УДК 519.21

Є. В. Карнаух (Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТУ ПРОЦЕСУ ЛЕВІ З МАТРИЧНО-ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ СТРИБКІВ

We consider the representations of resolvent for a Levy process whose jumps have a matrix-exponential distribution.

Рассматриваются представления резольвенты для процесса Леви со скачками, которые имеют матрично-экспоненциальное распределение.

1. Вступ. У цій статті розглядаються процеси Леві, в яких стрибкова частина має обмежену варіацію і стрибки хоча б одного знака мають матрично-експоненціальний (МЕ) розподіл. МЕ розподіли називають також розподілами з раціональною характеристичною функцією (див., наприклад, [1], гл. IX) і до них відносять, зокрема, експоненціальний, гіперекспоненціальний та ерланговий розподіли. Процеси Леві мають широке застосування в сучасній теорії ризику та фінансовому аналізі (див., наприклад, [1, 2] та [3] відповідно). При цьому ряд задач можна звести до визначення розподілів певних функціоналів. Одним із важливих методів дослідження цих розподілів є метод потенціалу, запропонований В. С. Королюком. Важливим аспектом даного методу є той факт, що процес Леві є окремим випадком феллерівського процесу.

Для однорідних марковських процесів операторна резольвента R_s на класі обмежених вимірних функцій $f(x)$ визначається формулою Динкіна [4] (лема 5.1). Для напівнеперервних пуассонівських процесів ξ_t В. С. Королюк [5] увів поняття потенціалу та резольвенти як функцій, за допомогою яких $\mathsf{R}_s f(x)$ має просте зображення (див. [6], (6.9)). Це дозволяє однотипно досліджувати різні одно- та двограничні функціонали для таких процесів і виразити їх у термінах резольвенти $R_s(x)$ або потенціалу $R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x)$, зображення якого в залежності від знака $m = \mathsf{E}\xi_1$ наводиться в [2, 7] (див. [2], формула (4.32)). Інтегральні перетворення $R_s(x)$ та $R(x)$ досить просто виражаються через кумулянту $k(r) = \ln \mathsf{E} e^{r\xi_1}$ (див. [5], § 2.4).

У праці [8, с. 31] на відміну від потенціалу вводиться поняття потенціальної міри для субординатора ζ_t з відповідною кумулянтою $k(u)$ так:

$$U(x) = \int_0^\infty I_{\zeta_t \in [0,x]} dt, \qquad x > 0.$$

У роботі [2] показано, що ці два поняття узгоджуються між собою, оскільки їх перетворення Лапласа однаково виражаються через $|k(r)|^{-1}$ (див. [2], формули (4.183), (4.205)).

Метод потенціалу був розвинутий для процесів Леві зі стрибками лише одного знака. Проте частину результатів можна отримати і для більш загальних процесів, припускаючи, що можливі стрибки обох знаків, причому стрибки одного зі знаків мають розподіл із раціональною характеристичною функцією (див. [6], § 6).

Основна мета статті — отримати матричні аналоги формул операторної резольвенти, встановлених у [2, 6], для процесів Леві з МЕ розподіленими стрибками одного знака. Для досягнення цієї мети в першій частині статті розглянуто інтегральні перетворення розподілів перестрибкових функціоналів, у термінах яких із застосуванням результатів роботи [9] визначається спільний розподіл процесу та його екстремумів до моменту виходу з деякого інтервалу. Цей розподіл визначає ядро резольвенти процесу з обривом у момент виходу з даного інтервалу.

2. Процес Леві з МЕ розподіленими стрибками. Розглянемо процес Леві $X_t,\ t\geq 0$, який має кумулянту

$$k\left(r\right)=ar+\frac{\sigma^2}{2}r^2+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{rx}-1\right)\Pi\left(dx\right), \tag{1}$$

де a — деяка стала, $\sigma\geq 0$ та Π — невід'ємна міра на $R\backslash\{0\}$: $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|\Pi\left(dx\right)<\infty$. Припустимо, що додатні стрибки процесу мають МЕ розподіл, тобто $\Pi\left(dx\right)=\lambda_+p\left(x\right)dx,\ x>0$, де $\lambda_+=$ $=\displaystyle\int_{R^+}\Pi\left(dx\right)<\infty$ та щільність $p\left(x\right)$ має раціональну характеристичну функцію з полюсами $c_1^+,\ldots,c_{d_+}^+:\Re[c_{d_+}^+]\geq\ldots\geq\Re[c_2^+]\geq c_1^+>0$ (детальніше див. [10], розділ 1.3). Кумулянта такого процесу має вигляд

$$k\left(r\right)=ar+\frac{\sigma^2}{2}r^2+\int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{rx}-1\right)\Pi\left(dx\right)+k_+\left(r\right), \tag{2}$$

де $k_+\left(r\right)=\lambda_+\left(Q\left(r\right)/\left(\left(c_1^+-r\right)\ldots\left(c_{d_+}^+-r\right)\right)-1\right)$, $Q\left(r\right)$ — поліном степеня меншого за d_+. Так визначений процес X_t називатимемо UME процесом. Процеси Леві, які мають МЕ розподілені від'ємні стрибки (визначені аналогічно із заміною в позначеннях + на –), називатимемо LME процесами, а якщо і від'ємні і додатні, — то DME процесами.

