УДК 517.9

О. Б. Чернобай (Нац. ун-т ДПС України, Ірпінь)

УЗАГАЛЬНЕНІ ЯДРА ТИПУ ТЕПЛІЦА ДЛЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ

We prove an integral representation for the generalized kernels of the Toeplitz type connected with exponentially convex functions but not with positive-definite functions.

Получено интегральное представление обобщенных ядер типа Теплица, связанных не с положительно определенными функциями, а с экспоненциально выпуклыми функциями.

Вступ. У циклі робіт [1 – 8] було запропоновано корисне узагальнення класичної теореми Бохнера – Крейна про експоненціальне зображення додатно визначеної функції на інтервалі $I = (-l, l)$, $0 < l \leq \infty$. Воно полягає в наступному. Неперервна додатно визначена функція $k(x)$ на інтервалі I допускає зображення Бохнера – Крейна (див., наприклад, [9])

$$k(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} d\sigma(\lambda), \quad t \in I, \tag{1}$$

де $d\sigma(\lambda)$ — борелівська скінченна міра. Додатна визначеність функції $k(t)$ означає додатну визначеність ядра $K(x, y) = k(x - y)$, тобто нерівність

$$\iint_{I \times I} K(x, y) f(y) \overline{f(x)} dx dy \geq 0 \tag{2}$$

для довільних комплекснозначних функцій $C^\infty_{\text{fin}}(I)$. Узагальнення полягало в тому, що замість функції $k(t)$ розглядалось додатно визначене ядро вигляду (ядро Тепліца)

$$I \times I \ni \langle x, y \rangle \mapsto K(x, y) = k_{\alpha\beta}(x - y), \quad x \in I_\alpha, \quad y \in I_\beta,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad I_1 = [0, l), \quad I_2 = (-l, 0),$$

де $k_{\alpha\beta}(t)$– чотири неперервні функції на своїх областях визначення. Замість зображення (1) виникало чотири зображення для функцій $k_{\alpha\beta}(t)$ з матричнозначною мірою $d\sigma(\lambda)$, які можна записати таким чином:

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda(x-y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \mathbf{1}_\alpha(x) \mathbf{1}_\beta(y) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad \langle x, y \rangle \in I \times I, \tag{3}$$

де $\mathbf{1}_1(t)$, $\mathbf{1}_2(t)$ — характеристичні функції інтервалів $I_1 = [0, l)$ та $I_2 = (-l, 0)$.

Операторний метод доведення результатів робіт [1 – 8] було запропоновано у роботі [10]. Він, зокрема, дозволив вияснити умови єдиності матричнозначної міри $d\sigma(\lambda)$ в зображенні (3) (відомо, що міра $d\sigma(\lambda)$ в зображенні (1) у випадку $l < \infty$ визначається неоднозначно). Цей операторний метод також дозволив перенести зображення (3) на операторнозначні ядра $K(x, y)$ [11].

У цій роботі запропоновано доведення результатів типу (3), пов'язаних не з додатно визначеними функціями, а з експоненціально опуклими функціями. Для них також побудовано відповідні ядра типу Тепліца і одержано зображення вигляду (3). Матричнозначна міра $d\sigma(\lambda)$ в такому зображенні уже буде визначатись однозначно при довільному $0 < l \leq \infty$.

Нагадаємо, що експоненціально опуклі функції $k(t)$ були введені С. Н. Бернштейном у [12]. Вони відрізняються тим, що повинно бути додатно визначене ядро $K(x, y) = k(x + y)$, $x, y \in \in (-l, l,)$ $0 < l \leq \infty$, а не $k(x - y)$. Їхнє зображення типу (1) буде таким:

$$k(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\sigma(\lambda), \quad t \in (-l, l),$$

міра $d\sigma(\lambda)$ завжди визначається однозначно (див., наприклад, [9, 13]). Відповідне ядро типу Тепліца визначається як додатно визначене ядро вигляду $K(x, y) = k(x + y)$, $x, y \in (0, l)$, $0 < l \leq +\infty$, тобто задовольняє умову (2). Для нього буде отримано зображення типу (3) з єдиною матричнозначною мірою $d\sigma(\lambda)$.

