УДК 517.5

М. С. Добушовський, М. М. Шеремета (Льв. нац. ун-т ім. І. Франка)

ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА – СТІЛЬТЬЄСА

We study the Laplace – Stieltjes integrals with an arbitrary abscissa of convergence. The lower and upper estimates for these integrals are established. The accumulated results are used to deduce the relationships between the growth of the integral and the maximum of the integrand.

Изучаются интегралы Лапласа – Стильтьеса с произвольной абсциссой сходимости. Установлены оценки снизу и сверху для этих интегралов. Полученные результаты применены к установлению связи между ростом интеграла и максимума подынтегрального выражения.

1. Вступ. Нехай V — клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа на $[0,+\infty)$ функцій F. Будемо говорити, що F належить $V(l)$, якщо F належить V і $F(x)-F(x-0)\le$ $\le l<+\infty$ для всіх $x\ge 0$.

Вважаємо, що невід'ємна функція f на $[0,+\infty)$ така, що інтеграл Лебега – Стільтьєса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ існує для кожного $\sigma\in\mathbb{R}$ і $A\in[0,+\infty)$, і як в [1, с. 7], інтеграл

$$I(\sigma)=\int\limits_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x),\quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

назвемо інтегралом Лапласа – Стільтьєса. Він є безпосереднім узагальненням звичайного інтеграла Лапласа $I(\sigma)=\int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx$ і ряду Діріхле

$$D(\sigma)=\sum_{n=0}^\infty a_n e^{\lambda_n\sigma} \tag{2}$$

з невід'ємними коефіцієнтами a_n і показниками λ_n, $0\le\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to\infty)$, якщо виберемо $F(x)=n(x)=\int_{\lambda_n\le x}1$ і $f(\lambda_n)=a_n\ge 0$ для всіх $n\ge 0$. Через $S(\Lambda,A)$ позначимо клас рядів Діріхле (2) з послідовністю $\Lambda=(\lambda_n)$ показників і абсцисою абсолютної збіжності $A\in$ $\in(-\infty,+\infty]$, а для $D\in S(\Lambda,A)$ і $\sigma<A$ нехай $\mu(\sigma,D)=\max\{a_n\exp\{\sigma\lambda_n\colon n\ge 0\}\}$ — максимальний член.

Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,A)$. Для $\Phi\in\Omega(A)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(x)=x-\Phi(x)/\Phi'(x)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Зрозуміло, що функція φ є неперервно диференційовною і зростаючою до A на $(0,+\infty)$. Функція Ψ є [1, с. 30; 4, 5] неперервно диференційовною і зростаючою до A на $(-\infty,A)$.

Нехай $\gamma\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — така неперервна функція, що $\gamma(x)\uparrow+\infty$ при $x\to+\infty$, а для $q\in(0,1)$ і $x\ge 0$ нехай

$$\Delta_\gamma(x;q)=\frac{1}{x}\left(\gamma^{-1}(x)-\gamma^{-1}\left(x-e^{-qx}\right)\right).$$

Для цілого ряду Діріхле ($A=+\infty$) оцінка знизу міститься у такій теоремі.

Теорема A [6]. *Нехай* $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $D \in S(\Lambda, A)$ *і* $\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$ *при* $x \to \to +\infty$ *для деякого* $q \in (0, 1)$. *Припустимо, що* $\ln|a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \geq n_0$ *і* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1$. *Тоді* $\overline{\lim}_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln D(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0$.

Наступна теорема є аналогом теореми A для рядів Діріхле з нульовою абсцисою збіжності.

Теорема Б [5]. *Нехай* $\Phi \in \Omega(0)$, $D \in S(\Lambda, 0)$ *і* $\Delta_\gamma(x; q) = O(1)$ *при* $x \to +\infty$ *для деякого* $q \in (0, 1)$. *Припустимо, що* $\ln |a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \geq n_0$ *і* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1$. *Тоді* $\overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln D(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0$.

Нарешті, оцінку зверху містить наступна теорема.

Теорема B [5]. *Нехай* $A = +\infty$ *або* $A = 0$, $F \in S(\Lambda, A)$, $\Phi \in \Omega(A)$ *і* $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ *при* $\sigma \uparrow A$. *Припустимо, що* $\gamma(x)/x$ *не зростає на* $[x_0, +\|)$ *і* $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ *при* $x \to +\infty$. *Якщо* $\ln|a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \geq n_0$ *і* $\ln n = o(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$, *то* $\overline{\lim}_{\sigma\uparrow A} \dfrac{\ln D(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq 0$.

У цій статті ми одержимо аналоги теорем A – B для інтегралів Лапласа – Стільтьєса.

2. Оцінка $\ln I(\sigma)$ зверху. Зрозуміло, що інтеграл (1) або збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує число $\sigma_з$ таке, що інтеграл (1) збіжний для $\sigma < \sigma_з$ і розбіжний для $\sigma > \sigma_з$. В останньому випадку число $\sigma_з$ називається абсцисою збіжності інтегралу (1). Якщо інтеграл (1) збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважаємо $\sigma_з = +\infty$, а якщо він розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважаємо $\sigma_з = -\infty$.

Нехай $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, I) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \geq 0\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, — максимум підінтегрального виразу. Тоді або $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує число σ_μ таке, що $\mu(\sigma) < +\infty$ для $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma) = +\infty$ для $\sigma > \sigma_\mu$. За аналогією число σ_μ будемо називати абсцисою максимуму підінтегрального виразу.

Лема 1 [1, с. 13]. *Якщо* $F \in V$ *і* $\ln F(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$, *то* $\sigma_з \geq \sigma_\mu$.

Для кожного ряду Діріхле (2) $\sigma_з \leq \sigma_\mu$. У загальному випадку ця нерівність може не виконуватись. Будемо говорити, як в [1, с. 21], що невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція f має регулярну зміну відносно F, якщо існують $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $h > 0$ такі, що для всіх $x \geq a$

$$\int_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \geq hf(x). \tag{3}$$

Лема 2 [1, с. 21]. *Якщо* $F \in V$ *і* f *має регулярну зміну відносно* F, *то* $\sigma_з \leq \sigma_\mu$.

Зауважимо, що леми 1 і 2 у дещо загальнішому вигляді опубліковано в [2]. Нам буде потрібна також така лема.

Лема 3 [1, с. 30]. *Нехай* $\sigma_\mu = A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $\Phi \in \Omega(A)$. *Для того, щоб* $\ln \mu(\sigma, I) \leq \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, A)$, *необхідно і досить, щоб* $\ln f(x) \leq -x\Psi(\varphi(x))$ *для всіх* $x \geq x_0$.