Виділимо два випадки

$$(NS)_\pm:\quad \sigma>0\quad \text{або}\quad \sigma=0,\quad \pm a>0$$

та

$$(S)_\pm:\quad \sigma=0,\quad \pm a\leq 0.$$

Важливою властивістю UME (LME) процесу є те, що його кумулянтне рівняння $k\left(r\right)=s$ має корені $\left\{\pm r_i^\pm\left(s\right)\right\}_{i=1}^{N_\pm}$ на півплощині

$$\pm\Re[r]>0:\quad \Re\left[r_{N_\pm}^\pm\left(s\right)\right]\geq\ldots\geq\Re\left[r_2^\pm\left(s\right)\right]\geq r_1^\pm\left(s\right),$$

де кількість коренів $N_\pm$ збігається з порядком МЕ розподілу $d_\pm$ у випадку $(S)_\pm$ і дорівнює $d_\pm+1$ у випадку $(NS)_\pm$, більш того, $r_1^+\left(s\right)$ — єдиний корінь на $\left[0,c_1^+\right]$ $\left(-r_1^-\left(s\right)\right.$ — на $\left.\left[-c_1^-,0\right]\right)$.

Із результатів [10] (зауваження 2.2) та [12] (наслідок 2) випливає, що за умови $m=\mathsf{E}X_1>0$ $(m<0)$ при $s\to+0$ корені

$$r_i^\pm\left(s\right)\to r_i^\pm:\Re\left[r_i^\pm\right]>0,\quad i=2,\ldots,N_\pm\quad \text{та}\quad s/r_1^\pm\left(s\right)\to|m|.$$

У термінах цих коренів можна отримати явні формули для розподілів перестрибкових та двограничних функціоналів, що визначають операторну резольвенту процесу з обривом у момент досягнення деякого рівня, а також у момент виходу зі скінченного інтервалу.

2.1. Момент першого досягнення рівня. Базовими функціоналами процесу Леві є його екстремуми $X_t^+ = \sup_{u \le t} X_u$ та $X_t^- = \inf_{u \le t} X_u$. Ключовою властивістю UME процесу є те, що розподіл супремума, зупиненого у показниково розподілений момент часу, має ME розподіл (див. [10], теорема 2.1).

Нехай θ_s визначає показниково розподілену випадкову величину з параметром $s > 0$, незалежну від $X_t: \mathsf{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $t > 0$. Позначимо

$$\beta_k^{\pm} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le d_{\pm}} c_{i_1}^{\pm} \ldots c_{i_k}^{\pm} \quad \text{та} \quad \rho_k^{\pm}(s) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le N_{\pm}} r_{i_1}^{\pm}(s) \ldots r_{i_k}^{\pm}(s),$$

тоді розподіл $X_{\theta_s}^{\pm}$ можна записати у термінах параметрів

$$\boldsymbol{\beta}_{\pm} = \left(\beta_{d_{\pm}}^{\pm}, \ldots, \beta_1^{\pm}\right), \quad \boldsymbol{\rho}_{\pm}(s) = \left(\rho_{N_{\pm}}^{\pm}(s), \ldots, \rho_1^{\pm}(s)\right), \quad \mathbf{e} = (0, \ldots, 0, 1)^{\top}$$

та

$$\mathbf{R}_{\pm}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \rho_{d_{\pm}}^{\pm}(s) & \rho_{d_{\pm}-1}^{\pm}(s) & \ldots & \rho_1^{\pm}(s) \end{pmatrix}.$$

Розмірність стовпця $\mathbf{e}$ в кожному виразі визначається матрицею, на яку він множиться справа (тобто так, щоб відповідний добуток був коректним).

Лема 1 ([11], наслідок 2.1). *Для UME (LME) процесу X_t розподіл максимуму (мінімуму), зупиненого у момент θ_s, визначено таким співвідношенням*:

$$P_{\pm}(s, dx) = \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^{\pm} \in dx\right\} = \left(p_{\pm}(s)\,\delta(x) + \mathbf{q}_{\pm}(s)\, e^{\mp \mathbf{R}_{\pm}(s)x}\mathbf{e}\right) dx, \qquad \pm x \ge 0, \tag{3}$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака та

$$p_{\pm}(s) = \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^{\pm} = 0\right\} = \begin{cases} 0 & \textit{у випадку} \quad (NS)_{\pm}, \\ \dfrac{\rho_{d_{\pm}}^{\pm}(s)}{\beta_{d_{\pm}}^{\pm}} & \textit{у випадку} \quad (S)_{\pm}, \end{cases}$$

$$\mathbf{q}_{\pm}(s) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{d_{\pm}+1}^{\pm}(s)}{\beta_{d_+}^{\pm}} (\boldsymbol{\beta}_{\pm}, 1) & \textit{у випадку} \quad (NS)_{\pm}, \\ \dfrac{\rho_{d_+}^{\pm}(s)}{\beta_{d_{\pm}}^{\pm}} (\boldsymbol{\beta}_{\pm} - \boldsymbol{\rho}_{\pm}(s)) & \textit{у випадку} \quad (S)_{\pm}. \end{cases}$$

Позначимо момент першого досягнення рівня $x \ge 0$ як $\tau_x^+ = \inf\{t \ge 0 \colon X_t > x\}$ та перестриб через цей рівень як $\gamma^+(x) = X_{\tau_x^+} - x$, тоді інтегральне перетворення спільного розподілу $\{\tau_x^+, \gamma^+(x)\}$ можемо виразити в термінах таких характеристик:

$$\boldsymbol{\vartheta}_+ = \left(\rho_1^+(s) - \beta_1^+\right)^{-1} \left(\rho_{d_++1}^+(s) - 0, \rho_{d_+}^+(s) - \beta_{d_+}^+, \ldots, \rho_2^+(s) - \beta_2^+\right),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_+(s) = \begin{cases} \boldsymbol{\vartheta}_+ - \boldsymbol{\beta}_+ & \text{у випадку} \quad (NS)_+, \\ \boldsymbol{\rho}_+(s) - \boldsymbol{\beta}_+ & \text{у випадку} \quad (S)_+ \end{cases}$$

та

$$\mathbf{T}_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ \beta^+_{d_+} & \beta^+_{d_+-1} & \dots & \beta^+_1 \end{pmatrix}.$$

Для доведення теореми, наведеної нижче, застосовується формула обернення раціональної характеристичної функції [1] (твердження 6.1) та формула інтеграла добутку МЕ щільностей [1] (лема A4.6) у термінах добутку $\otimes$ та суми Кронекера $\oplus$.

