УДК 519.21

О. Г. Кукуш, Я. В. Царегородцев, С. В. Шкляр (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНО НЕЗАЛЕЖНІ ОЦІНКИ У СТРУКТУРНІЙ ЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

We consider a structural linear regression model with measurement errors. A new parameterization is proposed, in which the expectation of the response variable plays the role of a new parameter instead of the intercept. This enables us to form three groups of asymptotically independent estimators in the case where the ratio of variances of the errors is known and two groups of this kind if the variance of the measurement error in the covariate is known. In this case, it is not assumed that the errors and the latent variable are normally distributed.

Рассматривается структурная линейная модель регрессии с ошибками измерений. Предложена новая параметризация, в которой вместо свободного члена фигурирует математическое ожидание отклика. Это позволяет выделить три группы асимптотически независимых оценок параметров в случае заданного отношения дисперсий ошибок измерений и две такие группы, когда задана дисперсия ошибки в регрессоре. При этом не требуется нормальность распределений ошибок и скрытой переменной.

1. Вступ. Найпростіша лінійна модель регресії з похибками вимірювання описується двома рівняннями

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon, \quad x = \xi + \delta. \tag{1}$$

Усі величини в цій моделі скалярні. Тут y — спостережуваний відгук, ξ — неспостережувана прихована змінна (регресор), ε — похибка спостережень відгуку, x — спостережувана сурогатна змінна, δ — похибка вимірювання регресора. Ми розглянемо лише структурний випадок, в якому величина ξ є випадковою (на відміну від функціонального випадку, де істинне значення ξ є невипадковим). Подібні моделі з багатьма регресорами, як структурні, так і функціональні, застосовуються, зокрема, в економетриці [1]. Систематично модель (1) вивчається в монографіях [2], [3].

Вважаємо, що похибки ε, δ мають нульові математичні сподівання, а випадкові величини ξ, ϵ, δ є незалежними з додатними дисперсіями σ_ξ^2, σ_ε^2, σ_δ^2 відповідно.

Розглянемо незалежні копії моделі (1):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i, \qquad x_i = \xi_i + \delta_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{2}$$

За спостереженнями (y_i, x_i), $1 \le i \le n$, потрібно оцінити вільний член β_0, кутовий коефіцієнт β_1, а також заважальні параметри моделі σ_ξ^2, σ_ε^2, σ_δ^2 та μ_x — спільне математичне сподівання x та ξ.

У гауссівському випадку, коли ξ, ε та δ є гауссівськими, розподіл спостережуваної пари описується набором із шести параметрів моделі: β_0, β_1, μ_x, σ_ξ^2, σ_ε^2, σ_δ^2. Але така модель є неідентифікованою [3, с. 5, 6]. Найбільш поширеними є два випадки, в кожному з яких оцінюється лише п'ять параметрів:

(A) відоме відношення λ дисперсій похибок

$$\lambda = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\delta^2};$$

(B) відома дисперсія σ_δ^2.

В обох випадках виписуються оцінки максимальної правдоподібності [3] (розділ 1.3.1). У випадку (A) при $\lambda = 1$ вони є оцінками ортогональної регресії, а у випадку (B) — виправленою оцінкою найменших квадратів. Оцінки максимальної правдоподібності (ОМП) є строго консистентними та асимптотично нормальними.

У даній статті ми пропонуємо іншу параметризацію моделі (1). Замість вільного члена β_0 ми вводимо новий параметр μ_y — математичне сподівання відгуку. Маємо

$$\mu_y = \beta_0 + \beta_1 \mu_x,$$

тому модель набирає вигляду

$$y = \mu_y + \beta_1(\xi - \mu_x) + \varepsilon, \quad x = \xi + \delta. \tag{3}$$

У гауссівському випадку за умови (A), якщо не оцінювати заважальний параметр σ_ξ^2, можна виділити три групи асимптотично незалежних оцінок максимальної правдоподібності: $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)$, $\hat\beta_1$, $\hat\sigma_\delta^2$. Для моделі (1) маємо лише дві групи асимптотично незалежних оцінок: $(\hat\mu_x, \hat\beta_0, \hat\beta_1)$, $\hat\sigma_\delta^2$, хоча всередині першої групи $\hat\mu_x$ та $\hat\beta_1$ асимптотичні незалежні. Тож у моделі (3) для четвірки параметрів зручніше будувати асимптотичну довірчу область, ніж відповідну довірчу область у моделі (1).

У гауссівському випадку за умови (B) у моделі (3) маємо дві групи асимптотично незалежних ОМП: $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)$ та $(\hat\beta_1, \hat\sigma_\varepsilon^2, \hat\sigma_\xi^2)$. Проте п'ятірка відповідних оцінок

$$(\hat{\mu_x}, \hat\beta_0, \hat\beta_1, \hat\sigma_\varepsilon^2, \widehat{\sigma_\xi^2})$$

у моделі (1) не допускає розбиття на групи асимптотично незалежних оцінок. Тут також бачимо перевагу моделі (3).

Далі верхня риска означає усереднення за номером спостереження i, наприклад $\bar x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Будемо використовувати стандартні позначення для емпіричних дисперсій та емпіричної коваріації:

$$s_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)^2, \qquad s_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar y)^2, \tag{4}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)(y_i - \bar y). \tag{5}$$

Ідеєю розглянути модель (3) ми завдячуємо L. J. Gleser'у, який у роботі [4] зазначив, що для моделі (1) у гауссівському випадку пара статистик $(\bar x, \bar y)$ асимптотично незалежна від трійки статистик (s_{xx}, s_{xy}, s_{yy}).

Далі ми відмовляємось від припущення про гаусовість базових розподілів моделі, але продовжуємо вивчати оцінки, які б у гаусовому випадку були ОМП. Умови виділення груп асимптотично незалежних оцінок виявляться необтяжливими: ми вимагатимемо, щоб треті (а інколи й четверті) моменти похибок ε, δ поводили себе так само, як у гауссівському випадку, проте не вимагатимемо цього від регресора ξ.

У гауссівському випадку модель (1) докладно вивчено. За умови (A) асимптотичну коваріаційну матрицю (АКМ) трійки оцінок $\hat\beta_0,\ \hat\beta_1,\ \hat\sigma^2_\delta$ виписав L. J. Gleser [4], який встановив також асимптотичну ефективність оцінок. За умови (B) АКМ трійки оцінок $\hat\beta_0,\ \hat\beta_1,\ \hat\sigma^2_\epsilon$ знайшли C.-L. Cheng та J. W. Van Ness [5].

