УДК 517.983

Ю. С. Лінчук (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ ЗБУРЕНЬ ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ НА НЕЗАЛЕЖНУ ЗМІННУ

We study the conditions of equivalence of two operators obtained as perturbations of the operator of multiplication by the independent variable by certain Volterra operators in the space of functions analytic in an arbitrary domain of the complex plane starlike with respect to the origin.

В пространстве функций, аналитических в произвольной звездной относительно начала координат области комплексной плоскости, исследованы условия эквивалентности двух операторов, которые являются возмущениями оператора умножения на независимую переменную некоторыми вольтерровскими операторами.

У комплексному аналізі важливе значення має задача про вивчення умов еквівалентності різних класів операторів. Насамперед досіджувались умови еквівалентності операторів, що пов'язані з оператором диференціювання. Значно менше вивчені питання еквівалентності інтегральних операторів та операторів множення на незалежну змінну і їхніх різноманітних збурень. Крім суто пізнавального значення ці задачі є цікавими також і тому, що в деяких просторах аналітичних функцій оператор множення на незалежну змінну є спряженим до оператора диференціювання. В роботах [1, 2] вивчались умови еквівалентності у просторі функцій, аналітичних у кругових областях операторів із класу

$$(Af)(z) = zf(z) + \int\limits_0^z a(z-t)f(t)dt,$$

де a — фіксована функція з вказаного простору. Для розв'язання цієї задачі істотно використовувалася можливість розкладання функцій із вказаного простору у степеневі ряди. Природно виникає питання про дослідження умов еквівалентності вказаних операторів у просторах функцій, аналітичних у некругових областях. Розв'язанню цієї задачі присвячено дану статтю.

Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, тобто для довільної точки z з області G відрізок, який з'єднує точки 0 та z, міститься в G. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [3], а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{H}(G)$. У цій статті вивчаються умови еквівалентності у просторі $\mathcal{H}(G)$ операторів вигляду

$$(Af)(z) = zf(z) + \int\limits_0^z a(z-t)f(t)dt, \tag{1}$$

де $a \in \mathcal{H}(G)$.

Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, функція k належить $\mathcal{H}(G)$, а комплекснозначна функція Θ є неперервною на відрізку $[0,1]$. Тоді оператор T, який визначається рівністю*

$$(Tf)(z) = f(z) - z\int\limits_0^1 \Theta(\sigma)k((1-\sigma)z)f(\sigma z)d\sigma, \tag{2}$$

є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$.

Доведення. Розглянемо оператор K із класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який діє за правилом $(Kf)(z) = z\int_0^1 \Theta(\sigma)k((1-\sigma)z)f(\sigma z)d\sigma$. Тоді $T = E - K$, де E — одиничний оператор. Індукцією по n переконуємося в тому, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ виконуються нерівності

$$|(K^n f)(z)| \leq \frac{|z|^n}{n!}\left(\max_{s\in[0,1]}|\Theta(s)|\right)^n \left(\max_{s\in[0,z]}|k(s)|\right)^n \left(\max_{s\in[0,z]}|f(s)|\right)^n. \tag{3}$$

З (3) випливає, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(K^n f)(z)$ збігається за топологією простору $\mathcal{H}(G)$ і формулою $(T_1 f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(K^n f)(z)$ визначається оператор T_1 із класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Оскільки T_1 є оберненим до T, то оператор T є ізоморфізмом $\mathcal{H}(G)$.

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *При виконанні умов леми* 1 *для довільної функції $g \in \mathcal{H}(G)$ рівняння*

$$f(z) - z\int\limits_0^1 \Theta(\sigma)k((1-\sigma)z)f(\sigma z)d\sigma = g(z)$$

має єдиний розв'язок f, що належить простору $\mathcal{H}(G)$.