Теорема 1. *Для UME процесу X_t інтегральне перетворення спільного розподілу моменту досягнення додатного рівня та перестрибу через цей рівень у випадку $(S)_+$ $(x > 0)$ визначено так*:

$$V_+(x, dv) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+}, \gamma^+(x) \in dv, \tau_x^+ < \infty\right] = \frac{\beta^+_{d_+}}{\rho^+_{d_+}(s)}\Big(\mathbf{q}_+(s)\, e^{-\mathbf{R}_+(s)(x+v)}\mathbf{e} -$$

$$- \left(\mathbf{q}_+(s) \otimes \boldsymbol{\alpha}_+(s)\right)\left(\mathbf{R}_+(s) \oplus \mathbf{T}_+\right)^{-1}\left(e^{-\mathbf{R}_+(s)x} \otimes e^{-\mathbf{T}_+ v} - e^{-\mathbf{R}_+(s)(x+v)} \otimes \mathbf{I}\right)\mathbf{e}\Big)dv \quad (4)$$

та у випадку $(NS)_+$ як

$$V_+(x, 0) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+}, \gamma^+(x) = 0, \tau_x^+ < \infty\right] = (\boldsymbol{\beta}_+, 1)\, e^{-\mathbf{R}_+(s)x}\mathbf{e}, \quad (5)$$

для $v > 0$

$$V_+(x, dv) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+}, \gamma^+(x) \in dv, \tau_x^+ < \infty\right] = \frac{\beta^+_{d_+}}{\rho^+_{d_++1}(s)}\Big(-\mathbf{q}_+(s)\,\mathbf{R}_+(s)\, e^{-\mathbf{R}_+(s)(x+v)}\mathbf{e} +$$

$$+ \left(\rho^+_1(s) - \beta^+_1\right)\Big(\mathbf{q}_+(s)\, e^{-\mathbf{R}_+(s)(x+v)}\mathbf{e} -$$

$$- \left(\mathbf{q}_+(s) \otimes \boldsymbol{\alpha}_+(s)\right)\left(-\mathbf{R}_+(s) \oplus \mathbf{T}_+\right)^{-1}\left(e^{-\mathbf{R}_+(s)x} \otimes e^{-\mathbf{T}_+ v} - e^{-\mathbf{R}_+(s)(x+v)} \otimes \mathbf{I}\right)\mathbf{e}\Big)\Big)dv. \quad (6)$$

Доведення. Обертаючи другу факторизаційну тотожність [7] (формула (2.26)) по μ, отримуємо формулу Печерського – Рогозіна (див., наприклад, [9], (2)), що визначає спільну генератрису для $\{\tau_x^+, \gamma^+(x)\}$

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+ - u\gamma^+(x)}, \tau_x^+ < \infty\right] = \left(\mathsf{E}e^{-uX^+_{\theta_s}}\right)^{-1} \int_0^\infty e^{-uv}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} - x \in dv\right\}, \qquad x > 0. \quad (7)$$

Враховуючи, що характеристична функція $X^+_{\theta_s}$ є раціональною (див. [10], формула (13)), множник $\left(\mathsf{E}e^{-uX^+_{\theta_s}}\right)^{-1}$ можна записати у вигляді

$$\left(\mathsf{E}e^{-uX^+_{\theta_s}}\right)^{-1} = \frac{\beta^+_{d_+}}{\rho^+_{N_+}(s)} \begin{cases} u + \left(\rho^+_1 - \beta^+_1\right)\left(1 - \int_0^\infty e^{-uz} g_s(z)\, dz\right) & \text{у випадку} \quad (NS)_+, \\ 1 - \int_0^\infty e^{-uz} g_s(z)\, dz & \text{у випадку} \quad (S)_+, \end{cases} \quad (8)$$

де $g_s(z) = \boldsymbol{\alpha}_+(s)\, e^{-\mathbf{T}_+ z}\mathbf{e}$. Підставляючи (8) та (3) в (7) і обертаючи по u, доводимо (4) – (6).

У випадках $(NS)_+$ та $(S)_+$ $V_+(x, dv)$ можна подати як добуток двох векторів $V_+(x, dv) = \mathbf{b}_+(x)\,\mathbf{d}_+(dv)$, де $\mathbf{b}_+(x)$ визначає вектор-рядок, а $\mathbf{d}_+(dv)$ — вектор-стовпчик, кожен з яких містить N_+ елемент. Цей факт можна встановити зі співвідношення (7), записавши його у вигляді

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+ - u\gamma^+(x)}, \tau_x^+ < \infty\right] =$$

$$= \frac{\beta_{d_+}^+}{\rho_{N_+}^+(s)} \left(u^{d_+} + \sum_{k=1}^{d_+} \beta_k^+ u^{d_+ - k}\right)^{-1} \mathbf{q}_+(s) \det\left(\mathbf{R}_+(s) + u\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{R}_+(s) + u\mathbf{I}\right)^{-1} e^{-\mathbf{R}_+(s)x}\mathbf{e}$$

і зазначивши, що елементи матриці $\det\left(\mathbf{R}_+(s) + u\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{R}_+(s) + u\mathbf{I}\right)^{-1}$ є поліномами степеня меншого або рівного N_+ (див. також [13], наслідок 2.5).