Через $LS_A(F)$ позначимо клас інтегралів (1) зі заданою функцією F таких, що $\sigma_\mu = A$. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $A = +\infty$ *або* $A = 0$, $I \in LS_A(F)$, $\Phi \in \Omega(A)$ *і* $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ *при* $\sigma \uparrow A$. *Припустимо, що* $\gamma(x)/x$ *не зростає на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ *при* $x \to +\infty$. *Якщо*

$$\ln f(x) \le -x\Psi(\varphi(x)), \quad x \ge x_0, \tag{4}$$

і

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln F(x)}{\gamma(x)} = 0, \tag{5}$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \le 0. \tag{6}$$

Доведення. Покладемо $\beta(\sigma) = \Phi(\sigma)/\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$. Тоді [1, с. 103; 5, 6] $\sigma + \beta(\sigma) < A$, тобто функцію $\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))$ визначено на $(-\infty, A)$.

Для простоти припустимо, що $F(0) = 0$, і покладемо $g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \underline{(}\sigma)))$. З (5) і незростання $\gamma(x)/x$ отримуємо $\ln F(x) = o(\gamma(x)) = o(x)$ при $x \to +\infty$ і

$$I(\sigma) - \mu(\sigma, I)F(g(\sigma)) = \left(\int\limits_0^{g(\sigma)} + \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty}\right) f(x)e^{x\sigma}dF(x) - \mu(\sigma, I)F(g(\sigma)) \le$$

$$\le \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x(\Psi(\varphi(x)) - \sigma\}dF(x) \le \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x(\Psi(\varphi(g(\sigma))) - \sigma\}dF(x) =$$

$$= \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x\beta(\sigma)\}dF(x) \le \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} F(x)e^{-x\beta(\sigma)}dx \le$$

$$\le \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x\beta(\sigma) + \varepsilon\gamma(x)\}dx = \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x(\beta(\sigma) - \varepsilon\gamma(x)/x\}dx \tag{7}$$

для довільного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), A)$. З огляду на незростання $\gamma(x)/x$ і умову $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$ для $x \ge g(\sigma)$ маємо

$$\frac{\gamma(x)}{x} \le \frac{\gamma(g(\sigma))}{g(\sigma)} = \frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))} \le \frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} =$$

$$= O\left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}\right) = O(\beta(\sigma)), \quad \sigma \uparrow A,$$

тобто $\gamma(x)/x \le K\beta(\sigma)$ $(x \ge g(\sigma))$ для деякого $K > 0$ і всіх $\sigma_1 \le \sigma < A$. Отже, для кожного $\varepsilon \in (0, 1/K)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), A)$ з (7) отримуємо

$$I(\sigma) - \mu(\sigma, I)F(g(\sigma)) \le \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x(1 - \varepsilon K)\beta(\sigma))\}dx \le 1/(1 - \varepsilon K).$$

Тому

$$\ln\, I(\sigma) \le \ln\, \mu(\sigma) + \ln\, F(g(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \uparrow A. \tag{8}$$

За лемою 3 з (4) маємо $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$ і, отже,

$$\frac{\ln\, I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \le \frac{\ln\, F(g(\sigma))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} + o(1), \quad \sigma \uparrow A. \tag{9}$$

Оскільки

$$\sigma + \underline{(}\sigma) \le \sigma + \frac{\Phi(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} = \sigma + \Psi^{-1}(\sigma) - \Psi(\Psi^{-1}(\sigma)) = \Psi^{-1}(\sigma)$$

і з умови $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ $(\sigma \uparrow A)$ випливає співвідношення $\Phi'(\Psi^{-1}(\Psi^{-1}(\sigma))) = O(\Phi'(\sigma))$ $(\sigma \uparrow A)$, то з огляду на незростання $\gamma(x)/x$ одержуємо

$$\frac{\ln\, F(g(\sigma))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} = o\left(\frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\right) = o\left(\frac{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))}{\Phi'(\sigma)}\right) =$$

$$= o\left(\frac{\Phi'(\Psi^{-1}(\Psi^{-1}(\sigma)))}{\Phi'(\sigma)}\right) = o(1), \quad \sigma \uparrow A.$$

Звідси і з (9) випливає (6).

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що у випадку $A = +\infty$ умова $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ $(\sigma \uparrow A)$ не є обмеженням на швидкість зростання функції Φ. Наприклад, цю умову задовольняють функції $\Phi(\sigma) = \sigma \ln\, \sigma$ $(\sigma \ge \sigma_0)$, $\Phi(\sigma) = \sigma^p$ $(\sigma \ge \sigma_0)$ з $p > 1$ і $\Phi(\sigma) = \exp_k \sigma$ з $k \in \mathbb{N}$, де $\exp_1 x = e^x$ і $\exp_k x = \exp_{k-1} e^x$. У випадку, коли $A = 0$ і $\Phi(\sigma) = B(1/|\sigma|)$ для $\sigma < 0$, наведена вище умова вказує на те, що B не може зростати повільніше, ніж степенева функція (наприклад, функція $B(x) = \ln\, x$ $(x \ge e)$ не задовольняє цю умову.

Зауважимо також, що умову незростання $\gamma(x)/x$ у випадку, коли Φ має степеневе зростання, можно замінити умовою $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$, на що вказує наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $A = +\infty$, $I \in LS_{+\infty}(F)$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \ge h > 1$ і $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \le H < +\infty$ для $\sigma \ge \sigma_0$. Припустимо, що $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ і $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$. Тоді за умов (4) і (5) виконується нерівність (6) з $A = +\infty$.*

Доведення. Приймемо тепер $g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))$. Тоді з (5) з огляду на умову $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$, як раніше, маємо

$$I(\sigma) - \mu(\sigma, I)F(g(\sigma)) = \int\limits_0^{g(\sigma)} f(x)e^{\sigma x} dF(x) +$$

$$+ \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} f(x)e^{\sigma x} dF(x) - \mu(\sigma, I)F(g(\sigma)) \le \mu(\sigma, F) \int\limits_0^{g(\sigma)} dF(x) - \mu(\sigma, I)F(g(\sigma)) +$$

$$+ \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} f(x)e^{\sigma x} dF(x) \le \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} f(x)e^{\sigma x} dF(x) \le \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x(\Psi(\varphi(x)) - \sigma)\} dF(x) \le$$

$$\le \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x(\Psi(\varphi(x)) - \Psi(\varphi(x))/2)\} dF(x) =$$

$$= \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x\Psi(\varphi(x))/2\} dF(x) =$$

$$= F(x)\, e^{-\frac{x\Psi(\varphi(x))}{2}}\Big|_{g(\sigma)}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int\limits_{g(\sigma)}^{+\infty} F(x) e^{-\frac{x\Psi(\varphi(x))}{2}} d(x\Psi(\varphi(x))) \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-x\Psi(\varphi(x))/3\} dF(x) \le 3/2$$

для всіх досить великих σ, оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$. Звідси і з (4), (5) за лемою 3 отримуємо

$$\frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \le \frac{\ln F(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} + o(1) = o\left(\frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\right), \quad \sigma \to +\infty.$$

Завдяки умові $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$ залишилось довести, що $\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)) = O(\Phi'(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$. Використовуючи умови теореми 2 і теорему Лагранжа, неважко довести, що $0 < \ln \Phi'(\sigma) - \ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) \le H/(h-1)$ і $0 < \ln \Phi'(2\sigma) - \ln \Phi'(\sigma) \le H$ для досить великих σ. Тому $0 < \ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) - \ln \Phi'(\sigma) \le H/(h-1) + H$ для досить великих σ.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що умови теореми 2 не виконуються, якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що $\Phi(\sigma) = \sigma\alpha(\sigma)$ для $\sigma \ge \sigma_0$, де α — повільно зростаюча функція. В останньому випадку правильною є така теорема.