Опишемо коротко будову статті. У пункті 2 ми розглядаємо випадок (A) для моделі (3), виписуємо ОМП для п'яти параметрів моделі, а також незсунену оціночну функцію. Далі ми наводимо умови сукупної асимптотичної нормальності оцінок та виділяємо групи асимптотично незалежних оцінок. У пункті 3 те ж саме робимо для моделі (3) у випадку (B). У пунктах 2, 3 порівнюються моделі (1) та (3) щодо груп асимптотично незалежних оцінок. Пункт 4 підсумовує отримані результати. Доведення основного результату — теореми про асимптотичні незалежні оцінки — міститься в додатку.

Використовуються такі позначення. Символи E, D позначають математичне сподівання та дисперсію, $\mathbf{cov}$ — коваріаційну матрицю випадкового вектора. Верхній індекс $\top$ означає транспонування; в роботі всі вектори є векторами-стовпчиками. Для квадратної матриці A позначаємо $A^{-\top} = (A^{-1})^\top$. Збіжності з імовірністю 1 та за розподілом позначаються відповідно $\xrightarrow{\text{P1}}$, $\xrightarrow{\text{d}}$. Послідовність випадкових величин, яка за ймовірністю збігається до 0, позначається через $o_p(1)$.

2. Оцінювання за відомого відношення дисперсій. Наступні припущення про модель (1) забезпечують консистентність та асимптотичну нормальність оцінок у випадку (A).

(i) Випадкові величини $\xi,\ \varepsilon,\ \delta$ є незалежними з додатними дисперсіями $\sigma^2_\xi,\ \sigma^2_\varepsilon,\ \sigma^2_\delta$ відповідно, до того ж

$$\mathsf{E}\,\varepsilon = \mathsf{E}\,\delta = 0.$$

(ii) Відомим є число $\lambda = \sigma^2_\varepsilon/\sigma^2_\delta$.

(iii) Випадкові величини $\xi,\ \varepsilon,\ \delta$ мають скінченні четверті моменти.

(iv) Розподіл похибки ε не зосереджений на двох точках.

Позначимо

$$\mu_x = \mathsf{E}\,x, \quad \mu_y = \mathsf{E}\,y.$$

Розглянемо незалежні копії (2) моделі (1). За спостереженнями $(y_i, x_i),\ 1 \le i \le n,$ оцінюємо вектор

$$\theta := (\mu_x, \beta_0, \beta_1, \sigma^2_\delta, \sigma^2_\xi)^\top$$

або, за іншої параметризації, вектор

$$\tau := (\mu_x, \mu_y, \beta_1, \sigma^2_\delta, \sigma^2_\xi)^\top. \tag{6}$$

2.1. Формули для оцінок та оціночна функція. На основі функціональної інваріантності ОМП [6] (глава18) у книзі [3, с. 14, 15] виписано систему з п'яти рівнянь для ОМП вектора θ за умов (i), (ii), а також у припущенні про нормальність базових величин $\xi,\ \varepsilon,\ \delta$. Для цього перші два моменти вектора $(x, y)^\top$ виражаються через параметри моделі, після чого замість цих моментів підставляються вибіркові середні, емпіричні дисперсії (4) та емпірична коваріація (5). Отримана система розв'язується відносно $\theta \in \Theta := \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)^2$.

Наступні оцінки є розв'язками системи з імовірністю 1 при $n \ge n_0(\omega)$ (див. [3, с. 16, 17]:

$$\hat{\mu}_x = \bar{x}, \tag{7}$$

$$\hat{\beta}_1 = \begin{cases} \dfrac{s_{yy} - \lambda s_{xx} + \sqrt{(s_{yy} - \lambda s_{xx})^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}}, & \text{якщо} \quad s_{xy} \neq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad s_{xy} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \tag{9}$$

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{s_{yy} - 2\hat{\beta}_1 s_{xy} + \hat{\beta}_1^2 s_{xx}}{\lambda + \hat{\beta}_1^2}, \tag{10}$$

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = s_{xx} - \hat{\sigma}_\delta^2.$$

Із вищезгаданої властивості функціональної інваріантності ОМП випливає, що для ОМП вектора (6) використовуються ці самі статистики, тільки (9) замінено оцінкою

$$\hat{\mu}_y = \bar{y}.$$

Далі ми вивчаємо асимптотичні властивості побудованих оцінок

$$\hat{\tau} := (\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_\delta^2, \hat{\sigma}_\xi^2)^\top$$

та $\hat{\theta} := (\hat{\mu}_x, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_\delta^2, \hat{\sigma}_\xi^2)^\top$ без припущення про нормальність базових випадкових величин моделі.

Запишемо оціночну функцію, що відповідає оцінці $\hat{\tau}$. Зазначимо, що оцінка (8) задовольняє квадратне рівняння

$$\hat{\beta}_1^2 s_{xy} + \hat{\beta}_1(\lambda s_{xx} - s_{yy}) - \lambda s_{xy} = 0. \tag{11}$$

Задамо тепер оціночну вектор-функцію $s = s(\tau; x, y)$ з компонентами

$$s^{(\mu_x)} = x - \mu_x, \qquad s^{(\mu_y)} = y - \mu_y, \tag{12}$$

$$s^{(\beta_1)} = \beta_1^2(x - \mu_x)(y - \mu_y) + \beta_1(\lambda(x - \mu_x)^2 - (y - \mu_y)^2) - \lambda(x - \mu_x)(y - \mu_y),$$

$$s^{(\sigma_\delta^2)} = (y - \mu_y)^2 - 2\beta_1(x - \mu_x)(y - \mu_y) + \beta_1^2(x - \mu_x)^2 - \sigma_\delta^2(\lambda + \beta_1^2), \tag{13}$$

$$s^{(\sigma_\xi^2)} = (x - \mu_x)^2 - \sigma_\delta^2 - \sigma_\xi^2.$$

Оцінка $\hat{\tau}$ задовольняє рівняння

$$\sum_{i=1}^n s(\hat{\tau}; x_i, y_i) = 0. \tag{14}$$

2.2. Консистентність та асимптотична нормальність оцінок.

Теорема 1. 1. *За умов* (i), (ii) *оцінка* $\hat{\tau}$ *строго консистентна, тобто* $\hat{\tau} \xrightarrow{\mathrm{P1}} \tau$, $n \to \infty$.