Щоб отримати формулу для $V_-(x, du) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^-}, \gamma^-(x) \in du, \tau^-(x) < \infty\right]$, де τ_x^- та $\gamma^-(x)$ — момент досягнення та перестриб через від'ємний рівень $x \leq 0$ відповідно, можемо застосувати тотожність безмежно подільної факторизації, з якої одержати $\mathsf{E} e^{rX_{\theta_s}^-}$, а потім використати формулу Гербера – Шіу (див., наприклад, [12], лема 2). Якщо маємо DME процес, то можемо застосувати безпосередній аналог теореми 1.

2.2. Момент виходу з інтервалу. Позначимо момент виходу з інтервалу $(x - b, x)$ як $\tau(x, b) = \inf\{t \geq 0\colon X_t \notin (x - b, x)\}$, $0 < x < b$, і припустимо, що $\tau(x, b) = 0$ для $x \notin (0, b)$. Визначимо перестриб через границю в момент виходу як $\gamma_b(x) = \left(X_{\tau(x,b)} - x\right) I_{X_{\tau(x,b)} \geq x} + \left(x - b - X_{\tau(x,b)}\right) I_{X_{\tau(x,b)} \leq x - b}$.

Застосовуючи теорему 1 з [9], інтегральне перетворення спільного розподілу $\{\tau(x, b), \gamma_b(x)\}$ можна записати у термінах ряду послідовних ітерацій (запис у термінах лінійних операторів наведено у [12] (теорема 4))

$$Q_s^+(x, b, du) = \mathsf{E}\left[e^{-s\tau(x,b)}, \gamma_b(x) \in du, X_{\tau(x,b)} \geq x\right] = f_+^s(x, du) + \int_0^\infty f_+^s(x, dv)\, K_+^s(v, du),$$

де

$$f_+^s(x, du) = V_+(x, du) - \int_0^\infty V_-(b - x, dv)\, V_+(v + b, du),$$

$$K_+^s(v, du) = \sum_{n=1}^\infty K_+^{(n)}(v, du, s),$$

$K_+^{(n)}(v, du, s)$ визначені рекурентно:

$$K_+^{(n+1)}(v, du, s) = \int_0^\infty K_+^{(n)}(v, dz, s)\, K_+(z, du, s)$$

та

$$K_+(v, du, s) = \int_0^\infty V_-(-v - b, dz)\, V_+(z + b, du).$$

Позначимо

$$\mathbf{h}(v) = \int_0^\infty V_-(-v-b, dz)\, \mathbf{b}_+(z+b), \quad \int_0^\infty \mathbf{d}_+(dv)\, \mathbf{h}(v) = \mathbf{A}_+, \quad \mathbf{m}(x) = \mathbf{b}_+(x) - \mathbf{h}(x-2b),$$

тоді $K_+(v, du, s) = \mathbf{h}(v)\, \mathbf{d}_+(du)$ та $f_+^s(x, du) = \mathbf{m}(x)\, \mathbf{d}_+(du)$. Звідси $K_+^s(v, du) = \mathbf{h}(v)(\mathbf{I} - \mathbf{A}_+)^{-1}\, \mathbf{d}_+(du)$, і маємо таке твердження.

Теорема 2. *Для UME процесу X_t інтегральне перетворення спільного розподілу моменту виходу з інтервалу $(x-b, x)$ та перестрибу в цей момент можна записати у вигляді* $(u \geq 0)$

$$Q_s^+(x, b, du) = \mathbf{m}(x)(\mathbf{I} - \mathbf{A}_+)^{-1}\, \mathbf{d}_+(du). \tag{9}$$

Для визначення розподілу процесу до моменту виходу з інтервалу застосуємо обернення тотожності Печерського, яка безпосередньо отримується з формули (4.62) [7].

Лема 2. *Для розподілу процесу Леві X_t з кумулянтою* (1), *зупиненого до моменту виходу з інтервалу $(x-b, x)$, маємо*

$$H_s(b, x, dz) = \mathsf{P}\{X_{\theta_s} \in dz, \tau(x, b) > \theta_s\} = \int_{x-b}^{z} \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^+ \in dz - y\right\} \times$$

$$\times \left(\mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^- \in dy\right\} I\{y \leq 0\} + \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^- \in dy - x - v\right\} Q_s^+(x, b, dv) \right). \tag{10}$$

Функція $H_s(b, x, dz)$ визначає спільний розподіл значень процесу та його екстремумів:

$$H_s(b, x, dz) = \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s} \in dz, X_{\theta_s}^+ < x, X_{\theta_s}^- > x - b\right\}$$

(детальніше див. [9], пункт 1.4). Застосовуючи лему 1 та теорему 2, з (10) виводимо таке твердження.

