

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ БІГАРМОНІЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ W_β^r

We deduce asymptotic equalities for the least upper bounds of approximations of functions from the classes $W_\beta^r H^\alpha$, and H^α by biharmonic Poisson integrals in the uniform metric.

Получены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций из классов $W_\beta^r H^\alpha$ и H^α бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике.

1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. Нехай C — простір 2π -періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$; L — простір 2π -періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta(\Delta u) = 0, \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа в полярних координатах.

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайові умови

$$u(\rho, x) \Big|_{\rho=1} = f(x), \quad \frac{\partial u(\rho, x)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (2)$$

де $f(x)$ — сумовна 2π -періодична функція, далі позначатимемо $B(\rho; f; x) = u(\rho, x)$. Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) можемо записати у вигляді

$$B(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\rho,k} \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (3)$$

де

$$\lambda_{\rho,k} = \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2) \right) \rho^k.$$

Величину (3) називають бігармонічним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [1, с. 402]). Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, бігармонічний інтеграл запишемо у вигляді

$$B_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\delta,k} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0,$$

де

$$\lambda_{\delta,k} = \left(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}) \right) e^{-\frac{k}{\delta}}.$$

Нехай f належить L і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f .

Нехай $r \geq 0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right)$$

(де $a_0 = 0$ в усіх випадках, крім $r = \beta = 0$) є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то цю функцію називають (r, β) -похідною функції f у сенсі Вейля–Надя і позначають через f_{β}^r . Множину всіх функцій f , що задовольняють таку умову, позначають через W_{β}^r [2].

Якщо f належить W_{β}^r і, крім того, $\|f_{\beta}^r\|_{\infty} \leq 1$, то кажуть, що f належить класу $W_{\beta, \infty}^r$. У випадку $\beta = r$ класи $W_{\beta, \infty}^r$ збігаються з класами Соболева W_{∞}^r .

Якщо f належить W_{β}^r і при цьому f_{β}^r належить H^{α} , тобто f_{β}^r задовольняє умову Ліпшиця порядку α

$$|f_{\beta}^r(x+h) - f_{\beta}^r(x)| \leq |h|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq h \leq 2\pi, \quad x \in \mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить класу $W_{\beta}^r H^{\alpha}$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W_{\beta}^r H^0 = W_{\beta, \infty}^r$. При $r = \beta$ отримуємо клас $W^r H^{\alpha}$ функцій f із похідною порядку $r > 0$ в сенсі Вейля, яка задовольняє умову Ліпшиця порядку α . Замість $W^0 H^{\alpha}$ будемо писати H^{α} , вважаючи, що $f_0^0(x) = f(x)$. При $r \geq 1$ вважають, що $W^{r-1} H^1 = W_{\infty}^r$.

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\delta \rightarrow \infty$ величин

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; B_{\delta})_C = \sup_{f \in W_{\beta}^r H^{\alpha}} \|f(x) - B_{\delta}(f; x)\|_C. \quad (4)$$

Задачу про відшукування асимптотичної рівності для величини (4), згідно з О. І. Степанцем [3, с. 198], називатимемо задачею Колмогорова–Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона $B_{\delta}(f; x)$ на класі $W_{\beta}^r H^{\alpha}$ в рівномірній метриці.

Апроксимативні властивості методу наближення бігармонічними інтегралами Пуассона на класах диференційовних функцій досліджувались багатьма вченими.

С. Канієв [4] встановив асимптотичну рівність для величини $\mathcal{E}(W_{\infty}^1; B(\rho))_C$ при $\rho \rightarrow 1 -$. В цій же роботі він знайшов і точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}(W_{\infty}^r; B(\rho))_C$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \rho < 1$.

Р. Русч [5] уточнила результати С. Канієва для величини $\mathcal{E}(W_{\infty}^1; B(\rho))_C$, отримавши асимптотичну рівність із більш точним порядком залишкового члена.

Пізніше ці дослідження були продовжені в роботі Л. П. Фалалєєва [6], де було отримано повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}(W_{\infty}^1; B(\rho))_C$ за степенями $1 - \rho$, $\rho \rightarrow 1 -$.

У роботі Л. П. Фалалєєва та Т. І. Аманова [7] знайдено повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}(W_{\infty}^1; B_{\delta})_C$, який формулюється як у термінах $\frac{1}{\delta}$, так і в термінах $1 - \rho$.