2. *За умов* (i) – (iii) *оцінка* $\hat{\tau}$ *асимптотично нормальна, тобто для деякої матриці* $\Sigma^{(\tau)} = \Sigma^{(\tau)}(\tau)$ *виконується*

$$\sqrt{n}(\hat{\tau} - \tau) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \Sigma^{(\tau)}). \tag{15}$$

3. *За умов* (i) – (iv) *АКМ* $\Sigma^{(\tau)}$ *є невиродженою.*

Доведення. 1. Строгу консистентність оцінки $\hat{\beta}_1$ доведено в [2, с. 90]. За цією ж схемою на основі явних формул для $\hat{\tau}$ доводиться строга консистентність інших компонентів $\hat{\tau}$.

2. Оцінка $\hat{\tau}$ задається оціночним рівнянням (14). Безпосередньо перевіряється, що оціночна функція $s(\tau; x, y)$ є незсуненою, тобто

$$\mathsf{E}_\tau\, s(\tau; x, y) = 0. \tag{16}$$

Розглянемо дві матриці

$$V := -\,\mathsf{E}_\tau \frac{\partial s(\tau; x, y)}{\partial \tau^\top}, \qquad B := \mathbf{cov}(s(\tau; x, y)). \tag{17}$$

Матриця B коректно визначена, оскільки за умовою (iii) існують скінченні четверті моменти випадкових величин $x - \mu_x$, $y - \mu_y$.

Матриця V є нижньо-трикутною. Розглянемо її діагональний елемент

$$-\mathsf{E}_\tau \frac{\partial s^{(\beta_1)}}{\partial \beta_1} = -[2\beta_1 \cdot \beta_1\sigma_\xi^2 + \lambda(\sigma_\xi^2 + \sigma_\delta^2) - (\beta_1^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2)] = -(\beta_1^2\sigma_\xi^2 + \lambda\sigma_\xi^2) \neq 0.$$

Усі інші діагональні елементи цієї матриці також відмінні від 0. Тому V невироджена.

Рівність (16), консистентність $\hat{\tau}$, а також невиродженість V дозволяють застосувати теорему 26.A з монографії [2]. Тоді виконується (15), причому АКМ $\Sigma^{(\tau)}$ знаходиться за сендвіч-формулою

$$\Sigma^{(\tau)} = V^{-1} B V^{-\top}. \tag{18}$$

3. Залишилося довести невиродженість B, що рівносильно лінійній незалежності п'яти випадкових величин — компонент оціночної функції $s(\tau; x, y)$ для істинного значення параметра τ.

Розглянемо випадковий вектор

$$z := \big(x - \mu_x, y - \mu_y, (x - \mu_x)^2, (x - \mu_x)(y - \mu_y), (y - \mu_y)^2\big)^\top. \tag{19}$$

Оціночна функція має вигляд

$$s(\tau; x, y) = Tz + a,$$

де $T = T(\tau)$ — невироджена квадратна матриця, $a = a(\tau)$ — невипадковий вектор. Тому достатньо довести, що жодна лінійна комбінація компонент вектора (19) не є константою.

Нехай для деяких дійсних чисел a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_3 з імовірністю 1 виконується

$$F := a_{11}(x - \mu_x)^2 + a_{12}(x - \mu_x)(y - \mu_y) + a_{22}(y - \mu_y)^2 + a_1(x - \mu_x) + a_2(y - \mu_y) + a_3 = 0.$$

Введемо центровану випадкову величину

$$\rho = \xi - \mu_x.$$

Тоді

$$x - \mu_x = \rho + \delta, \qquad y - \mu_y = \beta_1\rho + \varepsilon.$$

Розглянемо два випадки. Почнемо з випадку, коли розподіл похибки δ не зосереджений у двох точках. Маємо

$$0 = \mathsf{E}[F(\rho,\varepsilon,\delta) \mid \delta] = a_{11}\delta^2 + a_1\delta + c_3,$$

де $c_3 = a_{11}\sigma_\xi^2 + a_{12}\beta_1\sigma_\xi^2 + a_{22}(\beta_1^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2) + a_3$. Тому $a_{11} = a_1 = 0$. Аналогічно, використовуючи умову (iv), отримуємо $a_{22} = a_2 = 0$. Далі,

$$0 = \mathsf{E}[F(\rho,\varepsilon,\delta) \mid \varepsilon,\delta] = a_{12}\delta\varepsilon + c_5.$$

Математичне сподівання останнього виразу дорівнює 0, тому $c_5 = 0$. Насамкінець $0 = \\ = \mathsf{D}(a_{12}\delta\varepsilon) = a_{12}^2\sigma_\xi^2\sigma_\varepsilon^2$, звідки $a_{12} = 0$. Тоді останній коефіцієнт $a_3 = 0$.

Перейдемо до другого випадку, коли розподіл похибки δ зосереджено у двох точках δ_1 та δ_2. (Оскільки $\sigma_\delta^2 > 0$, то розподіл δ не може бути зосередженим в одній точці.) Маємо $\mathsf{P}(\delta = \delta_i) > 0,\ i = 1, 2$, та $\delta_1 \neq \delta_2$.

Оскільки δ, ε та ρ незалежні в сукупності, то умовні розподіли $[F(\rho,\varepsilon,\delta) \mid \delta = \delta_1]$ та $[F(\rho,\varepsilon,\delta) \mid \delta = \delta_2]$ такі самі, як і маргінальні розподіли випадкових величин $F(\rho,\varepsilon,\delta_1)$ та $F(\rho,\varepsilon,\delta_2)$. Тому з рівності $F(\rho,\varepsilon,\delta) = 0$ майже напевно (м. н.) випливає

$$\mathsf{P}[F(\rho,\varepsilon,\delta) = 0 \mid \delta = \delta_1] = \mathsf{P}[F(\rho,\varepsilon,\delta) = 0 \mid \delta = \delta_2] = 1,$$

$$F(\rho,\varepsilon,\delta_1) = F(\rho,\varepsilon,\delta_2) = 0 \quad \text{м. н.}$$

З імовірністю 1 маємо

$$0 = F(\rho,\varepsilon,\delta_1) - F(\rho,\varepsilon,\delta_2) =$$

$$= (\delta_1 - \delta_2)((2a_{11} + a_{12}\beta_1)\rho + a_{12}\varepsilon + a_{11}(\delta_1 + \delta_2) + a_1),$$

$$(2a_{11} + a_{12}\beta_1)\rho + a_{12}\varepsilon + a_{11}(\delta_1 + \delta_2) + a_1 = 0,$$

звідки отримуємо $a_{12} = 0,\ a_{11} = 0,\ a_1 = 0$. Тоді

$$0 = F(\rho,\varepsilon,\delta) = a_{22}(\beta_1\rho + \varepsilon^2) + a_2(\beta_1\rho + \varepsilon) + a_3 \quad \text{м. н.}$$

Оскільки розподіл ε не зосереджено у двох точках, то розподіл $\beta_1\rho + \varepsilon$ також не зосереджено у двох точках. Тому $a_{22} = a_2 = a_3 = 0$.