Теорема 3. *Для UME процесу X_t* $(x - b < z < x)$

$$H_s(b, x, dz) = p_+(s)\, M_-(dz) + \mathbf{q}_+(s) \int_{x-b}^{z} e^{-\mathbf{R}_+(s)(z-y)} M_-(dy)\, \mathbf{e} dz, \tag{11}$$

де

$$M_-(dy) = \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^- \in dy\right\} I\{y \leq 0\} +$$

$$+ \mathbf{m}(x)(\mathbf{I} - \mathbf{A}_+)^{-1} \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^- \in dy - x - v\right\} \mathbf{d}_+(dv).$$

Приклад. Нехай маємо процес X_t з кумулянтою (2), де

$$k_+(r) = \lambda_+ \left(\frac{c_1^+}{c_1^+ - r} - 1 \right),$$

тобто $d_+ = 1$ і додатні стрибки мають показниковий розподіл з параметром $c_1^+ > 0$. Припустимо, що $\sigma > 0$, тоді кумулянтне рівняння має два додатних корені $r_1^+(s) < r_2^+(s)$ та

$$\mathbf{q}_+(s) = \frac{r_1^+(s)\, r_2^+(s)}{c_1^+}\left(c_1^+, 1\right), \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_+(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ r_1^+(s)\, r_2^+(s) & r_1^+(s) + r_2^+(s) \end{pmatrix}.$$

Для простоти позначень далі явно не відмічатимемо залежність коренів від s. За лемою 1 маємо $P_+(s, dy) = \mathbf{q}_+(s)\, e^{-\mathbf{R}_+(s)y}\mathbf{e}dy = \dfrac{r_1^+ r_2^+}{c_1^+}\left(a_1^+(s)\, e^{-r_1^+ y} + a_2^+(s)\, e^{-r_2^+ y}\right) dy$, де

$$a_1^+(s) = \frac{c_1^+ - r_1^+}{r_2^+ - r_1^+}, \qquad a_2^+(s) = \frac{r_2^+ - c_1^+}{r_2^+ - r_1^+}.$$

Для знаходження інтегрального перетворення спільного розподілу моменту досягнення рівня та перестрибу $\{\tau_x^+, \gamma^+(x)\}$ зазначимо, що $\boldsymbol{\alpha}_+(s) = \left(r_1^+ + r_2^+ - c_1^+\right)^{-1} r_1^+ r_2^+ - c_1^+$, $\mathbf{T} = c_1^+$, тоді

$$V_+(x, 0) = a_1^+(s)\, e^{-r_1^+ x} + a_2^+(s)\, e^{-r_2^+ x}$$

та

$$V_+(x, dv) = \left(r_2^+ - r_1^+\right)^{-1}\left(c_1^+ - r_1^+\right)\left(r_2^+ - c_1^+\right)\left(e^{-r_1^+ x} - e^{-r_2^+ x}\right) e^{-c_1^+ v} dv$$

для $v > 0$, що відповідає відомому результату (див., наприклад, [2], (5.290)).

Позначивши $b_{1i}^+(s) = (-1)^{i-1}\left(r_2^+ - r_1^+\right)^{-1}\left(c_1^+ - r_1^+\right)\left(r_2^+ - c_1^+\right)$, $i = 1, 2$, можемо записати це інтегральне перетворення як $V_+(x, dv) = \mathbf{b}_+(x)\, \mathbf{d}_+(dv)$, де

$$\mathbf{b}_+(x) = \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^+(s)\, e^{-r_i^+ x}, \sum_{i=1}^{2} b_{i1}^+(s)\, e^{-r_i^+ x}\right), \qquad \mathbf{d}_+(dv) = \left(\delta(v)\, dv, e^{-c_1^+ v} dv\right)^\top.$$

Тоді, враховуючи позначення

$$\tilde{V}_-(x, u) = \int_0^\infty e^{-uv} V_-(x, dv) \quad \text{та} \quad \tilde{V}_b^-(\mu, u) = \int_b^\infty e^{-\mu(x-b)} V_-(-x, dv),$$

для множників у формулі (9), які визначають інтегральне перетворення спільного розподілу $\{\tau(x, b), \gamma_b(x)\}$, отримуємо

$$\mathbf{m}(x) = \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^+(s)\left(e^{-r_i^+ x} - e^{-r_i^+ b}\tilde{V}_-\left(b - x, r_i^+\right)\right), \sum_{i=1}^{2} b_{i1}^+(s)\left(e^{-r_i^+ x} - e^{-r_i^+ b}\tilde{V}_-\left(b - x, r_i^+\right)\right)\right)$$

та

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{2} a_i^+(s)\, e^{-r_i^+ b}\tilde{V}_-\left(-b, r_i^+\right) & \sum\limits_{i=1}^{2} b_{i1}^+(s)\, e^{-r_i^+ b}\tilde{V}_-\left(-b, r_i^+\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{2} a_i^+(s)\, e^{-r_i^+ b}\tilde{V}_b^-\left(c_1^+, r_i^+\right) & \sum\limits_{i=1}^{2} b_{i1}^+(s)\, e^{-r_i^+ b}\tilde{V}_b^-\left(c_1^+, r_i^+\right) \end{pmatrix}.$$

Розподіл процесу до моменту виходу з інтервалу $(x - b, x)$ можна записати у вигляді

$$H_s\left(b,x,dz\right)=\frac{r_1^+r_2^+}{c_1^+}\sum_{i=1}^{2}a_i^+\left(s\right)\int\limits_{x-b}^{\min\{z,0\}}e^{-r_i^+(z-y)}P_-\left(s,dy\right)dz-$$

$$-\mathbf{m}\left(x\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_+\right)^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{P}_1^-\left(s,x,z\right)dz\\ \tilde{P}_2^-\left(s,x,z\right)dz\end{pmatrix},$$

де

$$\tilde{P}_1^-\left(s,x,z\right)=\frac{r_1^+r_2^+}{c_1^+}\sum_{i=1}^{2}a_i^+\left(s\right)\int\limits_{-b}^{z-x}e^{-r_i^+(z-x-y)}P_-\left(s,dy\right),$$

$$\tilde{P}_2^-\left(s,x,z\right)=\frac{r_1^+r_2^+}{c_1^+}\sum_{i=1}^{2}a_i^+\left(s\right)\left(r_i^+-c_1^+\right)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-x}e^{-c_1^+(z-x-y)}P_-\left(s,dy\right)-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{-b}e^{-c_1^+(-T-y)}P_-\left(s,dy\right)e^{r_i^+(z-x+b)}-\int\limits_{-b}^{z-x}e^{-r_i^+(z-x-y)}P_-\left(s,dy\right)\right).$$