Лема 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і a належить $\mathcal{H}(G)$. Тоді оператор A, який визначається формулою* (1), *є еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора B, який діє за правилом $(Bf)(z) = zf(z) + a(0)\int_0^z f(t)dt$.*

Доведення. Для функції $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ розглянемо оператор T, який діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(Tf)(z) = f(z) + \int\limits_0^z \varphi(z-t)f(t)dt. \tag{4}$$

Оскільки $\int_0^z \varphi(z-t)f(t)dt = z\int_0^1 \varphi(z(1-\sigma))f(\sigma z)d\sigma$, то за лемою 1 оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$ для довільної функції $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. Покажемо, що функцію $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ можна підібрати так, щоб для оператора T вигляду (4) виконувалася рівність $TA = BT$. Звідси і випливатиме справедливість леми.

Для довільної функції f із простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ маємо

$$((TA)f)(z) = (Af)(z) + \int\limits_0^z \varphi(z-t)(Af)(t)dt =$$

$$= zf(z) + \int\limits_0^z a(z-t)f(t)dt + \int\limits_0^z \varphi(z-t)\left(tf(t) + \int\limits_0^t a(t-s)f(s)ds\right)dt =$$

$$= zf(z) + \int_0^z a(z-t)f(t)dt + \int_0^z t\varphi(z-t)f(t)dt + \int_0^z f(t) \left(\int_t^z \varphi(z-s)a(s-t)ds \right) dt.$$

З іншого боку,

$$((BT)f)(z) = zf(z) + z\int_0^z \varphi(z-t)f(t)dt + a(0)\int_0^z \left(f(t) + \int_0^t \varphi(t-s)f(s)ds \right) dt =$$

$$= zf(z) + z\int_0^z \varphi(z-t)f(t)dt + a(0)\int_0^z f(t)dt + a(0)\int_0^z f(t) \left(\int_t^z \varphi(s-t)ds \right) dt.$$

Тому співвідношення $((TA)f)(z) = ((BT)f)(z)$ рівносильне тому, що

$$\int_0^z \Phi(z,t)f(t)dt = 0, \tag{5}$$

де

$$\Phi(z,t) = a(z-t) + t\varphi(z-t) + \int_t^z \varphi(z-s)a(s-t)ds - z\varphi(z-t) - a(0) - a(0)\int_t^z \varphi(s-t)ds.$$

Для виконання рівності (5) для довільної функції f із простору $\mathcal{H}(G)$ достатньо, щоб $\Phi(z,t) = 0$ при $z \in G$ та $t \in [0,z]$ (тут $[0,z]$ — відрізок, який з'єднує точки 0 та z). Покладаючи $z - t = \zeta$, отримуємо

$$\Phi(z,t) = \Phi(t+\zeta,t) = a(\zeta) + t\varphi(\zeta) + \int_t^{t+\zeta} \varphi(t+\zeta-s)a(s-t)ds - (t+\zeta)\varphi(\zeta) - a(0) -$$

$$-a(0)\int_t^{t+\zeta} \varphi(s-t)dt = a(\zeta) + \int_0^\zeta \varphi(\zeta-\tau)a(\tau)d\tau - \zeta\varphi(\zeta) - a(0) - a(0)\int_0^\zeta \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= a(\zeta) - a(0) - \zeta\varphi(\zeta) + \int_0^\zeta \left(a(\zeta-\tau) - a(0)\right)\varphi(\tau)d\tau.$$

Таким чином, для виконання рівності $TA = BT$ достатньо, щоб

$$a(z) - a(0) - z\varphi(z) + \int_0^z \left(a(z-\tau) - a(0)\right)\varphi(\tau)d\tau = 0$$

при $z \in G$. Нехай $a(z) - a(0) = zb(z)$, де $b \in \mathcal{H}(G)$. Тоді рівняння для знаходження функції φ набирає вигляду

$$zb(z) - z\varphi(z) + \int_0^z (z-\tau)b(z-\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0.$$

Це рівняння рівносильне такому:

$$\varphi(z) - z\int_0^1 (1-\sigma)b((1-\sigma)z)\varphi(\sigma z)d\sigma = b(z), \quad z \in G. \tag{6}$$

За наслідком 1 існує єдина функція $\varphi \in \mathcal{H}(G)$, для якої виконується рівність (6). Тоді відповідний ізоморфізм T, який визначається формулою (4), є шуканим.

Лему 2 доведено.