Жодна нетривіальна лінійна комбінація компонент векторів (19) не є константою, що і доводить невиродженість $\Sigma^{(\tau)}$.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Вилучити умову (iv) не можна. Якщо $\beta_1 = 0$ і розподіл ε зосереджено у двох точках ε_1 та ε_2, то матриця B, а отже і матриця $\Sigma^{(\tau)}$, є виродженою. Справді, позначимо $v = (0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, 0, 0, -1)^\top$ та використаємо інші позначення з доведення теореми 1. Розподіл $y - \mu_y$ зосереджено лише у двох точках: ε_1 та ε_2. Тому $v^\top z = \varepsilon_1\varepsilon_2$ м. н., причому $\varepsilon_1\varepsilon_2$ є невипадковим числом. При істинному значенні параметра τ маємо $v^\top T^{-1} s(\tau; x, y) = v^\top z + a = \\ = \varepsilon_1\varepsilon_2 + a$ м. н., звідки отримуємо, що матриця $B = \mathbf{cov}(s(\tau; x, y))$ є виродженою.

***Наслідок* 1.** 1. *За умов* (i), (ii) *оцінка* $\hat\theta$ *строго консистентна, тобто* $\hat\theta \xrightarrow{\text{P1}} \theta$, $n \to \infty$.

2. *За умов* (i) – (iii) *оцінка* $\hat\theta$ *асимптотично нормальна, тобто для деякої матриці* $\Sigma^{(\theta)} = \\ = \Sigma^{(\theta)}(\theta)$ *виконується*

$$\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \xrightarrow{\text{d}} N(0, \Sigma^{(\theta)}). \tag{20}$$

3. *За умов* (i) – (iv) *АКМ* $\Sigma^{(\theta)}$ *є невиродженою.*

Доведення. 1. За посиленим законом великих чисел для оцінки (2.1) маємо $\hat{\mu}_y = \bar{y} \xrightarrow{\text{P1}} \mathsf{E}\, y = \mu_y$, $n \to \infty$. Збіжність інших компонент оцінки $\hat{\theta}$ встановлено в теоремі 1 (твердження 1).

2, 3. Вектори θ та τ пов'язані так:

$$\theta = f(\tau) = (\tau_1, \tau_2 - \tau_1\tau_3, \tau_3, \tau_4, \tau_5)^\top.$$

Маємо також $\hat{\theta} = f(\hat{\tau})$, матриця Якобі $\dfrac{\partial f}{\partial \tau^\top}$ є невиродженою.

За умов (i) – (iii) із збіжності (15) згідно з δ-методом випливає шукана збіжність (20), із АКМ

$$\Sigma^{(\theta)} = \Sigma^{(\theta)}(\theta) = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau^\top} \Sigma^{(\tau)}(\tau) \left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau^\top} \right)^\top.$$

Як стверджується в теоремі 1 (твердження 3), за умов (i) – (iv) матриця $\Sigma^{(\tau)}$ невироджена, тож матриця $\Sigma^{(\theta)}$ також невироджена як добуток невироджених матриць.

Наслідок 1 доведено.

2.3. Асимптотично незалежні оцінки. Розглянемо довільну консистентну та асимптотично нормальну оцінку $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)^\top$ параметра $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, тобто при необмеженому зростанні обсягу вибірки n виконується

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{\text{d}} N(0, \Sigma^{(\alpha)}), \qquad \Sigma^{(\alpha)} = (s_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^2.$$

Оцінки $\hat{\alpha}_1$ та $\hat{\alpha}_2$ називаються *асимптотично незалежними*, якщо $s_{12}^{(\alpha)} = 0$, яким би не було істинне значення параметра α.

Нехай $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ — консистентні оцінки параметрів $\alpha \in \mathbb{R}^p$ та $\beta \in \mathbb{R}^q$, побудовані за однією вибіркою, до того ж

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\beta} - \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \Sigma^{(\alpha\beta)}).$$

Оцінки $\hat{\alpha}$ та $\hat{\beta}$ називаються асимптотично незалежними, якщо будь-яка компонента $\hat{\alpha}_i$ оцінки $\hat{\alpha}$ асимптотично незалежна з будь-якою компонентою $\hat{\beta}_j$ оцінки $\hat{\beta}$.

Для $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ маємо

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\beta} - \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d}} \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_\alpha \\ \gamma_\beta \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma^{(\alpha\beta)}),$$

де γ_α, γ_β — незалежні гауссівські вектори, розподілені в $\mathbb{R}^p$ та $\mathbb{R}^q$ відповідно, до того ж матриця $\Sigma^{(\alpha\beta)}$ має блочно-діагональну структуру:

$$\Sigma^{(\alpha\beta)} = \begin{pmatrix} \Sigma^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & \Sigma^{(\beta)} \end{pmatrix}, \qquad \Sigma^{(\alpha)} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

На основі асимптотично незалежних оцінок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ довірчу область для сукупного параметра $(\alpha^\top, \beta^\top)^\top$ можна будувати як декартів добуток довірчих областей параметрів α та β.

Введемо подальші обмеження на модель спостережень:

(v) $\mathsf{E}\,\varepsilon^3 = \mathsf{E}\,\delta^3 = 0$;

(vi) $\mathsf{E}\,\varepsilon^4 = 3\sigma_\varepsilon^4$, $\mathsf{E}\,\delta^4 = 3\sigma_\delta^4$;

(vii) $\mathsf{E}(\xi - \mu_x)^3 = 0.$

Умова (v) означає, що для всіх похибок коефіцієнт асиметрії дорівнює 0; за умови (vii) коефіцієнт асиметрії регресора ξ дорівнює 0. За умови (vi) куртозис

$$\beta_2^{(\varepsilon)} := \frac{\mathsf{E}(\varepsilon - \mathsf{E}\,\varepsilon)^4}{(\mathsf{D}\,\varepsilon)^4} = 3,$$

як і для гауссівської випадкової величини, і таким же за величиною буде куртозис $\beta_2^{(\delta)}$ похибки δ.