У роботах К. М. Жигалла, Ю. І. Харкевича [8, 9], знайдено повні асимптотики величин $\mathcal{E}(W_{\infty}^r; B(\rho))_C$, $r \in \mathbb{N}$, за степенями $1 - \rho$, $\rho \rightarrow 1 -$. Аналогічні розклади, але в інтегральній метриці та за степенями $\frac{1}{\delta}$, $\delta \rightarrow \infty$, було знайдено в роботі [10]. Пізніше в роботі [11] було

отримано точні значення верхніх меж наближень бігармонічними інтегралами Пуассона на класах спряжених диференційовних функцій у рівномірній та інтегральній метриках. Деякі екстремальні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона досліджувались також в роботах [12–18].

До цього часу задача Колмогорова–Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона на класах $W_\beta^r H^\alpha$ не була розв’язана. Тому постало питання про відшукування асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta)_C$.

2. Наближення функцій із класів $W_\beta^r H^\alpha$ бігармонічними інтегралами Пуассона. Нехай

$$\lambda(u) = \lambda_\delta(u) = (1 + \gamma u)e^{-u}, \quad \gamma = \frac{\delta}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}), \tag{5}$$

— підсумовуюча функція для бігармонічного інтеграла Пуассона, причому $\lambda\left(\frac{k}{\delta}\right) = \lambda_{\delta,k}$.

Для бігармонічного інтеграла Пуассона, згідно з Л. І. Баусовим [19], при $r > 0$ введемо функцію

$$\tau(u) = \tau_\delta(r, u) = \begin{cases} (1 - [1 + \gamma u]e^{-u})\delta^r, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\delta}, \\ (1 - [1 + \gamma u]e^{-u})u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{6}$$

де $\gamma = \frac{\delta}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})$, перетворення Фур’є якої

$$\hat{\tau}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du$$

є сумовним на всій числовій осі (цей факт доведено в роботі [20]).

Домовимося далі через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Теорема 1. Нехай $r > 0, 0 \leq \alpha < 1, r + \alpha \leq 2, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \rightarrow \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{1+r}} + \frac{1}{\delta^2}\right), \tag{7}$$

$$2^{\alpha-1} \leq \theta(\alpha) \leq 1,$$

де величина $A(\alpha, \tau)$ означена співвідношенням

$$A(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \tag{8}$$

і для неї справджується оцінка

$$A(\alpha, \tau) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases} \tag{9}$$

Доведення. Скористаємося теоремою 2 з роботи Л. І. Баусова [19, с. 10] і перевіримо виконання її умов. Для цього покажемо збіжність інтеграла (8).

Згідно з теоремою 1 роботи [19, с. 6], для збіжності інтеграла (8) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int_0^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{3/2}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|, \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (11)$$

Для оцінки першого інтеграла з (10) розіб'ємо проміжок $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ на дві частини (вважати-
memo, що $\delta > 3$): $\left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ і $\left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$. Оскільки при всіх $u \in \left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ і $\delta > 3$

$$\tau''(u) = (-1 + 2\gamma - \gamma u)e^{-u}\delta^r \geq 0,$$

то, враховуючи нерівність

$$(-1 + 2\gamma - \gamma u)e^{-u} \leq 1, \quad u \geq 0,$$

отримуємо

$$\int_0^{1/\delta} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = \int_0^{1/\delta} u^{1-\alpha} d\tau'(u) \leq \delta^r \int_0^{1/\delta} u^{1-\alpha} du \leq \frac{K}{\delta^{2-r-\alpha}}. \quad (12)$$

Нехай тепер $u \in \left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\begin{aligned} \tau_1(u) &= \left(1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u}{\delta} - \frac{u^2}{2}\right) u^{-r}, \\ \tau_2(u) &= \frac{1}{\delta} u^{1-r} + \frac{1}{2} u^{2-r}, \end{aligned} \quad (13)$$

тоді $\tau(u) = \tau_1(u) + \tau_2(u)$ і

$$\int_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau_1'(u)| + \int_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau_2'(u)|. \quad (14)$$

Оцінимо перший інтеграл із правої частини нерівності (14). Для цього дослідимо спочатку функцію

$$\bar{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}. \quad (15)$$

З того, що

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'(u) &= e^{-u} - \gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} - u - \frac{1}{\delta}, \\ \bar{\mu}''(u) &= -e^{-u} + 2\gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(0) &= 0, & \bar{\mu}'(0) &= 1 - \gamma - \frac{1}{\delta} < 0, \\ & & -1 + 2\gamma - \gamma u &< e^u, \quad u \in [0; \infty), \end{aligned}$$