Зауважимо, що експоненціально опуклі функції, як правило, розглядаються в довільному інтервалі (l', l''), $-\infty \leq l' < l'' \leq \infty$, який завжди можна перетворити за допомогою зсуву на скінченний або нескінченний інтервал типу $(-l, l)$.

Насамкінець наведено відповідні результати, пов'язані з класичною проблемою моментів.

Перейдемо до детального викладу.

1. Формулювання результатів. Нехай I — інтервал вигляду $I = (-l, l)$, де $0 < l \leq \infty$, $I_1 = [0, l)$, $I_2 = (-l, 0)$. Для довільних $\alpha, \beta = 1, 2$ позначимо

$$I_{\alpha\beta} = \{t = x + y | x \in I_\alpha, y \in I_\beta\},$$

тобто $I_{11} = [0, 2l)$, $I_{12} = (-l, l)$, $I_{21} = (-l, l)$, $I_{22} = (-2l, 0)$, що є суттєвою відмінністю від задачі, розглянутої у роботі [10].

Розглянемо обмежене додатно визначене ядро

$$I \times I \ni \langle x, y \rangle \mapsto K(x, y) \in \mathbb{C}^1.$$

Ядру K поставимо у відповідність такі чотири функції $I_{\alpha\beta} \ni t \mapsto k_{\alpha\beta}(t) \in \mathbb{C}^1$, що

$$K(x, y) = k_{\alpha\beta}(x + y), \quad \langle x, y \rangle \in I_\alpha \times I_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{4}$$

Всі функції $k_{\alpha\beta}$ будемо вважати неперервними в їх областях визначення.

Кожне додатно визначене ядро ермітове, тобто $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $\langle x, y \rangle \in I \times I$, тому із зображення (4) одержимо

$$k_{\alpha\alpha}(t) = \overline{k_{\alpha\alpha}(t)}, \quad t \in I_{\alpha\alpha}, \alpha = 1, 2,$$

$$k_{12}(t) = \overline{k_{21}(t)}, \quad t \in I_{12}.$$

Для кожного $\alpha, \beta = 1, 2$ звуження $K \upharpoonright (I_\alpha \times I_\beta)$ є неперервною функцією $k_{\alpha\beta}(x + y)$, тому функція K неперервна на $(I \times I) \setminus (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$ і обмежена на $I \times I$ за означенням. Обмеженість K приводить до обмеженості кожної функції $k_{\alpha\beta}$ на $I_{\alpha\beta}$.

Теорема. *Для кожного ядра типу* (4) *має місце інтегральне зображення*

$$K(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(x+y)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\mathbf{1}_\alpha(x)\mathbf{1}_\beta(y)d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda),\quad \langle x,y\rangle\in I\times I. \tag{5}$$

Тут $\mathbf{1}_\alpha$ — *характеристична функція інтервалу* $I_\alpha, \alpha=1,2,$ *і* $d\sigma(\lambda)=(d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda))_{\alpha,\beta=1}^2$ — *скінченна невід'ємна матрична борелівська міра на* $\mathbb{R}^1$ ($d\sigma_{11}(\lambda)$ *і* $d\sigma_{22}(\lambda)$ *є невід'ємними скінченними мірами,* $d\sigma_{12}(\lambda)=\overline{d\sigma_{21}(\lambda)}$ *має скінченну варіацію на* $\mathbb{R}^1$).

Навпаки, кожне ядро вигляду (5) *із скінченною невід'ємною матричнозначною мірою* $d\sigma(\lambda)$ *є узагальненим ядром.*

Міра $d\sigma(\lambda)$ *в зображенні* (5) *визначається однозначно.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з роботи [10]. Наведемо основні моменти цього доведення і ті зміни, які необхідно внести.