Розглянемо далі випадок $d_+=2$, $\sigma>0$, тоді кумулянтне рівняння має три корені на півплощині $\Re\left[r\right]>0$: $r_1^+\left(s\right)<\Re\left[r_2^+\left(s\right)\right]\leq\Re\left[r_3^+\left(s\right)\right]$ і $\mathbf{q}_+\left(s\right)=\dfrac{r_1^+r_2^+r_3^+}{c_1^+c_2^+}\left(c_1^+c_2^+,c_1^++c_2^+,1\right)$, $\mathbf{e}=\left(0,0,1\right)^\top$ та

$$\mathbf{R}_+\left(s\right)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\r_1^+r_2^+r_3^+&r_1^+r_2^++r_1^+r_3^++r_2^+r_3^+&r_1^++r_2^++r_3^+\end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $c_1^+<c_2^+$ (додатні стрибки мають гіперекспоненціальний розподіл). Тоді

$$P_+\left(s,dy\right)=\frac{r_1^+r_2^+r_3^+}{c_1^+c_2^+}\left(a_1^+\left(s\right)e^{-r_1^+y}+a_2^+\left(s\right)e^{-r_2^+y}+a_3^+\left(s\right)e^{-r_3^+y}\right)dy,$$

де

$$a_1^+\left(s\right)=\frac{\left(c_1^+-r_1^+\right)\left(c_2^+-r_1^+\right)}{\left(r_2^+-r_1^+\right)\left(r_3^+-r_1^+\right)},a_2^+\left(s\right)=\frac{\left(r_2^+-c_1^+\right)\left(c_2^+-r_2^+\right)}{\left(r_2^+-r_1^+\right)\left(r_2^+-r_3^+\right)},a_3^+\left(s\right)=\frac{\left(r_3^+-c_1^+\right)\left(r_3^+-c_2^+\right)}{\left(r_3^+-r_1^+\right)\left(r_3^+-r_2^+\right)}.$$

З формул (5) та (6) маємо

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+},\gamma^+\left(x\right)=0,\tau_x^+<\infty\right]=\sum_{i=1}^{3}a_i^+\left(s\right)e^{-r_i^+x},$$

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x^+},\gamma^+\left(x\right)\in dv,\tau_x^+<\infty\right]=\left(e^{-c_1^+v}\sum_{i=1}^{3}b_{i1}^+\left(s\right)e^{-r_i^+x}+e^{-c_2^+v}\sum_{i=1}^{3}b_{i2}^+\left(s\right)e^{-r_i^+x}\right)dv,\ v>0,$$

$$b_{ij}^+\left(s\right)=\left(-1\right)^{i+j}\frac{\prod_{k\neq i}^{2}\left(c_k^+-r_j^+\right)\prod_{l=1}^{3}\left(c_i^+-r_l^+\right)}{\left(c_2^+-c_1^+\right)\prod_{k\neq j}^{2}\left(r_j^+-r_k^+\right)}.$$

Якщо врахувати, що $\mathbf{b}_+(x) = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^+(s)\, e^{-r_i^+ x}, \sum_{i=1}^3 b_{i1}^+(s)\, e^{-r_i^+ x}, \sum_{i=1}^3 b_{i2}^+(s)\, e^{-r_i^+ x}\right)$ та $\mathbf{d}_+(dv) = \left(\delta(v)\, dv, e^{-c_1^+ v} dv, e^{-c_2^+ v} dv\right)^\top$, то інтегральне перетворення набирає вигляду

$$V_+(x, dv) = \mathbf{b}_+(x)\, \mathbf{d}_+(dv).$$

Якщо $c_1^+ = c_2^+$ (стрибки мають розподіл Ерланга) і $s \neq \inf_{r > c_1^+} k(r)$, то корені $r_{1,2,3}^+$ різні, але можливо, що корені r_2^+, r_3^+ комплексно-спряжені: $r_2^+ = \nu_+ - iw_+$ та $r_3^+ = \nu_+ + iw_+$ (детальніше див. [2], розділ 3.7). Якщо корені дійсні, то формула, отримана вище, для $P_+(s, dy)$ зберігається. Вектори $\mathbf{b}_+(x)$ та $\mathbf{d}_+(dv)$, які визначають функцію $V_+(x, dv)$, мають зображення

$$\mathbf{b}_+(x) = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^+(s)\, e^{-r_i^+ x}, a_1^+(s)\, e^{-r_1^+ x}, a_2^+(s)\, e^{-r_2^+ x}, a_3^+(s)\, e^{-r_3^+ x}\right)$$

та

$$\mathbf{d}_+(dv) = \left(\delta(v)\, dv, (l_1 v + m_1)\, e^{-c_1^+ v} dv, (l_2 v + m_2)\, e^{-c_1^+ v} dv, (l_3 v + m_3)\, e^{-c_1^+ v} dv\right)^\top,$$

де

$$l_i = l_i(s) = \prod_{k \neq i}^3 \left(c_1^+ - r_k^+\right) \quad \text{та} \quad m_i = m_i(s) = \sum_{k \neq i} r_i^+ - 2c_1.$$

У випадку комплексно-спряжених коренів формула для $P_+(s, dy)$ має вигляд

$$P_+(s, dy) = \frac{r_1^+\left(\nu_+^2 + w_+^2\right)}{\left(c_1^+\right)^2} \Bigg(a_1^+(s)\, e^{-r_1^+ y} +$$

$$+ \left(a_2^+(s) + a_3^+(s)\right) \cos(w_+ x)\, e^{-\nu_+ y} + i\left(a_2^+(s) - a_3^+(s)\right) \sin(w_+ y)\, e^{-\nu_+ y} \Bigg) dy,$$