Теорема 3. *Нехай $A = +\infty$, $I \in LS_{+\infty}(F)$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, Φ' — повільно зростаюча функція і $\Phi'(\sigma) = (1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$. Припустимо, що $\gamma(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to +\infty$ і γ^{-1} — повільно зростаюча функція. Тоді за умов (4) і*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln F(x))}{x} < 1 \tag{10}$$

виконується нерівність (6) з $A = +\infty$.

Доведення. З умов (10) і $\gamma(x) = O(\varphi(x))$ $(x \to +\infty)$ випливає існування чисел $q \in (0,1)$ і $K > 0$ таких, що $\ln F(x) \le \gamma(qx) \le K\varphi(qx)$ для досить великих x. З іншого боку,

$$x\Psi(\varphi(x)) \ge \int\limits_{(1+q)x/2}^{x} \varphi(t)dt \ge \frac{(1-q)x}{2}\, \varphi\left(\frac{(1+q)x}{2}\right).$$

Звідси

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln F(x)}{x\Psi(\varphi(x))} \le \frac{2K}{1-q} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi(qx)}{x(\varphi((1+q)x/2))} = 0,$$

тому що $q < (1+q)/2$ і з повільного зростання Φ' випливає співвідношення $\varphi(\eta x) = o(\varphi(x))$ при $x \to +\infty$ для кожного $\eta \in (0,1)$. Тому якщо покладемо $g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))$, то, як і раніше,

$$\frac{\ln\, I(\sigma)-\Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\le \frac{\ln\, F(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}+o(1)\le o\left(\frac{\gamma(q\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\right), \quad \sigma\to+\infty.$$

Оскільки γ^{-1} — повільно зростаюча функція, залишилося довести, що $\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))\le\Phi'\sigma)$ при $\sigma\to+\infty$. Остання нерівність випливає з повільного зростання Φ' і умови $\Phi'(\sigma) = (1+o(1)\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma\to+\infty$.

Теорему 3 доведено.

Нарешті, розглянемо випадок, коли повільно зростає функція $\Phi\in\Omega(0)$.

Теорема 4. *Нехай $A=0$, $I\in LS_0(F)$ і $\Phi\in\Omega(0)$. Припустимо, що $\gamma(\Phi'(\sigma))=O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ і $\gamma(\Phi'(\sigma))=O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ при $\sigma\uparrow 0$. Тоді за умов (4) і*

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\, F(x)}{\gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(x))))}=0 \tag{11}$$

виконується нерівність (6) з $A=0$.

Доведення. З умови $\gamma(\Phi'(\sigma))=O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ при $\sigma\uparrow 0$ випливає, що $\gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(x)))= O(x|\Psi(\varphi(x))|)$ при $x\to+\infty$, і, отже, з огляду на (11) $\ln\, F(x)=o(x|\Psi(\varphi(x))|)$ при $x\to+\infty$. Тому, якщо покладемо $g(\sigma)=\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma/2))$, то, як і раніше,

$$I(\sigma)-\mu(\sigma,I)F(g(\sigma))\le\int\limits_{g(\sigma)}^{\infty}\exp\{-x(\Psi(\varphi(x))-\sigma)\}dF(x)\le$$

$$\le\int\limits_{g(\sigma)}^{\infty}\exp\{-x(\Psi(\varphi(x))-2\Psi(\varphi(x)))\}dF(x)=\int\limits_{g(\sigma)}^{\infty}\exp\{-x|\Psi(\varphi(x))|\}dF(x)\le$$

$$\le-\int\limits_{g(\sigma)}^{\infty}F(x)\exp\{-x|\Psi(\varphi(x))|\}\varphi(x)dx\le\int\limits_{g(\sigma)}^{\infty}\exp\{-x|\Psi(\varphi(x))|/2\}|\varphi(x)|dx\le 2.$$

Звідси, як і вище, з огляду на (11) отримуємо

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\, I(\sigma)-\Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\le\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\, F(g(\sigma))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\le\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\, F(x)}{\gamma(\Phi'(2\Psi(\varphi(x)))}=0,$$

бо $\gamma(\Phi'(\sigma))=O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ при $\sigma\uparrow 0$.

Теорему 4 доведено.

3. Оцінка $\ln\, I(\sigma)$ знизу. Наступну лему буде використано для отримання оцінки $\ln\, I(\sigma)$ знизу на деякій послідовності.

Лема 4 [1, с. 100]**.** *Нехай $F\in V(l)$ і γ — невід'ємна неперервна і зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція така, що*

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\, F(x)}{\gamma(x)}>1. \tag{12}$$

Тоді існує функція $G\in V$, яка задовольняє такі умови:

1) $G(x)\le e^{\gamma(x)}+l$ для всіх $x>0$;

2) існують такі зростаючі до $+\infty$ *послідовності* (τ_k) *і* (x_k), $x_0 < \tau_1 < x_1 < \tau_2 < \ldots < < x_k < \tau_{k+1} < x_{k+1} < \ldots$, *що*

$$G(x_k) \geq e^{\gamma(x_k)}, \quad G(x_k) \geq 2G(\tau_k),$$

і

$$G(x) = \begin{cases} b_k, & x_k \leq x \leq \tau_{k+1}, \\ F(x) - c_k, & \tau_k \leq x \leq x_k, \end{cases}$$

де b_k *і* c_k *— невід'ємні сталі;*

3) якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_k, \tau_{k+1}], \quad k \geq 0, \\ g(x) > 0, & x \in (\tau_k, x_k), \quad k \geq 1, \end{cases} \tag{13}$$

то

$$\int_0^\infty f(x) e^{\sigma x} dG(x) = \int_0^\infty f(x) e^{\sigma x} dF(x).$$

Для $q \in (0, 1)$ і $x \geq \gamma(0) + 1$ означимо $\Delta_\gamma(x; q)$, як раніше. Тоді правильним є наступне узагальнення теореми А.