випливає, що при $u \geq 0$

$$\bar{\mu}(u) \leq 0, \quad \bar{\mu}'(u) < 0, \quad \bar{\mu}''(u) < 0. \tag{16}$$

Враховуючи (16) і те, що

$$e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2} \quad e^{-u} \geq 1 - u,$$

одержуємо

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}(u)| &= \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - 1 + e^{-u} + \gamma u e^{-u} \leq \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - u + \frac{u^2}{2} + \gamma u - \gamma u^2 + \gamma \frac{u^3}{2} = \\ &= \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) u + (1 - \gamma) u^2 + \gamma \frac{u^3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}'(u)| &= u + \frac{1}{\delta} - e^{-u} + \gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} \leq u + \frac{1}{\delta} - 1 + u + \gamma \left(1 - u + \frac{u^2}{2}\right) - \gamma u + \gamma u^2 = \\ &= \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) + 2(1 - \gamma)u + \frac{3}{2}\gamma u^2, \end{aligned}$$

$$|\bar{\mu}''(u)| = e^{-u} - 2\gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} + 1 \leq 1 - 2\gamma + 2\gamma u + \gamma u + 1 = (2 - 2\gamma) + 3\gamma u.$$

Звідси внаслідок нерівностей

$$\gamma < 1, \quad 1 - \gamma < \frac{1}{\delta}, \quad -1 + \gamma + \frac{1}{\delta} < \frac{2}{3\delta^2}$$

випливає, що

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}(u)| &< \frac{2}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{u^3}{2}, \\ |\bar{\mu}'(u)| &< \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + \frac{3}{2} u^2, \\ |\bar{\mu}''(u)| &< \frac{2}{\delta} + 3u. \end{aligned} \tag{17}$$

Оскільки при $u \geq 1/\delta$, згідно з (13) і (15),

$$|d\tau'_1(u)| \leq (r(r+1)|\bar{\mu}(u)|u^{-r-2} + 2r|\bar{\mu}'(u)|u^{-r-1} + |\bar{\mu}''(u)|u^{-r})du,$$

то з урахуванням (17) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau'_1(u)| &\leq r(r+1) \int_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{3\delta^2} u^2 + \frac{1}{\delta} u^3 + \frac{1}{2} u^4\right) u^{-1-r-\alpha} du + \\ &+ 2r \int_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + \frac{3}{2} u^2\right) u^{-r-\alpha} du + \int_{1/\delta}^{1/2} \left(\frac{2}{\delta} + 3u\right) u^{1-r-\alpha} du \leq K. \end{aligned} \tag{18}$$

Знайдемо тепер оцінку другого інтеграла з правої частини нерівності (14). Враховуючи, що

$$\tau_2''(u) = -\frac{1}{\delta}(1-r)ru^{-r-1} + \frac{1}{2}(2-r)(1-r)u^{-r},$$

маємо

$$\begin{aligned} \int_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau_2'(u)| &\leq \frac{1}{\delta} |1-r| r \int_{1/\delta}^{1/2} u^{-r-\alpha} du + \frac{1}{2} (2-r) |1-r| \int_{1/\delta}^{1/2} u^{1-r-\alpha} du \leq \\ &\leq \begin{cases} K_1, & r + \alpha < 2, \\ K_2 \ln \delta, & r + \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Отже, згідно з співвідношеннями (12), (14), (18) і (2), справджується рівність

$$\int_0^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases} \quad (20)$$

Оцінимо другий та третій інтеграли з (10). Враховуючи, що при $u \geq \frac{1}{\delta}$

$$\begin{aligned} \tau''(u) &= (-1 + 2\gamma - \gamma u)e^{-u}u^{-r} - 2r(1 - \gamma + \gamma u)e^{-u}u^{-r-1} + \\ &+ r(r+1)(1 - (1 + \gamma u)e^{-u})u^{-r-2}, \end{aligned} \quad (21)$$

а також нерівності

$$(-1 + 2\gamma - \gamma u)e^{-u}u^2 \leq 1, \quad (1 - \gamma + \gamma u)e^{-u}u \leq 1, \quad (22)$$

$$1 - (1 + \gamma u)e^{-u} \leq 1, \quad u \geq 0, \quad (23)$$

отримуємо оцінки

$$\int_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int_{1/2}^{3/2} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq K_1, \quad (24)$$

$$\int_{3/2}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)| \leq \int_{3/2}^{\infty} u |d\tau'(u)| \leq K_2. \quad (25)$$