де

$$a_1^+(s) = \left(c_1^+ - r_1^+\right)^2 \left(w_+^2 + \left(r_1^+ - \nu_+\right)^2\right)^{-1},$$

$$a_2^+(s) + a_3^+(s) = \left(w_+^2 - \left(c_1^+ - \nu_+\right)\left(c_1^+ - 2r_1^+ + \nu_+\right)\right)\left(w_+^2 + \left(r_1^+ - \nu_+\right)^2\right)^{-1},$$

$$i\left(a_2^+(s) - a_3^+(s)\right) = -\Bigg(\left(c_1^+\right)^2\left(\nu_+ - r_1^+\right) + r_1^+\left(w_+^2 - \nu_+^2\right) + \nu_+\left(w_+^2 + \nu_+^2\right) -$$

$$-2c_1^+\left(w_+^2 + \nu_+\left(\nu_+ - r_1^+\right)\right)\Bigg)\left(w_+\left(w_+^2 + \left(r_1^+ - \nu_+\right)^2\right)\right)^{-1}.$$

Крім того,

$$\mathbf{b}_+(x) = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^+(s)\, e^{-r_i^+ x}, e^{-r_1^+ x}, e^{-\nu_+ x}\cos(w_+ x), e^{-\nu_+ x}\sin(w_+ x)\right)$$

та

$$\mathbf{d}_+(dv) = \left(\delta(v)\, dv, (n_1 v + k_1)\, e^{-c_1^+ v} dv, (n_2 v + k_2)\, e^{-c_1^+ v} dv, (n_3 v + k_3)\, e^{-c_1^+ v} dv\right)^\top,$$

де $n_i = n_i(s)$, $k_i = k_i(s)$ визначені певними дробовими виразами від c_1^+, r_1^+, ν_+, w_+ (явні формули для n_i, k_i громіздкі, тому ми їх не наводимо).

3. Операторна резольвента. Визначимо однорідний процес Маркова $\eta_t = x - X_t,\ x \in R^1$, $t \geq 0$, тоді операторну резольвенту процесу η_t зі скороченим часом життя до моменту зупинки τ визначено так:

$$\mathsf{R}_s f(x) = \mathsf{E}\int\limits_0^\tau e^{-st} f(\eta_t)\, dt, \ \ s > 0.$$

Нехай A — інфінітезимальний оператор процесу η_t, тоді для довільної функції f з області визначення A маємо [6] (формула (7.15))

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau} f(\eta_\tau)\right] = f(x) + \mathsf{R}_s g(x), \tag{12}$$

де $g(x) = Af(x) - sf(x)$.

Наприклад, якщо X_t — східчастий процес $\left(\sigma = a = 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dx) = \lambda < \infty\right)$, то формула має місце для довільної вимірної обмеженої функції, а $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\Pi(dy) - (s+\lambda)f(x)$. Зокрема, якщо $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -z, \\ 0, & x > -z, \end{cases}$ то

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau}, X_\tau - x \geq z\right] = \mathsf{R}_s g(x) \quad \text{для} \quad x, z > 0,$$

де $g(x) = \int_{x+z}^{\infty} \Pi(dy)$ (детальніше див. [6], § 7).

Позначимо через R_s^0 резольвенту з моментом обриву τ_x^+, а через R_s^b резольвенту з моментом обриву $\tau(x, b)$.

Теорема 4. *Для UME процесу операторні резольвенти мають зображення*

$$\mathsf{R}_s^0 f(x) = \int\limits_0^\infty f(z) \int\limits_{-z}^{\min\{0, x-z\}} s^{-1} \mathbf{q}_+(s) e^{-\mathbf{R}_+(s)(z+y-x)} \mathbf{e} \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^- \in dy\right\} dz, \tag{13}$$

$$\mathsf{R}_s^b f(x) = s^{-1} p_+(s) \int\limits_{x-b}^{x} f(x-z) M_-(dy) +$$

$$+ s^{-1} \mathbf{q}_+(s) \int\limits_{x-b}^{x} f(x-z) \int\limits_{x-b}^{z} e^{-\mathbf{R}_+(s)(z-y)} M_-(dy)\, dz. \tag{14}$$

Доведення. Для $\mathsf{R}_s^0 f(x)$ має місце зображення [6] (теорема 6.1)

$$\mathsf{R}_s^0 f(x) = s^{-1} \int\limits_{-0}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+0} f(x - z - y)\, \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^- \in dy\right\} \mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^+ \in dz\right\}, \qquad s > 0, \quad x > 0.$$

Підставляючи формулу (3), отримуємо (13). Формулу (14) безпосередньо одержуємо з формули (6.11) [6], застосовуючи теорему 3.

Зауважимо, що безпосередньо переходячи до границі у формулах (13), (14) при $s \to 0$ із застосуванням наслідку 2.3 [11], можемо отримати відповідні співвідношення для операторного потенціалу процесу η_t.