Теорема 5. *Нехай* $F \in V(l)$, $\Psi \in \Omega(+\infty)$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ *і*

$$\ln f(x) \geq -x\Psi(\varphi(x)), \quad x \geq x_0. \tag{14}$$

Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *така, що виконується* (12) *і для деякого* $q \in (0, 1)$

$$\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{15}$$

Тоді

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0. \tag{16}$$

Доведення. За лемою 4 існує функція $G \in V$, яка задовольняє умови 1 – 3. Нехай $0 < p < < 1 - q$. Оскільки $G(x_k) - G^p(x_k) = (1 + o(1))G(x_k)$ при $k \to \infty$ і $G(x_k) \geq 2G(\tau_k)$, то існує таке $t_k \in (\tau_k, x_k)$, що

$$G(x_k) - G^p(x_k) - l \leq G(t_k) \leq G(x_k) - G^p(x_k).$$

Тому для $\sigma_k = \varphi(x_k)$ з огляду на (13) маємо

$$I(\sigma_k) \geq \int_{t_k}^{x_k} f(x) \exp\{x\sigma_k\} dG(x) \geq \int_{t_k}^{x_k} \exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + x\sigma_k\} dG(x) \geq$$

$$\geq \exp\{-x_k\Psi(\varphi(x_k)) + t_k\sigma_k\} \int_{\tau_k}^{x_k} dG(x) =$$

$$= \exp\{-x_k\Psi(\varphi(x_k)) + x_k\varphi(x_k) - (x_k - t_k)\varphi(x_k)\}(G(x_k) - G(t_k)) \geq$$
$$\geq \exp\{\Phi(\varphi(x_k))\}G^p(x_k)\exp\{-(x_k - t_k)\varphi(x_k)\}. \tag{17}$$

Завдяки властивостям 1, 2 і нерівності (16) для $k \geq k_0$ отримуємо

$$t_k \geq \gamma^{-1}(\ln(G(t_k) - l)) \geq \gamma^{-1}(\ln(G(x_k) - G^p(x_k) - 2l)) \geq$$
$$\geq \gamma^{-1}(\ln G(x_k)) - (\gamma^{-1}(\ln G(x_k))) - \gamma^{-1}(\ln(G(x_k) - G^p(x_k) - 2l)) \geq x_k - \delta_k,$$

де

$$\delta_k = \gamma^{-1}(\ln G(x_k)) - \gamma^{-1}\left(\ln G(x_k) + \ln\left(1 - \frac{G^p(x_k) - 2l}{G(x_k)}\right)\right) =$$
$$= \gamma^{-1}(\ln G(x_k)) - \gamma^{-1}\left(\ln G(x_k) - \frac{(1 + o(1))}{G^{1-p}(x_k)}\right) \leq$$
$$\leq \gamma^{-1}(\ln G(x_k)) - \gamma^{-1}(\ln G(x_k) - \exp\{-q\ln G(x_k)\}) =$$
$$= \gamma^{-1}(\gamma(x_k)) - \gamma^{-1}(\gamma(x_k) - \exp\{-q\gamma(x_k)\}) =$$
$$= \Delta_\gamma(\ln G(x_k), q)\ln G(x_k).$$

Тому з (17) з огляду на (15) випливає, що

$$\ln I(\sigma_k) \geq p\ln G(x_k) + \Phi(\varphi(x_k)) - \Delta_\gamma(\ln G(x_k), q)\ln G(x_k)\varphi(x_k) =$$
$$= \Phi(\varphi(x_k)) + p\ln G(x_k)\left\{1 - \frac{1}{p}\Delta_\gamma(\ln G(x_k), q)\varphi(x_k)\right\} \leq$$
$$\leq \Phi(\varphi(x_k)) + p\ln G(x_k)\left\{1 - \frac{1}{p}\Delta_\gamma(\ln G(x_k), q)\varphi(\gamma^{-1}(\ln(G(x_k)))\right\} =$$
$$= \Phi(\varphi(x_k)) + (1 + o(1))p\ln G(x_k) \geq \Phi(\varphi(x_k)) + (1 + o(1))p\gamma^{-1}(x_k), \quad k \to \infty,$$

і оскільки $\sigma_k = \varphi(x_k)$, тобто $x_k = \Phi'(\sigma_k)$, звідси отримуємо

$$\frac{\ln I(\sigma_k) - \Phi(\sigma_k)}{\gamma(\Phi'(\sigma_k))} \geq p + o(1), \quad k \to +\infty.$$

З огляду на довільність p теорему 5 доведено.

З огляду на зростання φ, зауважимо, що з умови (15) для деякого $q \in (0, 1)$ випливає, що $\Delta_\gamma(x; q) \to 0$ $(x \to +\infty)$ для цього q. Функція $\gamma(x) = \ln x$ не задовольняє останню умову, але вже $\gamma(x) = (1 + \eta)\ln x$ з $\eta > 0$ цю умову задовільняє.

Виникає природне питання: для яких γ і φ умову (12) можна замінити умовою

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln F(x)}{\gamma(x)} > 0? \tag{18}$$

З (18) випливає існування такого числа $\beta > 0$, що

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln F(x)}{\beta\gamma(x)} > 1.$$

Оскільки β — довільне число, то теорема 5 повинна бути правильною для всіх $q \in (0, 1)$. Іншими словами, отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $F \in V(l)$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ *і виконується умова* (14). *Припустимо, що невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *така, що*

$$\ln \frac{1}{\gamma'(x)} = o(\gamma(x)), \quad x \to +\infty, \tag{19}$$

і

$$\ln \varphi(x) = o(\gamma(x)), \quad x \to +\infty.$$

Якщо виконується (18), то

$$\overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} > 0.$$

Доведення. Для кожного $q > 0$ існує $\xi = \xi(x) \in (x - e^{-qx}, x)$ таке, що

$$(\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx}))\varphi(\gamma^{-1}(x)) = \frac{e^{-qx}}{\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))} \varphi(\gamma^{-1}(x)) =$$

$$= \frac{e^{-(1+o(1))qx}}{\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))} = \frac{e^{-(1+o(1))q\xi}}{\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

тобто (15) виконується для кожного $q \in (0, 1)$. Звідси випливає, що (15) виконується також для $\beta\gamma(x)$ замість $\gamma(x)$.

Наслідок 1 доведено.

Зауважимо, що умову (19) не задовольняє функція $\gamma(x) = \ln x$, але задовольняє $\gamma(x) = = \ln^{1+\alpha} x$ з $\alpha > 0$.

Наступна теорема є аналогом теореми 5 для випадку $A = 0$.