Сформулюємо основний результат статті.

Теорема 2. *Нехай виконані умови* (i) – (iii).

1. *За умови* (v) *пара оцінок* $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)$ *асимптотично незалежна від пари* $(\hat\beta_1, \hat\sigma_\delta^2)$.

2. *За умов* (v), (vii) *пара оцінок* $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)$ *асимптотично незалежна від* $\hat\sigma_\xi^2$.

3. *За умови* (vi) *оцінки* $\hat\beta_1$ *та* $\hat\sigma_\delta^2$ *асимптотично незалежні.*

Доведення теореми міститься в додатку.

Наслідок 2. *Нехай виконано умови* (i) – (iii), (v), (vi). *Тоді трійка оцінок* $(\hat\mu_x, \hat\beta_0, \hat\beta_1)$ *асимптотично незалежна від* $\hat\sigma_\delta^2$.

Доведення. З огляду на перше та третє твердження теореми 2 залишилося пояснити асимптотичну незалежність $\hat\beta_0$ та $\hat\sigma_\delta^2$.

За першим та третім твердженнями теореми 2 оцінка $\hat u := (\hat\mu_x, \hat\mu_y, \hat\beta_1)^\top$ асимптотично незалежна від $\hat\sigma_\delta^2$. Тому оцінка $\hat\beta_0 = \hat\mu_y - \hat\mu_x\hat\beta_1$, як поліном від $\hat u$, буде також асимптотично незалежною від $\hat\sigma_\delta^2$.

Як бачимо, за умов наслідку 2 перші чотири компоненти $\hat\tau$ розбиваються на 3 групи асимптотично незалежних оцінок: $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)^\top$, $\hat\beta_1$, $\hat\sigma_\delta^2$, тоді як за цих умов перші чотири компоненти $\hat\theta$ розбиваються лише на дві групи асимптотично незалежних оцінок: $(\hat\mu_x, \hat\beta_0, \hat\beta_1)^\top$, $\hat\sigma_\delta^2$ (тут у першій групі $\hat\mu_x$ та $\hat\beta_1$ асимптотично незалежні, проте $\hat\beta_0$ не є асимптотично незалежною ані від $\hat\mu_x$, ані від $\hat\beta_1$). Таким чином, параметризація (3) має певні переваги у порівнянні з класичною параметризацією (1).

Наслідок 2 доведено.

2.4. Побудова асимптотичної довірчої області для $\boldsymbol{(\hat\mu_x, \hat\mu_y, \hat\beta_1)^\top}$**.** У цьому підпункті вважаємо, що виконано умови (i) – (v). На основі асимптотичної незалежності пари $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)^\top$ від $\hat\beta_1$ побудуємо довірчу область для вектора $u := (\mu_x, \mu_y, \beta_1)^\top$. Оцінці $\hat u$ відповідає оціночна функція

$$s^{(u)} := \left(s^{(\mu_x)}, s^{(\mu_y)}, s^{(\beta_1)}\right)^\top.$$

За другим та третім твердженнями теореми 1 маємо

$$\sqrt{n}(\hat u - u) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \Sigma^{(u)}),$$

де АКМ $\Sigma^{(u)}$ є невиродженою,

$$\Sigma^{(u)} = (A^{(u)})^{-1} B^{(u)} (A^{(u)})^{-\top}, \tag{21}$$

$$B^{(u)} = \mathbf{cov}(s^{(u)}(u; x, y)), \qquad A^{(u)} = -\,\mathsf{E}_u \frac{\partial s^{(u)}(u; x, y)}{\partial u^\top}.$$

Внаслідок вищезгаданої асимптотичної незалежності матриця $\Sigma^{(u)}$ є блочно-діагональною:

$$\Sigma^{(u)} = \operatorname{diag}\left(\Sigma^{(\mu_x,\mu_y)}, \Sigma^{(\beta_1)}\right), \tag{22}$$

де $\Sigma^{(\mu_x,\mu_y)}$ — АКМ оцінки $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)^\top$, а $\Sigma^{(\beta_1)}$ — асимптотична дисперсія оцінки $\hat\beta_1$.

Лема 1. *Нехай виконані умови* (i) – (iii). *Тоді*

$$\sqrt{n}(\hat\beta_1 - \beta_1) \xrightarrow{\text{d}} N\left(0, \Sigma^{(\beta_1)}\right), \qquad \Sigma^{(\beta_1)} = \frac{\upsilon^2}{\sigma_\xi^4(\beta_1^2+\lambda)^2}, \tag{23}$$

$$\upsilon^2 = \sigma_\xi^2\sigma_\delta^2(\beta_1^2+\lambda)^3 + (\lambda-\beta_1^2)^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + \beta_1^2\big(\mathsf{D}(\varepsilon^2) + \lambda^2\,\mathsf{D}(\delta^2)\big). \tag{24}$$

Доведення. Для нормованої оцінки справедливим є розклад (2.236) з [2]:

$$\sqrt{n}(\hat\beta_1 - \beta_1) = \frac{\sqrt{n}\Lambda_n}{\sigma_\xi^2(\beta_1^2+\lambda)} + o_p(1),$$
$$\Lambda_n = (\beta_1^2+\lambda)\overline{\rho\varepsilon} + \beta_1\big(\overline{\varepsilon^2} - \sigma_\varepsilon^2\big) - \beta_1(\beta_1^2+\lambda)\overline{\rho\delta} - \beta_1\lambda\big(\overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2\big) + (\lambda-\beta_1^2)\overline{\delta\varepsilon}. \tag{25}$$

Тут $\rho = \xi - \mu_x$. (В [2] цей розклад отримано при $\beta_1 \neq 0$, але він справедливий також і при $\beta_1 = 0$.) Згідно з центральною граничною теоремою маємо

$$\sqrt{n}\left(\overline{\rho\varepsilon}, \overline{\varepsilon^2} - \sigma_\varepsilon^2, \overline{\rho\delta}, \overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2, \overline{\delta\varepsilon}\right)^\top \xrightarrow{\text{d}} \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma)^\top \sim N(0, S),$$
$$S = \operatorname{diag}\left(\sigma_\xi^2\sigma_\varepsilon^2, \mathsf{D}(\varepsilon^2), \sigma_\xi^2\sigma_\delta^2, \mathsf{D}(\delta^2), \sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2\right).$$