Для LME процесу з леми 1 маємо

$$\mathsf{E}e^{rX^-_{\theta_s}} = p_-(s) + \mathbf{q}_-(s)\left(\mathbf{R}_-(s) + r\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{e}, \Re[r] = 0.$$

Функцію $\mathsf{E}e^{rX^-_{\theta_s}}$ можемо аналітично продовжити на значення $\Re[r] < -\Re\left[r^-_{N_-}(s)\right]$ і записати як

$$\mathsf{E}e^{rX^-_{\theta_s}} = p_-(s) - \mathbf{q}_-(s)\int\limits_0^\infty e^{rx}e^{\mathbf{R}_-(s)x}\mathbf{e}dx.$$

Тоді, застосовуючи безмежно подільну факторизацію (див., наприклад, формулу (2.1) [7]), одержуємо

$$\frac{1}{k(r)-s} = -s^{-1}\mathsf{E}e^{rX^-_{\theta_s}}\mathsf{E}e^{rX^+_{\theta_s}} =$$

$$= -s^{-1}\left(p_-(s) - \mathbf{q}_-(s)\int\limits_0^\infty e^{rx}e^{\mathbf{R}_-(s)x}\mathbf{e}dx\right)\int\limits_0^\infty e^{ry}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} \in dy\right\}.$$

Звідси шляхом обернення по r можемо визначити ядро $R_s(x)$ — аналог функції шкали для процесу зі стрибками лише одного знака (див., наприклад, [14])

$$\frac{1}{k(r)-s} = \int\limits_0^\infty e^{rx}R_s(dx), \Re[r] < -\Re\left[r^-_{N_-}(s)\right],$$

як

$$R_s(dx) = s^{-1}\mathbf{q}_-(s)\int\limits_0^x e^{\mathbf{R}_-(s)(x-y)}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} \in dy\right\}\mathbf{e}dx - s^{-1}p_-(s)\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} \in dx\right\}.$$

Позначимо $R(s,x) = s^{-1}\mathbf{q}_-(s)\int_0^x e^{\mathbf{R}_-(s)(x-y)}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} \in dy\right\}\mathbf{e}$, тоді у випадку $(NS)_+$ маємо $p_-(s) = 0$ та $R_s(dx) = R(s,x)dx$. Якщо $\sigma = 0$, $a > 0$, то $p_+(s) = 0$ і $R_s(dx) = \left(R(s,x) - s^{-1}p_-(s)\dfrac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} < x\right\}\right)dx$. Для східчастого процесу X_t, тобто якщо $\sigma = a = 0$, $\lambda = \int_R \Pi(dx) < \infty$, отримуємо

$$R_s(dx) = \left(R(s,x) - s^{-1}p_-(s)\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} < x\right\} - (s+\lambda)^{-1}\delta(x)\right)dx.$$

Це співвідношення є узагальненням формули (5.180) [2], отриманої для майже напівнеперервного знизу процесу, з урахуванням того, що $R(s,x) = q_-(s)R^0_s(x)$ та $\dfrac{1}{c^-_1}\dfrac{\partial}{\partial x}R^0_s(x) = s^{-1}p_-(s)\dfrac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}\left\{X^+_{\theta_s} < x\right\} + p_-(s)R^0_s(x)$.

За допомогою ядра $R_s(dx)$ операторну резольвенту для LME процесу можна записати у вигляді

$$\mathsf{R}_s^0 f(x) = s^{-1}\mathbf{q}_-(s)\int_0^\infty f(y)\, e^{-\mathbf{R}_-(s)y}dy\int_0^x e^{\mathbf{R}_-(s)(x-y)}\mathsf{P}\left\{X_{\theta_s}^+ \in dz\right\}\mathbf{e}-$$

$$-\int_0^x f(x-z)\, R_s(dz)\,.$$

Зауважимо, що для того, щоб отримати повністю визначені вирази для операторної резольвенти UME процесів, необхідно знайти розподіл мінімуму процесу, зупиненого в момент θ_s. Для цього можна застосувати тотожність безмежно подільної факторизації. Для DME процесів можемо використати той факт, що $X_{\theta_s}^-$ має ME розподіл.

Крім того, для достатньо великих d_+ визначення точних значень для резольвенти істотно залежить від точності знайдених коренів кумулянтного рівняння. Це пов'язано з певними труднощами, які можуть виникнути під час обчислення матричних експонент (див. [1], A3).

Література

1. *Assmussen S.*, *Albrecher H.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2010. – 602 p.
2. *Gusak D.* Boundary functionals for Lévy processes and their applications. – Lambert Acad. Publ., 2014. – 412 p.
3. *Cont R., Tankov P.* Financial modeling with jump processes. – New York: Chapman & Hall/CRC, 2004. – 528 p.
4. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
5. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
6. *Братийчук Н. С.*, *Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
7. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 544 с.
8. *Bertoin J.* Lévy processes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 265 p.
9. *Каданков В. Ф.*, *Каданкова Т. В.* О распределении момента выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1359 – 1384.
10. *Lewis A. L.*, *Mordecki E.* Wiener – Hopf factorization for Lévy processes having negative jumps with rational transforms // J. Appl. Probab. – 2008. – **45**, № 1. – P. 118 – 134.
11. *Karnaukh Ie.* Distribution of some functionals for a Lévy process with matrix-exponential jumps of one sign // Theory Stochast. Process. – 2014. – **19(35)**, № 1. – P. 26 – 36.
12. *Kuznetsov A.*, *Kyprianou A. E.*, *Pardo J. C.* Meromorphic Levy processes and their fluctuation identities // Ann. Appl. Probab. – 2012. – **22**, № 3. – P. 1101 – 1135.
13. *Fourati S.* Explicit solutions of the exit problem for a class of Lévy processes; applications to the pricing of double-barrier options // Stochast. Process. and Appl. – 2012. – **122**, № 3. – P. 1034 – 1067.
14. *Renaud J.-F., Guerin H.* Joint distribution of a spectrally negative Levy process and its occupation time, with step option pricing in view // Adv. Appl. Probab. – 2016. – **48**, № 1. – P. 274 – 297.

Одержано 27.05.15,
після доопрацювання — 25.09.16