Теорема 6. *Нехай* $F \in V(l)$, $\Phi \in \Omega(0)$, $I \in LS_0(F)$ *і виконується умова* (14). *Припустимо, що* γ — *невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що виконується* (12) *і для деякого* $q \in (0, 1)$

$$\Delta_\gamma(x; q) = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Тоді

$$\overline{\lim_{\sigma \uparrow 0}} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0.$$

Доведення цієї теореми відрізняється від доведення теореми 5 тільки тим, що тепер $x\Psi(\varphi(x))$ є спадною функцією, а $\sigma < 0$. Тому для $\sigma_k = \varphi(x_k) \uparrow 0$ $(k \to \infty)$ маємо

$$I(\sigma_k) \geq \int_{t_k}^{x_k} \exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + x\sigma_k\} dG(x) \geq$$

$$\geq \exp\{-t_k\psi(\varphi(t_k)) + x_k\sigma_k\}(G(x_k) - G(t_k)) \geq$$

$$\geq \exp\{\Phi(\varphi(x_k))\}(G(x_k) - G^p(x_k)) \exp\{-(x_k - t_k)\varphi(t_k)\}.$$

Подібно до доведення теореми 5 отримуємо

$$\ln I(\sigma_k) \geq \Phi(\sigma_k) + p \ln G(x_k) - \delta_k \varphi(t_k).$$

Оскільки $\ln G(x_k) = (1 + o(1)) \ln G(t_k)$, $\varphi(t_k) \uparrow 0$ і $\Delta_\gamma(x_k; q) = O(1)$ при $k \to \infty$, звідси випливає, що

$$\frac{\ln I(\sigma_k) - \Phi(\sigma_k)}{\gamma(\Phi'(\sigma_k))} \geq p + o(1), \quad k \to \infty,$$

що і завершує доведення теореми 6.

Як у випадку, коли $I \in LS_{+\infty}(F)$, для $I \in LS_0(F)$ правильним є такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $F \in V(l)$, $\Phi \in \Omega(0)$, $I \in LS_0(F)$ і виконується умова* (14). *Припустимо, що невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ задовольняє умови* (18) *і* (19). *Тоді*

$$\varlimsup_{\sigma \uparrow 0} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} > 0.$$

4. Зв'язок між зростанням $\ln I(\sigma)$ і $\ln \mu(\sigma, I)$. Використовуючи теореми 1 – 4 і наслідки 1, 2, можемо знайти умови, за яких з оцінок зверху для $\ln \mu(\sigma, I)$ випливають подібні оцінки для $\ln I(\sigma)$.

Твердження 1. *Нехай $F \in V$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $\gamma \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — така неперервна функція, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$.*

Якщо $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \to +\infty$, функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0, +\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x \to +\infty$, то умова (5) є достатньою, а якщо $F \in V(l)$, функція γ неперервно диферецційовна на $[0, +\infty)$, $\ln (1/\gamma'(x)) = o(\gamma(x))$ і $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$, то умова (5) *є необхідною для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_{+\infty}(F)$ з нерівності*

$$\ln \mu(\sigma, I) \leq \Phi(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_0, \tag{20}$$

випливала нерівність

$$\ln I(\sigma) \leq \Phi(\sigma) + o(\gamma(\Phi'(\sigma))), \quad \sigma \to +\infty. \tag{21}$$

З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності

$$\ln I(\sigma) \leq \Phi(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_0, \tag{22}$$

випливає нерівність

$$\ln \mu(\sigma, I) \leq \Phi(\sigma) + O(\sigma), \quad \sigma \to +\infty. \tag{23}$$

Доведення. За лемою 3 з нерівності (20) випливає нерівність (4). За теоремою 1 з (4) випливає (6), тобто отримуємо (21). *Достатність* умови (5) доведено.

Для доведення *необхідності* припустимо, що (5) не виконується, тобто виконується нерівність (18). Розглянемо інтеграл Лапласа – Стільтьєса (1) з $f(x) = \exp\{-x\Psi(\varphi(x))\}$. За лемою 3 виконується нерівність (20) і, отже, $I \in LS_{+\infty}(F)$. Виконання умови (14) є очевидним. Тому за наслідком 1 існують число $\geq$0 і зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_k) такі, що $\ln I(\sigma_k) \geq \Phi(\sigma_k) + \beta\gamma(\Phi'(\sigma_k))$, тобто для такого інтеграла $I(\sigma)$ нерівність (21) не виконується. Першу частину твердження доведено.

Далі, якщо $\sigma_\mu = +\infty$ і f має регулярну зміну відносно F, то існують числа $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $h > 0$ такі, що для всіх $x \geq a$ і $\sigma > 0$

$$I(\sigma) \geq \int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)e^{t\sigma}dF(t) \geq e^{\sigma(x-a)} \int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \geq hf(x)e^{\sigma(x-a)} = f(x)e^{x\sigma}he^{-a\sigma},$$

тобто $f(x)e^{x\sigma} \leq e^{a\sigma}I(\sigma)/h$ для всіх $x \geq a$. Звідси випливає, що

$$\mu(\sigma, I) \leq \max\left\{\max_{0\leq x\leq a} f(x)e^{x\sigma},\, \max_{x\geq a} f(x)e^{x\sigma}\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{Ke^{a\sigma},\, \frac{1}{h}\,e^{a\sigma}I(\sigma)\right\}, \quad K = \text{const} > 0,$$

звідки

$$\ln\,\mu(\sigma, I) \leq \ln\,I(\sigma) + O(\sigma), \quad \sigma \to +\infty. \tag{24}$$

З нерівностей (22) і (24) випливає нерівність (23).

Твердження 1 доведено.

З огляду на твердження 1 виникає природне питання: чи є еквівалентними за умови (5) асимптотичні рівності

$$\ln\,\mu(\sigma, I) = (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{25}$$

$$\ln\,I(\sigma) = (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{26}$$

Наступне твердження дає ствердну відповідь.

Твердження 2. *Нехай $F \in V$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ і функція f має регулярну зміну відносно F. Припустимо, що $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \to +\infty$ і неперервна функція $\gamma\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$, $\gamma(x)/x$ незростає на $[x_0, +\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x \to +\infty$. Тоді умова* (5) *є достатньою для еквівалентності асимтотичних рівностей* (25) *і* (26).

Доведення. Оскільки $(\ln\,\mu(\sigma, I))/\sigma \to +\infty$ при $\sigma \to +\infty$, то з (24) маємо $(1+o(1))\ln\,\mu(\sigma, I) \leq \ln\,I(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$. З іншого боку, з (8), як у доведенні теореми 1, отримуємо $\ln\,I(\sigma) \leq \ln\,\mu(\sigma, I) + o(\gamma(\Phi'(\sigma)))$ при $\sigma \to +\infty$. Але з умови $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ $(x \to +\infty)$ випливає, що $\gamma(x) = O(\Phi(\varphi(x)))$ $(x \to +\infty)$, тобто $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\Phi(\sigma))$ $(\sigma \to +\infty)$. Тому

$$(1 + o(1))\ln\,\mu(\sigma, I) \leq \ln\,I(\sigma) \leq \ln\,\mu(\sigma, I) + o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \to +\infty,$$

звідки випливає еквівалентність асимтотичних рівностей (25) і (26).

Твердження 2 доведено.