Тоді чисельник у (25) збігається за розподілом до випадкової величини

$$(\beta_1^2+\lambda)\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 - \beta_1(\beta_1^2+\lambda)\gamma_3 - \beta_1\lambda\gamma_4 + (\lambda-\beta_1^2)\gamma_5 \sim N(0,\upsilon^2),$$
$$\upsilon^2 = (\beta_1^2+\lambda)^2 s_{11} + \beta_1^2 s_{22} + \beta_1^2(\beta_1^2+\lambda)^2 s_{33} + \beta_1^2\lambda^2 s_{44} + (\lambda-\beta_1^2)^2 s_{55}.$$

Це збігається з виразом (24). Тоді за лемою Слуцького з розкладу (25) випливає (23).

Лему 1 доведено.

Як бачимо, матриця $\Sigma^{(u)}$ виражається, зокрема, через четверті моменти похибок $\mathsf{E}\,\varepsilon^4$ та $\mathsf{E}\,\delta^4$, які не можна оцінити консистентно без додаткових припущень про розподіли похибок. Тому сендвіч-формула (21) не дозволяє побудувати консистентну оцінку для $\Sigma^{(u)}$ за формулою $\hat\Sigma^{(u)} = \Sigma^{(u)}(\hat\tau)$. Проте це можна зробити, скориставшись рекомендацією [7, с. 368, 369]. Сендвіч-оцінка для $\Sigma^{(u)}$ має вигляд

$$\hat\Sigma^{(u)} = (\hat A^{(u)})^{-1}\hat B^{(u)}(\hat A^{(u)})^{-\top},$$
$$\hat B^{(u)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s^{(u)}(\hat\tau; x_i, y_i)(s^{(u)}(\hat\tau; x_i, y_i))^\top,$$
$$\hat A^{(u)} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\partial s^{(u)}(\hat\tau; x_i, y_i)}{\partial u^\top}.$$

За умов (i) – (v) виконується $\hat\Sigma^{(u)} \xrightarrow{\text{P1}} \Sigma^{(u)}$, тому з імовірністю 1 при $n \geq n_0(\omega)$ сендвіч-оцінка стає додатно визначеною матрицею.

Нехай для даної вибірки $\hat{\Sigma}^{(u)}$ є додатно визначеною. Маємо строго консистентну оцінку блоків з розкладу (22):

$$\hat{\Sigma}^{(\mu_x,\mu_y)} = \left(\hat{\Sigma}_{ij}^{(u)}\right)_{i,j=1}^{2}, \qquad \hat{\Sigma}^{(\beta_1)} = \hat{\Sigma}_{33}^{(u)}. \tag{26}$$

Нехай $1-\alpha$ — заданий рівень довіри. На основі оцінок (26) будуємо асимптотичний довірчий еліпсоїд $E^{(\mu_x,\mu_y)}$ для вектора $(\mu_x,\mu_y)^\top$ із рівнем довіри $\sqrt{1-\alpha}$ та асимптотичний довірчий інтервал $I^{(\beta_1)}$ для β_1 із тим самим рівнем довіри $\sqrt{1-\alpha}$. Тоді множина

$$E^{(u)} := E^{(\mu_x,\mu_y)} \times I^{(\beta_1)} \tag{27}$$

буде асимптотичною довірчою областю для вектора u із рівнем довіри $1-\alpha$.

Довірча область (27) має природне геометричне застосування. Ми хочемо в системі координат $\xi O y$ побудувати регресійну пряму $y-\mu_y = \beta_1(\xi-\mu_x)$ навколо оціненої прямої $y-\hat{\mu}_y = \hat{\beta}_1(\xi-\hat{\mu}_x)$. Точка (μ_x,μ_y) береться з еліпсоїда $E^{(\mu_x,\mu_y)}$, а кутовий коефіцієнт β_1 — з інтервалу $I^{(\beta_1)}$. Усі такі прямі заповнюють асимптотичну довірчу область для положення істинної регресійної прямої.

3. Оцінювання за відомої дисперсії $\boldsymbol{\sigma_\delta^2}$. У цьому пункті замість умови (ii) ми вимагатимемо наступне:

(viii) відомою є дисперсія σ_δ^2.

Ми маємо незалежні копії (2) моделі (1). За спостереженнями (y_i,x_i), $1\le i\le n$, оцінюємо вектор

$$\alpha := (\mu_x,\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\xi^2)^\top$$

або, за іншої параметризації, вектор

$$\upsilon := (\mu_x,\mu_y,\beta_1,\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\xi^2)^\top.$$

Наші міркування подібні до наведених у пункті 2, тому наводити їх не будемо.

Для параметрів μ_x та μ_y розглядаються оцінки (7), (2.1). Виправлена оцінка найменших квадратів $\hat{\beta}_1$ задається формулою

$$\hat{\beta}_1 = \begin{cases} \dfrac{s_{xy}}{s_{xx}-\sigma_\delta^2}, & \text{якщо} \quad s_{xx}\ne\sigma_\delta^2, \\ +\infty, & \text{якщо} \quad s_{xx}=\sigma_\delta^2. \end{cases}$$

Оцінка $\hat{\beta}_0$ задається рівністю (9). Далі,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = s_{yy} - \hat{\beta}_1 s_{xy},$$
$$\hat{\sigma}_\xi^2 = s_{xx} - \sigma_\delta^2.$$

Оцінка $\hat{\alpha} := (\hat{\mu}_x,\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\varepsilon^2,\hat{\sigma}_\xi^2)^\top$ з імовірністю 1 при $n\ge n_0(\omega)$ збігається з ОМП вектора α в гауссівській моделі з умовами (i), (viii), див. [3, с. 18]. Це саме стосується оцінки $\hat{\upsilon} := (\hat{\mu}_x,\hat{\mu}_y,\hat{\beta}_1,\hat{\sigma}_\varepsilon^2,\hat{\sigma}_\xi^2)^\top$ вектора υ. Ми вивчатимемо ці оцінки без умови гаусовості.