Для оцінки першого інтеграла із (11) розіб'ємо проміжок $[0; \infty)$ на три частини: $[0; 1/\delta]$, $[1/\delta; 1]$ та $[1; \infty)$. Використовуючи співвідношення (6) і нерівність

$$1 - (1 + \gamma u)e^{-u} \leq \frac{2}{\delta}u + u^2, \quad u \geq 0,$$

одержуємо

$$\int_0^{1/\delta} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^{1/\delta} \frac{(1 - (1 + \gamma u)e^{-u})\delta^r}{u^{1+\alpha}} du \leq \delta^r \int_0^{2/\delta} \left(\frac{2}{\delta} u^{-\alpha} + u^{1-\alpha} \right) du \leq \frac{K_1}{\delta^{2-r-\alpha}}. \tag{26}$$

Із співвідношень (6), (15) і (17) маємо

$$\left| \int_{1/\delta}^1 \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du - \frac{1}{2} \int_{1/\delta}^1 \frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}} du - \frac{1}{\delta} \int_{1/\delta}^1 \frac{u^{1-r}}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq \int_{1/\delta}^1 |\bar{\mu}(u)| u^{-r-\alpha-1} du \leq \int_{1/\delta}^1 \left(\frac{2}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{1}{2} u^3 \right) u^{-r-\alpha-1} du \leq K_2.$$

Звідси

$$\int_{1/\delta}^1 \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \frac{1}{2} \int_{1/\delta}^1 u^{1-r-\alpha} du + \frac{1}{\delta} \int_{1/\delta}^1 u^{-r-\alpha} du + O(1) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ \frac{1}{2} \ln \delta + O(1), & r + \alpha = 2. \end{cases} \tag{27}$$

Враховуючи формулу (6) та нерівність (23), одержуємо

$$\int_1^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^\infty (1 - (1 + \gamma u)e^{-u}) u^{-r-\alpha-1} du \leq \int_1^\infty u^{-r-\alpha-1} du \leq K_3. \tag{28}$$

Об'єднуючи формули (20)–(28), отримуємо

$$\int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ \frac{1}{2} \ln \delta + O(1), & r + \alpha = 2. \end{cases} \tag{29}$$

Оцінимо другий інтеграл із (11). Оскільки інтеграли (10) збіжні, то має місце рівність (див., наприклад, ([21]))

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + O\left(|\tau(0)| + |\tau(1)| + \int_0^{1/2} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \right)$$

$$+ \int_{3/2}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|, \quad (30)$$

де $\lambda(u) = (1 + \gamma u)e^{-u}$. Оскільки

$$\int_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \\ = \int_0^1 \frac{|e^{-1+u} - e^{-1-u} + \gamma(1-u)e^{-1+u} - \gamma(1+u)e^{-1-u}|}{u^{1+\alpha}} du = O(1),$$

то з урахуванням співвідношень (20), (24) і (25) із (30) випливає

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases} \quad (31)$$

Таким чином, за теорему 1 роботи [19] інтеграл $A(\alpha, \tau)$ є збіжним. З нерівностей (1.12) та (1.13) роботи [19] з урахуванням формул (20), (24), (25), (29) та (31), отримуємо співвідношення (9).

Отже, ми переконалися, що для функції $\tau(u)$, що задана формулою (6), виконуються умови теореми 2 з роботи [19]. Тоді при $\delta \rightarrow \infty$ справджується рівність

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; B_{\delta})_C = \frac{\theta(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} a(\alpha, \tau)\right), \quad (32)$$

де

$$2^{\alpha-1} \leq \theta(\alpha) \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \\ a(\alpha, \tau) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^{\alpha} |\widehat{\tau}_{\beta}(t)| dt, \quad (33)$$

а величину $A(\alpha, \tau)$ означено формулою (8).