1. Побудуємо спочатку гільбертовий простір H_K, в якому діятиме оператор, та квазіядерне оснащення цього простору:

$$H_{K,-}\supset H_K\supset H_{K,+}\supset D, \tag{6}$$

вкладення $D\hookrightarrow H_{K,+}$ є неперервним.

Позначимо через $\mathbf{1}_{\alpha\beta}(x,y)$ характеристичну функцію множини $I_\alpha\times I_\beta$ і побудуємо ядро

$$K_{\alpha\beta}(x,y)=\mathbf{1}_{\alpha\beta}(x,y)K(x,y),\quad \langle x,y\rangle\in I\times I,\quad \alpha,\beta=1,2.$$

На основі рівності (4) можемо записати

$$K(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}K_{\alpha\beta}(x,y)=\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\mathbf{1}_{\alpha\beta}(x,y)k_{\alpha\beta}(x+y),\quad \langle x,y\rangle\in I\times I. \tag{7}$$

Введемо квазіскалярний добуток у просторі H_K таким чином:

$$(f,g)_{H_K}=\iint\limits_{I\times I}K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\iint\limits_{I_\alpha\times I_\beta}k_{\alpha\beta}(x+y)f(y)\overline{g(x)}dxdy,\quad f,g\in L^2, \tag{8}$$

де $L^2=L^2(I,dx)$ — гільбертовий простір L_2, побудований за мірою Лебега dx на I. Ядро $K(x,y)$ обмежене, тому інтеграл (8) існує. Другу рівність у (8) записано на основі (7). Ядро $K(x,y)$ додатно визначене, тому (8) буде квазіскалярним добутком.

Позначимо через $C_0^\infty(I)$ множину всіх функцій з $C^\infty(I)$, фінітних в околах $-l,0,l$ та нескінченно диференційовних; на $C_0^\infty(I)$ введемо стандартним чином топологію зліченно-нормованого простору. На таких фінітних функціях визначимо оператор

$$\mathrm{Dom}\,(A')=C_0^\infty(I)\ni u\mapsto A'u=\frac{d}{dx}u:=(\mathcal{L}u)(x). \tag{9}$$

Лема. *Оператор A' ермітів відносно квазіскалярного добутку* (8), *тобто*

$$(A'u, v)_{H_K} = (u, A'v)_{H_K}, \quad u, v \in C_0^\infty(I). \tag{10}$$

Доведення. Використовуючи (8), одержуємо

$$(A'u, v)_{H_K} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint\limits_{I_\alpha \times I_\beta} k_{\alpha\beta}(x+y)u'(y)\overline{v(x)}dxdy, \quad u, v \in C_0^\infty(I). \tag{11}$$

Зафіксуємо α, β і функції $u, v \in C_0^\infty(I)$ та розглянемо інтеграл

$$\iint\limits_{I_\alpha \times I_\beta} k_{\alpha\beta}(x+y)u'(y)\overline{v(x)}dxdy. \tag{12}$$

Функцію $K_{\alpha\beta}(x, y)$ з $I_{\alpha\beta}$ продовжимо довільним чином на всю площину $\mathbb{R}^2$ в обмежену функцію і продовжимо функції $u(y)$ та $v(x)$ рівними нулю для $y \in \mathbb{R}^1 \setminus I_\beta$, $x \in \mathbb{R}^1 \setminus I_\alpha$. Оскільки всі функції з $C_0^\infty(I)$ анулюються в околах $-l, 0, l$, то продовжені функції u, v будуть фінітними відносно I.