Оцінці $\hat{\upsilon}$ відповідає векторна оціночна функція $s^{(\upsilon)}(\upsilon;x,y)$ з компонентами (12), а також

$$s^{(\beta_1)} = (x-\mu_x)(y-\mu_y) - \beta_1((x-\mu_x)^2-\sigma_\delta^2),$$

$$s^{(\sigma_\varepsilon^2)} = (y-\mu_y)^2 - \beta_1(x-\mu_x)(y-\mu_y) - \sigma_\varepsilon^2;$$

останній компонент $s^{(\sigma_\xi^2)}$ задається рівністю (2.1). Тоді м. н. при $n \ge n_0(\omega)$ оцінка $\hat{\upsilon}$ задовольняє рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} s^{(\upsilon)}(\hat{\upsilon}; x_i, y_i) = 0.$$

Теорема 3. 1. *За умов* (i), (viii) *оцінка $\hat{\upsilon}$ строго консистентна, тобто $\hat{\upsilon} \xrightarrow{\mathrm{P1}} \upsilon$, $n \to \infty$.*

2. *За умов* (i), (iii), (viii) *оцінка $\hat{\upsilon}$ асимптотично нормальна, тобто для деякої матриці $\Sigma^{(\upsilon)} = \Sigma^{(\upsilon)}(\upsilon)$ виконується*

$$\sqrt{n}(\hat{\upsilon} - \upsilon) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \Sigma^{(\upsilon)}).$$

3. *За умов* (i), (iii), (iv), (viii) *АКМ Σ^{υ} є невиродженою.*

***Наслідок* 3.** *Теорема* 3 *залишається справедливою за тих же умов із заміною $\hat{\upsilon}$ на $\hat{\alpha}$, υ на α та $\Sigma^{(\upsilon)}$ на $\Sigma^{(\alpha)}$.*

Теорема 4. *Нехай виконані умови* (i), (viii).

1. *За умови* (v) *пара оцінок $(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y)$ асимптотично незалежна від пари $(\hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$.*
2. *За умов* (v), (vii) *пара оцінок $(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y)$ асимптотично незалежна від $\hat{\sigma}_\xi^2$.*
3. *Якщо ξ, ε, δ є гауссівськими, то оцінки $\hat{\beta}_1$ та $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ не є асимптотично незалежними.*

Третє твердження випливає того, то сумісна АКМ оцінок $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ є заповненою, тобто не містить тотожних нулів [3] (теорема 2.3).

При параметризації (3) за умов (i), (v), (vii), (viii) векторна оцінка $\hat{\upsilon}$ розбивається на дві групи асимптотично незалежних оцінок: $(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y)$ та $(\hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_\varepsilon^2, \hat{\sigma}_\xi^2)$. При звичайній параметризації (1) оцінку $\hat{\alpha}$ неможливо розбити на дві групи асимптотично незалежних оцінок. У цьому є перевага запропонованої нової параметризації у випадку відомого σ_δ^2.

4. Висновки. У лінійній структурній моделі з класичними похибками вимірювання (1) ми запропонували нову параметризацію (3), де $\mu_y = \mathsf{E}\, y$, $\mu_x = \mathsf{E}\, x$. Ми вивчали такі оцінки п'яти параметрів моделі, які у випадку гауссівських розподілів ξ, ε, δ є оцінками максимальної правдоподібності. Нова параметризація дозволяє виділити більше груп асимптотично незалежних оцінок, що спрощує побудову асимптотичної довірчої області для векторного параметра (див. підпункт 2.4).

Отримані результати можна поширити на множинну модель з похибками вимірювання: $y = \beta_0 + \beta_1^\top \xi + \varepsilon$, $x = \xi + \delta$, де ξ — векторний регресор, β_1 — векторний параметр регресії.

Додаток А. *А*$_1$. *Доведення твердження 1 теореми 1.* Будемо використовувати формули (18), (17) для АКМ оцінки $\hat{\tau}$. Матриця V розпадається на два блоки:

$$V = \mathrm{diag}\left(V^{(\mu_x,\mu_y)}, V^{(\beta_1,\sigma_\delta^2,\sigma_\xi^2)}\right), \qquad V^{(\mu_x,\mu_y)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{28}$$

Далі, безпсередній підрахунок показує, що за умов (i), (iii), (v) при істинних значеннях параметрів кожне $s^{(\mu_x)}(\tau; x, y)$ та $s^{(\mu_y)}(\tau; x, y)$ некорельоване з $s^{(\beta_1)}(\tau; x, y)$ та $s^{(\sigma_\delta^2)}(\tau; x, y)$. Для оцінки $\hat{\tau}_{-5} := \left(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_\delta^2\right)^\top$ маємо АКМ $\Sigma^{(\tau_{-5})}$, що знаходиться за сендвіч-формулою

$$\Sigma^{(\tau_{-5})} = \left(V^{(\tau_{-5})}\right)^{-1} B^{(\tau_{-5})} \left(V^{(\tau_{-5})}\right)^{-\top}.$$

Матриця $V^{(\tau_{-5})}$ є частиною матриці (28), і тому

$$V^{(\tau_{-5})} = \operatorname{diag}\left(V^{(\mu_x,\mu_y)}, V^{(\beta_1,\sigma_\delta^2)}\right).$$

Матриця $B^{(\tau_{-5})}$ є частиною матриці B з формули (17), і внаслідок зазначеної вище некорельованості певних компонент оціночної функції $s = s^{(\tau)}$ маємо

$$B^{(\tau_{-5})} = \operatorname{diag}\left(B^{(\mu_x,\mu_y)}, V^{(\beta_1,\sigma_\delta^2)}\right), \qquad B^{(\mu_x,\mu_y)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Тоді $\Sigma^{(\tau_{-5})}$ теж має блочно-діагональну структуру:

$$\Sigma^{(\tau_{-5})} = \operatorname{diag}\left(\Sigma^{(\mu_x,\mu_y)}, \Sigma^{(\beta_1,\sigma_\delta^2)}\right), \quad \Sigma^{(\mu_x,\mu_y)} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

що і доводить асимптотичну незалежність пари $(\hat\mu_x, \hat\mu_y)$ від $(\hat\beta_1, \hat\sigma_\delta^2)$.