Знайдемо оцінку для інтеграла $a(\alpha, \tau)$ вигляду (33). Для цього запишемо перетворення Фур'є $\widehat{\tau}_{\beta}(t)$ у вигляді

$$\widehat{\tau}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{1/\delta} + \int_{1/\delta}^{\infty} \right) \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (34)$$

Зінтегруємо двічі частинами інтеграли з правої частини рівності (34):

$$\int_0^{1/\delta} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)}\right) \delta^r \sin\left(\frac{1}{\delta}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{t^2} e^{-(1/\delta)} \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\delta}\right) \delta^r \cos\left(\frac{1}{\delta}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2} (1 - \gamma) \delta^r \cos\frac{\beta\pi}{2} - \\
 & - \frac{1}{t^2} \int_0^{1/\delta} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \tag{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{1/\delta}^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = -\frac{1}{t} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)}\right) \delta^r \sin\left(\frac{1}{\delta}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \\
 & - \frac{1}{t^2} \left(\left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)} \delta^r - r \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)}\right) \delta^{r+1}\right) \cos\left(\frac{1}{\delta}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \\
 & - \frac{1}{t^2} \int_{1/\delta}^{\infty} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \tag{36}
 \end{aligned}$$

Підставивши (35) і (36) в (34), отримаємо

$$\begin{aligned}
 \widehat{\tau}_\beta(t) = & -\frac{1}{\pi t^2} \int_0^{1/\delta} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du - \frac{1}{\pi t^2} \int_{1/\delta}^{\infty} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du - \\
 & - \frac{1}{\pi t^2} (1 - \gamma) \delta^r \cos\frac{\beta\pi}{2} + \frac{r}{\pi t^2} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)}\right) \delta^{r+1} \cos\left(\frac{1}{\delta}t + \frac{\beta\pi}{2}\right),
 \end{aligned}$$

звідки

$$\left|\widehat{\tau}_\beta(t)\right| \leq \frac{1}{\pi t^2} \left(\int_0^{1/\delta} + \int_{1/\delta}^1 + \int_1^{\infty}\right) |\tau''(u)| du + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\delta^{1-r}}. \tag{37}$$

Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ на $\left[0; \frac{1}{\delta}\right]$, $\delta > 3$ і нерівності

$$\left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)} \leq \frac{2}{\delta}, \quad 1 - \gamma \leq \frac{1}{\delta},$$

маємо

$$\int_0^{1/\delta} |\tau''(u)| du = \int_0^{1/\delta} \tau''(u) du = \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\delta}\right) e^{-(1/\delta)} \delta^r - (1 - \gamma) \delta^r = O\left(\frac{1}{\delta^{1-r}}\right). \tag{38}$$

Нехай $u \in \left[\frac{1}{\delta}; 1\right]$. Міркуючи, як і при оцінюванні першого інтеграла з (10) на проміжку $\left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$, можна показати справедливість оцінки

$$\int_{1/\delta}^1 |\tau''(u)| du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-r}}\right). \tag{39}$$

Використовуючи співвідношення (21), отримуємо

$$\int_1^{\infty} |\tau''(u)| du \leq r(r+1) \int_1^{\infty} (1 - (1 + \gamma u)e^{-u}) u^{-r-2} du + \\ + 2r \int_1^{\infty} (1 - \gamma + \gamma u)e^{-u} u^{-r-1} du + \int_1^{\infty} |-1 + 2\gamma - \gamma u| e^{-u} u^{-r} du.$$

Тоді, враховуючи нерівності (22) та (23), можна переконатися, що

$$\int_1^{\infty} |\tau''(u)| du = O(1). \quad (40)$$

Об'єднуючи формули (37)–(40), одержуємо

$$|\widehat{\tau}_\beta(t)| = \frac{1}{t^2} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-r}}\right).$$

Звідси

$$a(\alpha, \tau) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha |\widehat{\tau}_\beta(t)| dt = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\alpha}} + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \quad (41)$$

Із співвідношень (32) і (41) випливає рівність (7).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо $0 < \alpha < 1$, то при $\delta \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = (1 - \alpha) \sec \frac{\alpha\pi}{2} \frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (42)$$

Доведення. Згідно з теоремою 2 роботи Л. І. Баусова [19], якщо інтеграли

$$\int_0^{1/2} u^{1-\alpha} |d\lambda'(u)|, \quad \int_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha} |d\lambda'(u)|, \quad \int_{3/2}^{\infty} (u-1) |d\lambda'(u)|, \quad (43)$$

$$A(\alpha, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left| \int_0^{\infty} \lambda(u) \cos ut du \right| dt \quad (44)$$

де $\lambda(u)$ задано рівністю (5), збігаються, то для $0 < \alpha < 1$ при $\delta \rightarrow \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^\alpha} A(\alpha, \lambda) + O\left(\frac{1}{\delta^\alpha} a(\alpha, \lambda)\right), \quad (45)$$

де

$$a(\alpha, \lambda) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^{\infty} \lambda(u) \cos ut du \right| dt. \quad (46)$$

Збіжність інтегралів (43) очевидна.