Використавши формулу інтегрування частинами, запишемо інтеграл (12) таким чином:

$$\iint\limits_{I_\alpha \times I_\beta} k_{\alpha\beta}(x+y)u'(y)\overline{v(x)}dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} k_{\alpha\beta}(x+y)u'(y)\overline{v(x)}dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} k_{\alpha\beta}(t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} u'(t-x)\overline{v(x)}dx \right) dt = \int\limits_{\mathbb{R}^1} k_{\alpha\beta}(t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} u(t-x)\overline{v'(x)}dx \right) dt =$$

$$= \iint\limits_{I_\alpha \times I_\beta} k_{\alpha\beta}(x+y)u(y)\overline{v'(x)}dxdy. \tag{13}$$

Рівності (13) застосуємо до кожного доданка в (11) і в результаті отримаємо (10).

Лему доведено.

2. Для простоти будемо вважати, що ядро K невироджене, тобто вираз (8) задає не квазіскалярний, а скалярний добуток. Як будувати простір H_K і його квазіядерне оснащення (6) у загальному випадку виродженого ядра вказано в загальній схемі, викладеній у [14, с. 5] (§ 5, п. 5.2) (див. також [9, с. 8], § 1). Цю схему було застосовано і в статті [10].

Таким чином, співвідношення (10) вказує, що оператор A' ермітів у гільбертовому просторі H_K. В цьому просторі діє класична інволюція $L^2 \ni f(x) \mapsto \overline{f(x)} \in L^2$ і оператор A' (9) дійсний відносно цієї інволюції, тому його дефектні числа рівні і він має самоспряжене розширення в цьому гільбертовому просторі H_K. Позначимо через A деяке його самоспряжене розширення.

Розглянемо спочатку випадок скінченного інтервалу $I = (-l, l)$, $l < \infty$. Позначимо через $W_{2,0}^1(I)$ підпростір соболєвського простору $W_2^1(I)$, що складається з функцій $u \in W_2^1(I)$, для яких $u(0) = 0$. Цей простір можна взяти в якості простору $H_{K,+}$ у ланцюжку (6), оскільки вкладення $H_{K,+} = W_{2,0}^1(I) \subset H_K$ буде квазіядерним (бо вкладення $W_{2,0}^1(I) \subset L^2$ квазіядерне, а $L^2 \subset H_K$ неперервне завдяки обмеженості ядра $K(x, y)$).

Таким чином, ми маємо основний ланцюжок (6) вигляду

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+} = W^1_{2,0}(I) \supset D = C_0^\infty(I),$$

де вкладення $H_{K,+} \hookrightarrow H_K$ квазіядерне, а $D \hookrightarrow H_{K,+}$ щільне і неперервне. Звуження оператора A на D (тобто A') діє неперервно з $D = C_0^\infty(I)$ в $H_{K,+}$.

3. Ми будемо, як і в статті [10], використовувати частинний випадок загальної теореми з [14, с. 5] (§ 5, теорема 5.1). Так, введемо квазіядерний ланцюжок

$$H_- := W^{-1}_{2,0}(I) \supset L^2 \supset W^1_{2,0}(I) =: H_+. \tag{14}$$

Тоді в цьому частинному випадку справджується таке твердження (див. також [10], твердження 3.1).

Твердження. *Для ядра K має місце зображення*

$$K = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Omega(\lambda) d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Тут $\Omega(\lambda) \in H_- \otimes H_-$ — елементарне додатно визначене ядро, норма $\|\Omega(\lambda)\|_{H_- \otimes H_-}$ обмежена по $\lambda \in \mathbb{R}^1$, міра $d\rho(\lambda)$ борелівська і скінченна. Інтеграл (15) *збігається за нормою простору $H_- \otimes H_-$.*

Додатна визначеність ядра $\Omega(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, означає, що для будь-яких $u \in H_+$ має місце нерівність

$$(\Omega(\lambda), u \otimes \overline{u})_{L^2 \otimes L^2} \geq 0.$$

Елементарний характер ядра $\Omega(\lambda)$ полягає у виконанні рівності

$$(\Omega(\lambda), v \otimes (\overline{A'u}))_{L^2 \otimes L^2} = (\Omega(\lambda), (A'v) \otimes \overline{u})_{L^2 \otimes L^2} = \lambda(\Omega(\lambda), v \otimes \overline{u}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad u, v \in C_0^\infty(I).$$