***Приклад* 1.** Нехай $\Phi(\sigma) = Te^{\varrho\sigma}$ для $\sigma \geq \sigma_0$, де $T > 0$ і $\varrho > 0$. Тоді $\Phi'(\sigma) = T\varrho e^{\varrho\sigma}$, $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{1}{\varrho}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\varrho}\ln\,\dfrac{x}{T\varrho}$, $\Phi'(\Psi(\sigma)) = \dfrac{T\varrho}{e}\,e^{\varrho\sigma}$ і $\Phi(\Psi(\varphi(x))) = \dfrac{x}{eT\varrho}$. Виберемо $\gamma(x) = x$ для $x \geq 1$. Тоді $\gamma(x)/x$ незростає на $[1, +\infty)$, $\ln\,(1/\gamma'(x)) = o(\gamma(x))$ і $\ln\,\varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$. Тому з тверджень 1 і 2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *Нехай $F \in V(l)$. Для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_{+\infty}(F)$ при $\sigma \to +\infty$ нерівності $\ln\,\mu(\sigma, I) \leq (1+o(1))Te^{\varrho\sigma}$ і $\ln\,I(\sigma) \leq (1+o(1))Te^{\varrho\sigma}$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln\,F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.*

Якщо, крім цього, функція f має регулярну зміну відносно F, то ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln\,\mu(\sigma, I) = (1 + o(1))Te^{\varrho\sigma}$ і $\ln\,I(\sigma) = (1 + o(1))Te^{\varrho\sigma}$ при $\sigma \to +\infty$.

Для інтегралів степеневого зростання з теореми 2 і наслідку 1 подібно отримуємо два таких твердження.

Твердження 3. *Нехай $F \in V$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, а $\gamma\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неперервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$.*

Якщо $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \ge h > 1$ і $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \le H < +\infty$ для $\sigma \ge \sigma_0$, $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ і $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$, то умова (5) *є достатньою, а якщо $F \in V(l)$, функція γ є неперервно диференційовною на $[0,+\infty)$, $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ і $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$, то умова* (5) *є необхідною для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_{+\infty}(F)$ з нерівності* (20) *випливала нерівність* (21).

Якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності (22) *випливає нерівність* (23).

Твердження 4. *Нехай $F \in V$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ і функція f має регулярну зміну відносно F. Припустимо, що $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \ge h > 1$ і $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \le H < +\infty$ для $\sigma \ge \sigma_0$, $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ і $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$. Тоді умова* (5) *є достатньою для еквівалентності асимтотичних рівностей* (25) *і* (26).

***Приклад* 2.** Нехай $\Phi(\sigma) = T\sigma^p$ для $\sigma \ge \sigma_0$, де $T > 0$ і $p > 1$. Тоді $\Phi'(\sigma) = Tp\sigma^{p-1}$, $\Psi(\sigma) = (p-1)\sigma/p$, $\varphi(x) = (x/pT)^{1/(p-1)}$ і $x\Psi(\varphi(x)) = (p-1)p^{-p/(p-1)}T^{-1/(p-1)}x^{p/(p-1)}$ для $x \ge x_0$. Виберемо $\gamma(x) = x^{p/(p-1)}$ для $x \ge 1$. Тоді γ задовольняє умови тверджень 3 і 4, і ми отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 4.** *Нехай $F \in V(l)$, $T > 0$ і $p > 1$. Для того щоб для кожного інтегралу $I \in LS_{+\infty}(F)$ при $\sigma \to +\infty$ нерівності $\ln \mu(\sigma, I) \le (1+o(1))T\sigma^p$ і $\ln I(\sigma) \le (1+o(1))T\sigma^p$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln F(x) = o(x^{p/(p-1)})$ при $x \to +\infty$.*

Якщо, крім цього, функція f має регулярну зміну відносно F, то ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, I) = (1+o(1))T\sigma^p$ і $\ln I(\sigma) = (1+o(1))T\sigma^p$ при $\sigma \to +\infty$.

Для інтегралів повільного зростання, використавши теорему 3 і наслідок 1, доведемо таке твердження.

Твердження 5. *Нехай $F \in V$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, а $\gamma\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неперервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$.*

Якщо Φ' — повільно зростаюча функція і $\Phi'(\sigma) = (1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$, а $\gamma(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to +\infty$ і γ^{-1} — повільно зростаюча функція, то умова (10) *є достатньою, а якщо $F \in V(l)$, функція γ є неперервно диференційовною на $[0,+\infty)$, $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ і $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$, то умова*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln F(x))}{x} \le 1 \tag{27}$$

є необхідною для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_{+\infty}(F)$ з нерівності (20) *випливала нерівність* (21).

Якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності (22) *випливає нерівність* (23).

Доведення. За лемою 3 з нерівності (20) випливає нерівність (4). Тому за теоремою 3 з умови (10) випливає нерівність (6), тобто отримуємо (21). *Достатність* умови (10) доведено.

Для доведення *необхідності* припустимо, що (27) не виконується. Тоді існують число $\eta > 0$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел такі, що $\gamma^{-1}(\ln F(x_k)) \ge (1+\eta)x_k$

і, отже, $\ln F(x_k)) \geq \gamma((1+\eta)x_k) \geq \gamma(x_k)$, тобто маємо (18). Розглянемо інтеграл Лапласа – Стільтьєса (1) з $f(x) = \exp\{-x\Psi(\varphi(x))\}$. За лемою 3 виконується нерівність (20) і, отже, $I \in LS_{+\infty}(F)$. Зрозуміло, що умова (14) виконується. Тому за наслідком 1 існують число $\beta > 0$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_k) такі, що $\ln I(\sigma_k) \geq \Phi(\sigma_k) + \beta\gamma(\Phi'(\sigma_k))$, тобто для такого інтегралу $I(\sigma)$ нерівність (21) не виконується. Першу частину твердження доведено. Другу частину доведено раніше.

Твердження 6. *Нехай $F \in V$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ і функція f має регулярну зміну відносно F. Припустимо, що $\Phi \in \Omega(+\infty)$, Φ' — повільно зростаюча функція і $\Phi'(\sigma) = (1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$, а неперервна $\gamma\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$, $\gamma(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to +\infty$ і γ^{-1} — повільно зростаюча функція. Тоді умова* (10) *є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей*(25) *і* (26).

Доведення твердження 6 таке, як доведення твердження 2.

