсайда (див. [10, с. 87, 88]). Отже, є лише дві неабелеві групи порядку p^3 і тільки експонента групи Гейзенберга дорівнює p. Таким чином, серед неабелевих груп порядку p^3 лише групи Гейзенберга належать класу $\mathcal{PLA}$.

Покажемо тепер, що серед неабелевих p-груп порядку p^4 жодна не належить класу $\mathcal{PLA}$. Відомо (див. [10, с. 87, 88]), що всього існує 15 груп порядку p^4. Серед них є десять неабелевих.

Відкидаємо ті групи, експонента яких більша за p. Залишаються дві групи, а саме

$$H = \langle a, b, c, d \colon a^p = b^p = c^p = d^p = 1, cd = dca, bd = db, ad = da, bc = cb, ac = ca, ab = ba \rangle$$

і

$$G = \langle a, b, c, d \colon a^p = b^p = c^p = d^p = 1, cd = dcb, bd = dba, ad = da, bc = cb, ac = ca, ab = ba \rangle.$$

Припустимо, що група H належить класу $\mathcal{PLA}$. У групі H елементи a, b, c попарно комутують, до того ж порядок кожного елемента дорівнює p. Звідси випливає, що підгрупа $A = \langle a, b, c \rangle$ є абелевою, до того ж $|A| = p^3$. Отже, згідно з твердженням 4 усі підгрупи групи H, що мають порядок p^3, є абелевими. Аналогічно доводимо, що кожна підгрупа групи H є абелевою. Іншими словами група H є групою Міллера–Морено. Далі застосуємо теорему Редеї [11], а саме

Нехай $\mathfrak{G}$ — неабелева p-група, у якій всі максимальні підгрупи є абелевеми. Тоді $\mathfrak{G}$ є однією з таких груп:

a) *групою кватерніонів порядку* 8;

b) $\mathfrak{G} = \langle a, b \rangle$ *з визначальними співвідношеннями* $a^{p^m} = b^{p^k} = 1$, $a^b = a^{1+p^{m-1}}$, $m \geq 2$, $k \geq 1$, $|\mathfrak{G}| = p^{m+k}$;

c) $\mathfrak{G} = \langle a, b \rangle$ *з визначальними співвідношеннями* $a^{p^m} = b^{p^k} = c^p = 1$, $[a, b] = c$, $|\mathfrak{G}| = p^{m+k+1}$.

Легко перевірити, що група H не належить жодному з класів $a)$, $b)$, $c)$. Суперечність. Тобто $H \notin \mathcal{PLA}$.

Далі, оскільки у групі G елементи a, b, c попарно комутують і порядок кожного з цих елементів дорівнює p, то підгрупа $B = \langle a, b, c \rangle$ є абелевою, до того ж $|B| = p^3$. Аналогічними міркуваннями (як і у випадку групи H) доводимо, що $G \notin \mathcal{PLA}$. Таким чином, серед неабелевих груп порядку p^4 немає таких, які належать класу $\mathcal{PLA}$. Іншими словами, група порядку p^4 належить класу $\mathcal{PLA}$ тоді і тільки тоді, коли вона є елементарною абелевою p-групою.

Тепер доведемо, що довільна неабелева група порядку p^n (де $n \geq 5$) не належить класу $\mathcal{PLA}$. Для цього застосуємо метод математичної індукції. Отже, припустимо, що будь-яка група порядку p^{m-1}, $m \geq 5$, яка належить класу $\mathcal{PLA}$, є абелевою. Покажемо, що довільна група з класу $\mathcal{PLA}$, порядок якої p^m, теж є абелевою. Припустимо протилежне, тобто існує неабелева група K така, що $K \in \mathcal{PLA}$ і $|K| = p^m$. Згідно з наслідком твердження 4 будь-яка підгрупа групи K належить класу $\mathcal{PLA}$. Зокрема довільна підгрупа групи K, порядок якої p^{m-1}, належить класу $\mathcal{PLA}$. Оскільки (за припущенням) усі групи з класу $\mathcal{PLA}$, порядок яких p^{m-1}, є абелевими, то, застосовуючи твердження 4, легко довести, що K є групою Міллера–Морено, що суперечить теоремі Редеї. Отже, групи порядку p^m з класу $\mathcal{PLA}$ є абелевими. Позаяк групи порядку p^4 з класу $\mathcal{PLA}$ є абелевими, то за індукцією групи порядку p^5 з класу $\mathcal{PLA}$ теж є абелевими. І так далі.

Теорему 1 доведено.

3. Основна теорема. Щоб сформулювати основну теорему статті, наведемо деякі результати з попередніх статей автора.

Твердження 5 (див. [3], теорема 3). *Нехай S — скінченна в'язка. Інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(S)$ є переставним в таких і лише в таких випадках*:

(1) S — *лінійно впорядкована напіврешітка*;

(2) S — *примітивна напіврешітка*;
(3) S — *напівгрупа правих нулів*;
(4) S — *напівгрупа лівих нулів*.

Тепер дамо опис нільнапівгруп, що належать класу $\mathcal{PLA}$ (див. [5]). Особливу роль серед таких напівгруп відіграють дві нільнапівгрупи, які задано таблицями 1 і 2 і позначено відповідно через K_1 і K_2.