4. Доведення теореми базується на застосуванні тверження та класичного факту про нескінченну диференційовність узагальненого розв'язку рівняння $\dfrac{d\xi}{dx} = \lambda \xi$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, на довільному інтервалі $G \subset \mathbb{R}^1$, тобто на формулі $\xi(x) = ce^{\lambda x}$, $x \in \widetilde{G}$, c — деяка стала, а $\widetilde{G}$ — замикання G.

Позначимо через $H_{\alpha,+}$ підпростір простору $H_+ = W^1_{2,0}(I)$, що складається з функцій простору H_+, які дорівнюють нулю на $I \setminus I_\alpha$, і нехай

$$H_{\alpha\beta,+} =: H_{\alpha,+} \otimes H_{\beta,+} \subset H_+ \otimes H_+, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Зауважимо, що для $u \in H_+$ функція $u(x)\mathbf{1}_\alpha(x) \in H_{\alpha,+}$.

Нехай

$$H_{\alpha,-} \supset L^2(I_\alpha) \supset H_{\alpha,+}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{16}$$

— відповідне оснащення простору $L^2(I_\alpha)$.

Зафіксуємо $\lambda \in \mathbb{R}^1$ і позначимо через $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ звуження узагальненої функції $\Omega(\lambda) \in H_- \otimes \otimes H_-$ на простір $H_{\alpha\beta,+}, \alpha, \beta = 1, 2$. Очевидно,

$$(\Omega(\lambda), v \otimes \overline{u})_{L^2 \otimes L^2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (\Omega_{\alpha\beta}(\lambda), \mathbf{1}_\alpha(x) v(x) \mathbf{1}_\beta(y) \overline{u(y)})_{L^2(I_\alpha) \otimes L^2(I_\beta)}, \quad u, v \in H_+. \tag{17}$$

Знайдемо певне зображення для $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ (α, β і λ фіксовані). Розглянемо білінійну форму a:

$$H_{\beta,+} \oplus H_{\alpha,+} \ni \langle u_\beta, v_\alpha \rangle \mapsto a(u_\beta, v_\alpha) := (\Omega_{\alpha\beta}(\lambda), v_\alpha \otimes \overline{u_\beta})_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)}. \tag{18}$$

Вона є неперервною. Насправді, функція $\|\Omega(\lambda)\|_{H_-\otimes H_-}$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, обмежена, тому

$$|a(u_\beta, v_\alpha)| = |(\Omega(\lambda), v_\alpha \otimes \overline{u_\beta})_{L^2\otimes L^2}| \leq$$

$$\leq \|\Omega(\lambda)\|_{H_-\otimes H_-} \|v_\alpha \otimes \overline{u_\beta}\|_{H_+\otimes H_+} \leq c\|u_\beta\|_{H_{\beta,+}} \|v_\alpha\|_{H_{\alpha,+}}.$$

Використовуючи ланцюжок (16), можемо, завдяки неперервності форми (18), стверджувати, що існують неперервні оператори $R\colon H_{\beta,+} \longrightarrow H_{\alpha,-}$ і $S : H_{\alpha,+} \longrightarrow H_{\beta,-}$ і має місце рівність

$$(\Omega_{\alpha,\beta}(\lambda), v_\alpha \otimes \overline{u}_\beta)_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)} = (Ru_\beta, v_\alpha)_{L^2(I_\alpha)} = (u_\beta, Sv_\alpha)_{L^2(I_\beta)},$$
$$u_\beta \in H_{\beta,+}, \quad v_\alpha \in H_{\alpha,+}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{19}$$

Оскільки Ru_β є узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}\xi = \lambda\xi$ всередині інтервалу I_α, маємо

$$(Ru_\beta)(x) = c_1(u_\beta)e^{\lambda x}, \quad x \in \widetilde{I}_\alpha, \quad u_\beta \in H_{\beta,+}, \tag{20}$$

де стала $c = c_1(u_\beta)$ залежить від u_β.