A*₂. *Доведення твердження 2 теореми 1. Зараз треті моменти величин ϵ, δ та $\rho = \xi - \mu_\xi$ дорівнюють нулю, отже, $\mathsf{E}_\tau(x-\mu_x)^3 = \mathsf{E}(x-\mu_x)^2(y-\mu_y)^2 = 0$. Тому при істинних значеннях параметрів $s^{(\mu_x)}(\tau; x, y)$ та $s^{(\mu_y)}(\tau; x, y)$ некорельовані з $s^{(\sigma_\xi^2)}(\tau; x, y)$. Тоді, згідно з додатком A_1, для матриці (17) маємо

$$B = \operatorname{diag}\left(B^{(\mu_x,\mu_y)}, B^{(\beta_1,\sigma_\delta^2,\sigma_\xi^2)}\right). \tag{29}$$

Із формули (18), (28), (29) випливає блочна структура $\Sigma^{(\tau)}$:

$$\Sigma^{(\tau)} = \operatorname{diag}\left(\Sigma^{(\mu_x,\mu_y)}, \Sigma^{(\beta_1,\sigma_\delta^2,\sigma_\xi^2)}\right).$$

Це доводить шукане.

A*₃. *Доведення твердження 3 теореми 1. Запишемо розклад, подібний до (25), для нормованої оцінки $\hat\sigma_\delta^2$. Використовуємо розклад [2, с. 92]

$$s_{xx} = \sigma_x^2 + r_{xx} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}}, \qquad r_{xx} = (\overline{\rho^2} - \sigma_\xi^2) + 2\overline{\rho\delta} + (\overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2),$$

$$s_{xy} = \beta_1\sigma_\xi^2 + r_{xy} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}}, \qquad r_{xy} = \beta_1(\overline{\rho^2} - \sigma_\xi^2) + \beta_1\overline{\delta\rho} + \overline{\rho\varepsilon} + \overline{\delta\varepsilon},$$

$$s_{yy} = \beta_1^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\epsilon^2 + r_{yy} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}}, \qquad r_{yy} = \beta_1^2(\overline{\rho^2} - \sigma_\xi^2) + 2\beta_1\overline{\rho\varepsilon} + \overline{\rho\varepsilon} + (\overline{\varepsilon^2} - \sigma_\varepsilon^2).$$

Позначимо $\Delta\hat\beta_1 = \beta_1 - \hat\beta_1$. Із формули (10) маємо

$$(\hat\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^2)(\lambda + \beta_1^2) = r_{yy} - 2(\beta_1 + \Delta\hat\beta_1)s_{xy} + (\beta_1^2 + 2\beta_1\Delta\hat\beta_1)(s_{xx} - \sigma_\delta^2) + \beta_1^2\sigma_\xi^2 + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}} =$$

$$= r_{yy} - 2\beta_1 r_{xy} - 2\Delta\hat\beta_1 \cdot \beta_1\sigma_\xi^2 + \beta_1^2 r_{xx} + 2\beta_1\Delta\hat\beta_1 \cdot \sigma_\xi^2 + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}},$$

$$(\hat\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^2)(\lambda + \beta_1^2) = \left(\overline{\varepsilon^2} - \sigma_\varepsilon^2\right) + \beta_1^2(\overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2) - 2\beta_1\overline{\delta\varepsilon} + 2\beta_1^2\left(\overline{\rho^2} - \sigma_\xi^2\right) + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}}. \tag{30}$$

Згідно з центральною граничною теоремою отримуємо

$$\sqrt{n}\Big(\overline{\rho\varepsilon}, \overline{\varepsilon^2} - \sigma_\varepsilon^2, \overline{\rho\delta}, \overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2, \overline{\delta\varepsilon}, \overline{\rho^2} - \sigma_\xi^2\Big)^\top \xrightarrow{\mathrm{d}} \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_6)^\top \sim N(0, S_1),$$
$$S_1 = \operatorname{diag}\left(\sigma_\xi^2\sigma_\varepsilon^2, \mathsf{D}(\varepsilon^2), \sigma_\xi^2\sigma_\delta^2, \mathsf{D}(\delta^2), \sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2, \mathsf{D}(\rho^2)\right) = (S_{ij})_{i,j=1}^6.$$

З розкладів (25) та (4) маємо

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}(\hat\beta_1 - \beta_1)\sigma_\xi^2(\beta_1^2 + \lambda) \\ \sqrt{n}(\hat\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^2)(\lambda + \beta_1^2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{d}} \begin{pmatrix} (\beta_1^2 + \lambda)\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 - \beta_1(\beta_1^2 + \lambda)\gamma_3 - \beta_1\lambda\gamma_4 + (\lambda - \beta_1^2)\gamma_5 \\ \gamma_2 + \beta_1^2\gamma_4 - 2\beta_1\gamma_5 + 2\beta_1^2\gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням умови (vi) одержуємо

$$\mathsf{E}\,\eta_1\eta_2 = \beta_1\,\mathsf{D}(\varepsilon^2) - \lambda\beta_1^3\,\mathsf{D}(\delta^2) + (\lambda - \beta_1^2)(-2\beta_1)\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2 =$$
$$= 2\beta_1\sigma_\varepsilon^4 - 2\lambda\beta_1^3\sigma_\delta^4 - 2\lambda\beta_1\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^3\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2 = 0.$$

Це і доводить асимптотичну незалежність $\hat\beta_1$ та $\hat\sigma_\delta^2$.

Література

1. *Wansbeek T., Meijer E.* Measurement error and latent variables in econometrics // Adv. Textbooks Econ. – Amsterdam: North-Holland, 2000. – **37**.
2. *Масюк С. В., Кукуш О. Г., Шкляр С. В., Чепурний М. І., Ліхтарьов І. А.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків – Київ: ДІА, 2015. – 288 с.
3. *Cheng C.-L., Van Ness J. W.* Statistical regression with measurement error // Kendall's Library of Statistics. – London: Arnold, 1999. – **6**.
4. *Gleser L. J.* A note on G. R. Dolby's unreplicated ultrastructural model // Biometrika. – 1985. – **72**, №. 1. – P. 117 – 124.
5. *Cheng C.-L., Van Ness J. W.* On estimating linear relationships when both variables are subject to errors // J. Roy. Statist. Soc. B. – 1994. – **56**, № 1. – P. 167 – 183.
6. *Kendall M. G., Stuart A.* The advanced theory of statistics. – 4th ed. – London: Griffin, 1979. – Vol. 2.
7. *Carroll R. J., Ruppert D., Stefanski L. A., Crainiceanu C. M.* Measurement error in nonlinear models. A modern perspective. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2006.

Одержано 24.05.16