Для комплексного числа z і цілого невід'ємного n через $(z)_n$ позначимо символ Похгамера, тобто $(z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1)$ при $n \geq 1$, $(z)_0 = 1$. Через U_z та $\mathcal{J}$ позначатимемо відповідно оператори множення на незалежну змінну та вольтеррівського інтегрування. Для подальшого викладу нам буде потрібна теорема 1 з [4] (див. також теорему 2 з [5]) щодо умов ізоморфності діагональних операторів, породжених тейлорівськими коефіцієнтами узагальненої гіпергеометричної функції. Наведемо її формулювання.

Теорема 1. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і $a \in \mathbb{C}$, до того ж $a \neq -n$, $n = 0, 1, \dots$. Тоді діагональний оператор P_a, який на степенях z визначається формулами $P_a(z^n) = \dfrac{(a)_n}{n!}z^n$, $n = 0, 1, \dots$, продовжується до ізоморфізму з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.*

Лема 3. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і a належить $\mathbb{C}$. Для того щоб оператор $B = U_z + a\mathcal{J}$ був еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора множення на незалежну змінну U_z, необхідно і достатньо, щоб $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай оператори B та U_z є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}(G)$. Покажемо, що $a \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $a = -n$ при деякому $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\dim \operatorname{Ker} B \geq 1$, оскільки $Bz^{n-1} = 0$. Оскільки ядро оператора U_z є нульовим, то оператори B та U_z не є еквівалентними, бо розмірності ядер еквівалентних операторів є однаковими. Прийшли до суперечності.

Достатність. Нехай $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. Тоді за теоремою 1 оператор P_{a+1} є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що $(BP_{a+1})(z^n) = (P_{a+1}U_z)(z^n)$ при $n = 0, 1, \dots$. З цих рівностей випливає, що $BP_{a+1} = P_{a+1}U_z$, оскільки область G є однозв'язною, а система $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ — повною в $\mathcal{H}(G)$. Оскільки оператор P_{a+1} — ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, то оператори B та U_z є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}(G)$.

Лему 3 доведено.

Наслідок 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, а $B_j = U_z + a_j\mathcal{J}$, де $a_j \in \mathbb{C}$, до того ж $a_j \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$. Тоді оператори B_1 та B_2 є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Наслідок 3. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, а $B_j = U_z + a_j\mathcal{J}$, де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, до того ж $a_1 \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, і $a_2 = -m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді оператори B_1 та B_2 не є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Лема 4. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, а $B_j = U_z + a_j\mathcal{J}$, де $a_j \in \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, $j = 1, 2$, до того ж $a_1 \neq a_2$. Тоді оператори B_1 та B_2 не є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що для деяких різних натуральних чисел k та l оператори $B_1 = U_z - k\mathcal{J}$ та $B_2 = U_z - l\mathcal{J}$ є еквівалентними у просторі $\mathcal{H}(G)$. Не порушуючи загальності вважатимемо, що $k > l$. Тоді існує ізоморфізм $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, для якого виконується рівність

$$TB_1 = B_2T. \tag{7}$$

Розв'яжемо далі рівняння

$$((U_z - l\mathcal{J})\, f)\,(z) = p(z) \tag{8}$$

відносно функції $f(z)$ із простору $\mathcal{H}(G)$ для довільного многочлена $p(z)$. Нехай $p(z) = \sum_{j=0}^{s} p_j z^j$. Оскільки $0 \in G$, то існує окіл U_δ точки 0 вигляду $U_\delta = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \delta\}$ такий, що $U_\delta \subset G$. Довільну функцію $f(z)$ із простору $\mathcal{H}(G)$ при $|z| < \delta$ зобразимо у вигляді $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$. Тому рівняння (8) при $|z| < \delta$ можна записати у вигляді $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{j-l}{j} f_{j-1} z^j = \sum_{j=0}^{s} p_j z^j$. Звідси випливає, що $p_0 = 0$ і $\dfrac{j-l}{j} f_{j-1} = p_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Для існування розв'язку цієї системи відносно f_j, $j = 0, 1, \ldots,$ необхідно, щоб одночасно виконувались умови $p(0) = 0$ і $p^{(l)}(0) = 0$. При виконанні цих двох умов одержимо, що при $|z| < \delta$ функція $f(z)$, яка є розв'язком рівняння (8), має вигляд

$$f(z) = \sum_{j=0}^{l-2} \frac{j+1}{j+1-l} p_{j+1} z^j + \sum_{j=l}^{s-1} \frac{j+1}{j+1-l} p_{j+1} z^j + cz^{l-1}, \tag{9}$$