Таблиця 1

$\star$	**0**	**a**	**x**	**y**
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
x	0	0	0	a
y	0	0	0	0

Таблиця 2

$\star$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a
y	0	0	0	b	0

Ми також окремо виділяємо ще дві нільнапівгрупи, які задано таблицями 3 і 4 і позначено відповідно через B_1 і B_2, а саме

Таблиця 3

$\star$	**0**	**a**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
x	0	0	0	a	0
y	0	0	0	0	a
z	0	0	a	0	0

Таблиця 4

$\star$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a	b
y	0	0	0	b	0	a
z	0	0	0	a	b	0

Наведемо ще три конструкції для створення нільнапівгруп з класу $\mathcal{PLA}$ (див. [5]).

Конструкція 0

Зафіксуємо двоелементну множину $\{0, a\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a\} \cap X = \varnothing$ і $|X| \geq 2$. Визначимо бінарну операцію $*$ на множині $\{0, a\} \cup X$:

$$0 * y = y * 0 = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a\} \cup X,$$

$$a * y = y * a = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a\} \cup X;$$

$$\text{якщо} \quad x_k, x_m \in X \quad \text{і} \quad x_k \neq x_m, \quad \text{то} \quad x_k * x_m = a,$$

$$z^2 = 0 \quad \text{для довільного} \quad z \in \{0, a\} \cup X.$$

Конструкція 1

Зафіксуємо двохелементну множину $\{0, a\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a\} \cap \cap X = \varnothing$ і $|X| \geq 3$. На X задаємо строгий лінійний порядок $<$. Визначимо бінарну операцію на множині $\{0, a\} \cup X$:

$$0 * y = y * 0 = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a\} \cup X,$$

$$a * y = y * a = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a\} \cup X,$$

$$x_k, x_m \in X \quad \text{і} \quad x_k < x_m, \quad \text{то} \quad x_k * x_m = 0 \quad \text{і} \quad x_m * x_k = a,$$

$$z^2 = 0 \quad \text{для довільного} \quad z \in \{0, a\} \cup X.$$

Конструкція 2

Зафіксуємо трьохелементну множину $\{0, a, b\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a, b\} \cap X = \varnothing$ і $|X| \geq 3$. На X задаємо строгий лінійний порядок $<$. Визначимо бінарну операцію на множині $\{0, a, b\} \cup X$:

$$0 * y = y * 0 = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a, b\} \cup X,$$

$$a * y = y * a = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a, b\} \cup X,$$

$$b * y = y * b = 0 \quad \text{для будь-якого} \quad y \in \{0, a, b\} \cup X,$$

$$\text{якщо} \quad x_k, x_m \in X \quad \text{і} \quad x_k < x_m, \quad \text{то} \quad x_k * x_m = a \quad \text{і} \quad x_m * x_k = b,$$

$$z^2 = 0 \quad \text{для довільного} \quad z \in \{0, a, b\} \cup X.$$

Крім вищезгаданих нільнапівгруп до класу $\mathcal{PLA}$ також належать скінченні напівгрупи з нульовим множенням (див. [4]).

Тепер (враховуючи твердження 3) можемо сформулювати основну класифікаційну теорему.

Теорема 2. *Нехай S — скінченна напівгрупа. Інверсний моноїд $L\mathrm{Aut}(S)$ є переставним тоді і тільки тоді, коли S:*

(1) *або елементарна абелева p-група, де p — довільне просте число;*

(2) *або група Гейзенберга над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$, де p — довільне непарне просте число;*

(3) *або лінійно впорядкована напіврешітка;*

(4) *або примітивна напіврешітка;*

(5) *або напівгрупа правих нулів;*

(6) *або напівгрупа лівих нулів;*

(7) *або нільнапівгрупа K_1 (див. таблицю* 1);

(8) *або нільнапівгрупа K_2 (див. таблицю* 2);

(9) *або нільнапівгрупа B_1 (див. таблицю* 3);

(10) *або нільнапівгрупа B_2 (див. таблицю* 4);

(11) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в конструкції* 0;

(12) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в конструкції* 1;

(13) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в конструкції* 2;

(14) *або нільнапівгрупа з нульовим множенням.*

Література

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с. – Т. 2. – 422 с.
2. *Goberstein S. M.* Partial automorphisms of inverse semigroups // Proc. 1984 Marquette Conf. on Semigroups (Marquette Univ., Milwaukee, 1985). – P. 29 – 43.
3. *Дереч В. Д.* Структура скінченної комутативної інверсної напівгрупи і скінченної в'язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1218 – 1226.

4. *Дереч В. Д.* Класифікація скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 2. – С. 176 – 184.
5. *Дереч В. Д.* Класифікація скінченних нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 610 – 624.
6. *Дереч В. Д.* Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1353 – 1362.
7. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
8. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
9. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
10. *Burnside W.* Theory of groups of finite order. – First ed. – Cambridge University Press, 1897. – 388 p.
11. *Huppert B.* Endliche Gruppen 1. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1967. – 793 p.

Одержано 08.04.16,
після доопрацювання — 17.08.16