***Приклад* 3.** Нехай $\Phi(\sigma) = T\sigma \ln \sigma$ для $\sigma \geq \sigma_0$, де $T > 0$. Тоді $\Phi'(\sigma) = T(\ln \sigma + 1)$, $\Psi(\sigma) = \sigma/(\ln \sigma + 1)$ і $\varphi(x) = \exp\{x/T - 1\}$. Зрозуміло, що Φ' — повільно зростаюча функція і $\Phi'(\sigma) = (1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$. Виберемо $\gamma(x) = \exp\{x/T(1+\varepsilon)\}$, $\varepsilon > 0$. Тоді $\gamma^{-1}(x) = T(1+\varepsilon)\ln x$ — повільно зростаюча функція, $\gamma(x) = o(\varphi(x))$, $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ і $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$. Зауважимо також, що тут умова (10) має вигляд $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln \ln F(x))/x < 1/T(1+\varepsilon)$, а умова (27) — вигляд $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln \ln F(x))/x \leq 1/T(1+\varepsilon)$. Тому з тверджень 5 і 6 з огляду на довільність ε отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 5.** *Нехай $F \in V(l)$ і $T > 0$. Для того щоб для кожного інтеграла $I \in LS_{+\infty}(F)$ при $\sigma \to +\infty$ нерівності $\ln \mu(\sigma, I) \leq (1+o(1))T\sigma \ln \sigma$ і $\ln I(\sigma) \leq (1+o(1))T\sigma \ln \sigma$ були рівносильними при $\sigma \to \infty$, достатньо, щоб*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln \ln F(x)}{x} < \frac{1}{T}, \tag{28}$$

і необхідно, щоб

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} (\ln \ln F(x))/x \leq 1/T.$$

Якщо, крім цього, функція f має регулярну зміну відносно F, то умова (28) *є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, I) = (1+o(1))T\sigma \ln \sigma$, і $\ln I(\sigma) = (1+o(1))T\sigma \ln \sigma$ при $\sigma \to \infty$.*

Перейдемо до розгляду інтегралів з класу $I \in LS_0(F)$. Комбінуючи теорему 1 і наслідок 2, можемо довести таке твердження.

Твердження 7. *Нехай $F \in V$, $\Phi \in \Omega(0)$, а $\gamma\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неперервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$.*

Якщо $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$, функція $\gamma(x)/x$ не зростає на $[x_0, +\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x \to +\infty$, то умова (5) *є достатньою, а якщо $F \in V(l)$, функція γ неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ і $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$, то умова (5) є необхідною для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_0(F)$ з нерівності*

$$\ln \mu(\sigma, I) \geq \Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, 0), \tag{29}$$

випливала нерівність

$$\ln I(\sigma) \leq \Phi(\sigma) + o(\gamma(\Phi'(\sigma)), \quad \sigma \uparrow 0. \tag{30}$$

З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності

$$\ln I(\sigma) \le \Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, 0), \tag{31}$$

випливає нерівність

$$\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma) + O(\sigma), \quad \sigma \uparrow 0. \tag{32}$$

Доведення. За лемою 3 з (29) випливає (4). За теоремою 1 з (4) випливає (6), тобто отримуємо (30). *Достатніть* умови (5) доведено.

Припустимо тепер, що (5) не виконується, тобто правильна нерівність (18). Як раніше, розглянемо інтеграл (1) з $f(x) = \exp\{-x\Phi(\varphi(x))\}$. За лемою 3 $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ і, отже, $I \in LS_0(F)$. Тому за наслідком 2 існують число $\beta > 0$ і послідовність $(\sigma_k) \uparrow 0$ такі, що $\ln I(\sigma_k) \ge \Phi(\sigma_k) + \beta\gamma(\Phi'(\sigma_k))$, тобто для такого інтегралу $I(\sigma)$ нерівність (30) не виконується. Першу частину твердження доведено.

Далі, якщо $\sigma_\mu = 0$ і f має регулярну зміну відносно F, то існують числа $a \ge 0$, $b \ge 0$ і $h > 0$ такі, що для всіх $x \ge a$ і $\sigma < 0$ тепер маємо

$$I(\sigma) \ge \int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)e^{t\sigma}dF(t) \ge e^{\sigma(x+b)} \int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \ge hf(x)e^{\sigma(x+b)} = f(x)e^{x\sigma}he^{b\sigma},$$

тобто $f(x)e^{x\sigma} \le e^{b|\sigma|}I(\sigma)/h$ для всіх $x \ge a$, і як при доведенні твердження 1, отримуємо

$$\mu(\sigma, I) \le \max\{K, \frac{1}{h}\, e^{b|\sigma|}I(\sigma)\}, \quad K = \text{const} > 0, \tag{33}$$

звідки з огляду на (31) випливає (32).

Твердження 7 доведено.

Наступний результат є аналогом твердження 2.

Твердження 8. *Нехай $F \in V$, $I \in LS_0(F)$ і функція f має регулярну зміну відносно F. Припустимо, що $\Phi \in \Omega(0)$, $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow 0$, а $\gamma\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неперервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$, $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$ і $\gamma(x)/x$ незростає на $[x_0, +\infty)$. Тоді умова (5) є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей*

$$\ln I(\sigma) = (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \uparrow 0, \tag{34}$$

і

$$\ln \mu(\sigma, I) = (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \uparrow 0, \tag{35}$$

Доведення. З (33) випливає, що $\ln \mu(\sigma, I) \le \ln I(\sigma) + O(1)$ при $\sigma \uparrow 0$. З іншого боку, як при доведенні теореми 1, маємо $\ln I(\sigma) \le \ln \mu(\sigma, I) + o(\gamma(\Phi'(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$. Але з умови $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x \to +\infty$ випливає, що $\gamma(x) = O(\Phi(\varphi(x))$ при $x \to +\infty$. Тому

$$\ln \mu(\sigma, I) + O(1) \le \ln I(\sigma) \le \ln \mu(\sigma, I) + o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \uparrow 0,$$

звідки випливає еквівалентність асимптотичних рівностей (34) і (35).

***Приклад* 4.** Нехай $\Phi(\sigma) = T|\sigma|^{-p}$ для $\sigma < 0$, де $T > 0$ і $p > 0$. Тоді $\Phi'(\sigma) = Tp|\sigma|^{-p-1}$, $\Psi(\sigma) = (p+1)|\sigma|/p$, $\varphi(x) = -(pT/x)^{p+1}$, $\Phi'(\Psi(\sigma)) = Tp^p(p+1)^{p+1}|\sigma|^{-p-1}$ і $\Phi(\Psi(\varphi(x))) = T^{1/(p+1)}p^{p^2/(p+1)}(p+1)^{-p}x^{p/(p+1)}$. Виберемо $\gamma(x) = x^{p/(p+1)}$. Тоді з тверджень 7 і 8 отримаємо такий наслідок.

***Наслідок* 6.** *Нехай $F \in V(l)$, $T > 0$ і $p > 0$. Для того щоб для кожного інтеграла $I \in LS_0(F)$ при $\sigma \uparrow 0$ нерівності $\ln \mu(\sigma, I) \le (1+o(1))T|\sigma|^{-p}$ і $ln\, I(\sigma) \le (1+o(1))T|\sigma|^{-p}$ були рівносильними, необхідно і дотатньо, щоб $\ln F(x) = o(x^{p/(p+1)})$ при $x \to +\infty$. Якщо, крім цього, функція f має регулярну зміну відносно F, то ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, I) = (1+o(1))T|\sigma|^{-p}$ і $\ln I(\sigma) = (1+o(1))T|\sigma|^{-p}$ при $\sigma \uparrow 0$.*

***Приклад* 5.** Нехай $\Phi(\sigma) = T\exp\{\varrho/|\sigma|\}$ для $\sigma < 0$, де $T > 0$ і $\varrho > 0$. Тоді

$$\Phi'(\sigma) = T\varrho|\sigma|^{-2}\exp\{\varrho/|\sigma|\},$$

$$\Psi(\sigma) = \sigma + \sigma^2/\varrho, \quad \Phi'(\Psi(\sigma)) = \frac{T\varrho}{|\sigma + \sigma^2/\varrho|}\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma + \sigma^2/\varrho|}\right\},$$

і оскільки

$$\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma + \sigma^2/\varrho|}\right\} = \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\left(1 - \frac{1}{1 + |\sigma|/\varrho}\right)\right\} = \exp\{(1+o(1))\} \to e, \quad \sigma \uparrow 0,$$

то $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$. Крім того, в [7, с. 694] доведено, що $\Phi(\Psi(\varphi(x))) = (1+o(1))\varrho x/e\ln^2 x$ при $x \to +\infty$. Тому, якщо виберемо $\gamma(x) = x\ln^{-2} x$, то з тверджень 7 і 8 одержимо такий наслідок.