де c — довільне комплексне число. Оскільки права частина рівності (9) є многочленом, то звідси випливає, що для довільного многочлена $p(z)$, для якого $p(0) = p^{(l)}(0) = 0$, загальний розв'язок рівняння (8) у класі функцій $f(z) \in \mathcal{H}(G)$ описується формулою (9), в якій c — довільна стала. Звідси одержуємо, що ядро оператора $U_z - l\mathcal{J}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$ збігається з множиною $\{cz^{l-1} : c \in \mathbb{C}\}$. Позначимо $\varphi_j(z) = Tz^j$, $j = 0, 1, \ldots,$ і покажемо, що при $j = \overline{0, k-1}$ функції $\varphi_j(z)$ є многочленами, степінь кожного з яких не перевищує $l-1$. Це твердження доведемо для функцій $\varphi_{k-m}(z)$ індукцією по m, $m = 1, 2, \ldots, k$. Подіявши рівністю (7) на функцію $f(z) = z^{k-1}$, отримаємо $(U_z - l\mathcal{J})\varphi_{k-1}(z) = 0$. Тому $\varphi_{k-1}(z) = c_0 z^{l-1}$, де $c_0 \in \mathbb{C}$. Припустимо, що при деякому натуральному $m = \overline{1, k-1}$ функція $\varphi_{k-m}(z)$ є многочленом, степінь якого не перевищує $l-1$. Подіявши рівністю (7) на функцію $f(z) = z^{k-m-1}$, одержимо

$$((U_z - l\mathcal{J})\varphi_{k-(m+1)})(z) = -\frac{m}{k-m}\varphi_{k-m}(z). \tag{10}$$

Використовуючи загальний розв'язок (9) рівняння (8), переконуємося, що функція $\varphi_{k-(m+1)}(z)$, яка є розв'язком рівняння (10), збігається з деяким многочленом, степінь якого не перевищує $l-1$. Таким чином, функції $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{k-1}(z)$ є многочленами, степінь кожного з яких не перевищує $l-1$. Оскільки кількість цих многочленів дорівнює k і $k > l$, то вони є лінійно залежними. Отже, існують сталі $C_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, k-1}$, (не всі дорівнюють нулеві), для яких $\sum_{j=0}^{k-1} C_j \varphi_j(z) = 0$. Тому $T\left(\sum_{j=0}^{k-1} C_j z^j\right) = 0$. Отже, ми одержали, що оператор T має нетривіальний нуль, що неможливо, оскільки T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$.

Лему 4 доведено.

З лем 2 – 4 випливає основний результат цієї статті.

Теорема 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і функції a_j належать $\mathcal{H}(G)$, $j = 1, 2$. Для того щоб оператор $(A_1 f)(z) = zf(z) + \int_0^z a_1(z-t)f(t)dt$ був еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора $(A_2 f)(z) = zf(z) + \int_0^z a_2(z-t)f(t)dt$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна із таких умов*:

$1^\circ)$ $a_1(0) = a_2(0)$;

$2^\circ)$ $a_1(0),\ a_2(0) \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$.

Література

1. *Нагнибида Н. И.* Об интегральных возмущениях оператора умножения на независимую переменную // Докл. АН СССР. – 1987. – **292**, № 3. – С. 542 – 545.
2. *Нагнибіда М. І., Баб'юк Л. Г.* Про еквівалентність інтегральних збурень оператора множення на незалежну змінну // Мат. студ. – 1994. – **3**. – С. 85 – 90.
3. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30 – 49.
4. *Лінчук Ю. С.* Узагальнений оператор Данкла – Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 7 – 17.
5. *Лінчук Ю. С.* Про один клас діагональних операторів у просторах аналітичних функцій та його застосування // Доп. НАН України. – 2014. – № 3. – С. 25 – 28.

Одержано 14.01.16