Знайдемо оцінку інтеграла (44). Використовуючи формули 3.893.2 та 3.944.6 із [22], отримуємо

$$\begin{aligned} A(\alpha, \lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^\alpha \left| \int_0^\infty \left(1 + \frac{\delta}{2} \left(1 - e^{-(2/\delta)} \right) u \right) e^{-u} \cos ut du \right| dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^\alpha \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{\delta}{2} \left(1 - e^{-(2/\delta)} \right) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right) dt. \end{aligned} \tag{47}$$

Враховуючи формули 3.241.2 та 3.241.5 із [22], маємо

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt = \sec \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^\alpha(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)^2} dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2}}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= \frac{(\alpha-1)}{2} \operatorname{cosec} \frac{(\alpha-1)\pi}{2} - \frac{(\alpha+1)}{2} \operatorname{cosec} \frac{(\alpha+1)\pi}{2} = -\alpha \sec \frac{\alpha\pi}{2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Підставляючи (48) та (49) в (47), дістанемо

$$A(\alpha, \lambda) = \sec \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \left(1 - e^{-(2/\delta)} \right) \left(-\alpha \sec \frac{\alpha\pi}{2} \right) = (1-\alpha) \sec \frac{\alpha\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{50}$$

Таким чином, ми переконались в збіжності інтеграла (44), а, отже і в справедливості рівності (45).

Знайдемо тепер оцінку інтеграла (46). Аналогічно до (47) матимемо

$$\begin{aligned} a(\alpha, \lambda) &= 2 \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha \left| \int_0^\infty \left(1 + \frac{\delta}{2} \left(1 - e^{-(2/\delta)} \right) u \right) e^{-u} \cos ut du \right| dt = \\ &= 2 \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{\delta}{2} \left(1 - e^{-(2/\delta)} \right) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right) dt. \end{aligned} \tag{51}$$

Враховуючи оцінки

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt &\leq \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^{\alpha-2} dt = \frac{K}{\delta^{1-\alpha}}, \\ \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt &\leq \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt \leq \frac{K}{\delta^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

із (51) одержуємо

$$a(\alpha, \lambda) = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\right). \quad (52)$$

Підставляючи (50) та (52) в (45), отримаємо рівність (42).

Теорему 2 доведено.

Література

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Period. Fall, Ber. Math. Phys. KL. Akad. – 1938. – **90**. – S. 103–134.
3. Степанец А. И. Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. Каниев С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995–998.
5. Puch P. On a biharmonic function in unit disk // Ann.pol.math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203–213.
6. Фалалеев Л. П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп. – Алма-Ата: Наука, 1976. – С. 163–167.
7. Аманов Т. И., Фалалеев Л. П. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля – Пуассона // 5-е Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976): Тр. сов. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
8. Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, № 7. – P. 1113–1117.
9. Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 9. – P. 1462–1470.
10. Kharkevych Yu. I., Kal'chuk I. V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 8. – P. 1224–1237.
11. Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 399–413.
12. Каниев С. Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Докл. АН СССР. – 1964. – № 4. – С. 451–453.
13. Петров В. А. Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137–142.
14. Трофимов В. Н., Цыганков А. С. Точные неравенства для колебаний гармонических и бигармонических в круге функций // Сиб. мат. журн. – 1969. – **10**, № 2. – С. 398–416.
15. Gonzales L., Keller E., Wildenhain G. Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung // Math. Nachr. – 1980. – **95**. – S. 157–164.
16. Hembars'ka S. B. Tangential limit values of a biharmonic Poisson integral in a disk // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 9. – P. 1317–1323.
17. Заставний В. П. Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 3. – С. 409–433.
18. Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 7. – P. 1083–1107.
19. Баусов Л. И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II // Изв. вузов. – 1996. – **46**, № 3. – С. 15–31.
20. Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 12. – P. 1820–1844.
21. Kharkevich Yu. I., Stepanyuk T. A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_{\beta}^{\psi} H^{\alpha}$ // Math. Notes. – 2014. – **96**, № 5. – P. 1008–1019.
22. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100 с.

Одержано 29.02.16