***Наслідок* 7.** *Нехай $F \in V(l)$, $T > 0$ і $\varrho > 0$. Для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_0(F)$ при $\sigma \uparrow 0$ нерівності $\ln \mu(\sigma, I) \le (1+o(1))T\exp\{\varrho/|\sigma|\}$ і $\ln I(\sigma) \le (1+o(1))T\exp\{\varrho/|\sigma|\}$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln F(x) = o(x\ln^{-2} x)$ при $x \to +\infty$. Якщо, крім цього, функція f має регулярну зміну відносно F, то ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, I) = (1+o(1))T\exp\{\varrho/|\sigma|\}$ і $\ln I(\sigma) = (1+o(1))T\exp\{\varrho/|\sigma|\}$ при $\sigma \uparrow 0$.*

Насамкінець, розглянемо випадок, коли функція $\Phi \in \Omega(0)$ має повільне зростання.

Твердження 9. *Нехай $F \in V$, $\Phi \in \Omega(0)$ і $\gamma\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неперервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$.*

Якщо $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$, $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(\Psi(\sigma))))$ при $\sigma \uparrow 0$, то умова (5) *є достатньою, а якщо $F \in V(l)$, функція γ є неперервно диференційовною на $[0,+\infty)$ і $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$, то умова* (5) *є необхідною для того, щоб для кожного інтеграла $I \in LS_0(F)$ з нерівності* (29) *випливала нерівність* (30)*. З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності* (31) *випливає нерівність*‘(32).

Доведення. Оскільки $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$, то з умови $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(\Psi(\sigma))))$ при $\sigma \uparrow 0$ випливає співвідношення $\gamma(x) \asymp \gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(x))))$ при $x \to +\infty$. Тому умова (11) нееквівалентна умові (5), а за теоремою 4 і лемою 3 з (29) отримуємо (30). *Достатність* умови (5) доведено. Подальше доведення твердження 9 подібне до доведення твердження 7.

Твердження 10. *Нехай $F \in V$, $I \in LS_0(F)$ і функція f має регулярну зміну відносно F. Припустимо, що $\Phi \in \Omega(0)$, а $\gamma\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неперерервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$, $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$, $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(\Psi(\sigma))))$ при $\sigma \uparrow 0$. Тоді умова* (5) *є достатньою для того, щоб асимптотичні рівності* (34) *і* (35) *були рівносильними.*

Доведення твердження 10 подібне до доведення твердження 8.

***Приклад* 6.** Нехай $\Phi(\sigma) = T\ln^{1+\eta}(1/|\sigma|)$ для $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, де $T > 0$ і $\eta > 0$. Тоді $\Phi'(\sigma) = (T(1+\eta)/|\sigma|)\ln^{\eta}(1/|\sigma|)$, $\Psi(\sigma) = -|\sigma|(\ln(1/|\sigma|))/(1+\eta)$, $|\Psi(\sigma)|\Phi'(\sigma) = (1+o(1))T\ln^{1+\eta}(1/|\sigma|)$ і $\Phi'(\Psi(\sigma)) = (1+o(1))(T(1+\eta)^2/|\sigma|)\ln^{\eta-1}(1/|\sigma|)$ при $\sigma \uparrow 0$. З умови $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$ випливає умова $\gamma(\Phi'(\Psi(\sigma))) = O(|\Psi(\sigma)|\Phi'(\sigma)$ при $\sigma \uparrow 0$. Тому ми повинні вибрати γ так, щоб

$$\gamma\left(\frac{(1+o(1))T(1+\eta)^2}{|\sigma|}\ln^{\eta-1}\frac{1}{|\sigma|}\right) = O\left(\ln^{1+\eta}\frac{1}{|\sigma|}\right), \quad \sigma \uparrow 0.$$

Функція $\gamma(x) = \ln^{1+\eta} x$ задовольняє цю умову. Легко довести, що $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(\Psi(\sigma))))$ при $\sigma \uparrow 0$. Тому з тверджень 9 і 10 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 8.** *Нехай $F \in V(l)$, $T > 0$ і $\eta > 0$. Для того щоб для кожного інтеграла $I \in LS_0(F)$ при $\sigma \uparrow 0$ нерівності $\ln\mu(\sigma, I) \leq (1+o(1))T\ln^{1+\eta}(1/|\sigma|)$ і $\ln I(\sigma) \leq (1+o(1))T\ln^{1+\eta}(1/|\sigma|)$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln F(x) = o(\ln^{1+\eta} x)$ при $x \to +\infty$.*

Якщо, крім цього, функція f має регулярну зміну відносно F, то ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln\mu(\sigma, I) = (1+o(1))T\ln^{1+\eta}(1/|\sigma|)$ і $\ln I(\sigma) = (1+o(1))T\ln^{1+\eta}(1/|\sigma|)$ при $\sigma \uparrow 0$.

Література

1. *Sheremeta M. M.* Asymptotical behaviour of Laplace – Stiltjes integrals. – Lviv: VNTL Publ., 2010. – 211 p.
2. *Скасків О. Б., Бандура А. І.* Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. – Львів; Івано-Франківськ, 2015. – 108 с.
3. *Skaskiv O. B., Bandura A. I.* Asymptotical behaviour of Laplace – Stiltjes integrals. — Lviv: VNTL Publ., 2010. — 211 p.
4. *Шеремета М. Н., Федыняк С. И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. - 1998. – **39**, № 1. – С. 206 – 223.
5. *Шеремета М. М., Сумик О. М.* Зв'язок між зромтанням спряжених за Юнгом функцій // Мат. Студії. – 1999. – **11**, № 1. – С. 41 – 47.
6. *Sheremeta M. M., Stets Yu. V., Sumyk O. M.* Estimates of a sum of Dirichlet series // Ukr. Math. Bull. – 2013. – **10**, № 2. — P. 234 – 253.
7. *Стець Ю. В., Шеремета М. М.* Про регулярне зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 5. – С. 686 – 698.

Одержано 09.12.15,
після доопрацювання — 30.08.16