З лінійності і неперервності R випливає, що функціонал $H_{\beta,+} \ni u_\beta \to c_1(u_\beta) \in \mathbb{C}^1$ є лінійним і неперервним.

Аналогічно отримаємо зображення

$$(Sv_\alpha)(y) = c_2(v_\alpha)e^{\lambda y}, \quad y \in \widetilde{I}_\beta, \quad v_\alpha \in H_{\alpha,+}. \tag{21}$$

Співвідношення (19) дає можливість записати

$$c_1(u_\beta)\int_{I_\alpha} e^{\lambda x}\overline{v_\alpha(x)}dx = \overline{c_2(v_\alpha)}\int_{I_\beta} u_\beta(y)e^{\lambda y}dy, \quad u_\beta \in H_{\beta,+}, \quad v_\alpha \in H_{\alpha,+}. \tag{22}$$

Разом з тим із рівності (22) видно, що з деякою сталою $\tau \in \mathbb{C}^1$

$$c_1(u_\beta) = \tau\int_{I_\beta} u_\beta(y)e^{\lambda y}dy, \quad u_\beta \in H_{\beta,+}. \tag{23}$$

Використовуючи (19) – (23), одержуємо

$$(\Omega_{\alpha\beta}(\lambda), v_\alpha \otimes \overline{u_\beta})_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)} = \tau\iint_{I_\alpha\times I_\beta} e^{\lambda(x+y)}\overline{v_\alpha(x)}u_\beta(y)dxdy,$$

$$u_\beta \in H_{\beta,+}, \quad v_\alpha \in H_{\alpha,+}.$$

Ця рівність означає, що $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ є гладкою функцією $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda; x, y)$ і

$$\Omega_{\alpha\beta}(\lambda; x, y) = \tau_{\alpha\beta}(\lambda)e^{\lambda(x+y)}, \quad x \in \widetilde{I}_\alpha, \quad y \in \widetilde{I}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{24}$$

(стала τ залежить від λ, α, β).

Нехай $u, v \in H_+ = W^1_{2,0}(I)$. Тоді завдяки рівностям (17), (24) можна записати

$$(\Omega(\lambda), v \otimes \overline{u})_{L^2 \otimes L^2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \iint\limits_{I_\alpha \times I_\beta} e^{\lambda(x+y)} \overline{v(x)} u(y) dx dy =$$

$$= \iint\limits_{I \times I} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{\lambda(x+y)} \mathbf{1}_\alpha(x) \mathbf{1}_\beta(y) \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \right) \overline{v(x)} u(y) dx dy. \tag{25}$$

Оскільки функції $u, v \in W^1_{2,0}(I)$ в рівності (25) є довільними, то ядро $\Omega(\lambda)$ є звичайним ядром $\Omega(\lambda; x, y)$ і можна записати зображення

$$\Omega(\lambda; x, y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{\lambda(x+y)} \mathbf{1}_\alpha(x) \mathbf{1}_\beta(y) \tau_{\alpha\beta}(\lambda), \quad x, y \in I. \tag{26}$$

Зауважимо, що матриця $\tau(\lambda) = (\tau_{\alpha\beta}(\lambda))^2_{\alpha,\beta=1}$ невід'ємно визначена для будь-яких $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Так, із співвідношення (25) ми можемо зробити висновок, що

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \tau_{\alpha\beta}(\lambda) c_\alpha \overline{c_\beta} = (\Omega(\lambda), \overline{v} \otimes u)_{L^2 \otimes L^2} \geq 0,$$

$$c_\alpha = \int\limits_{I_\alpha} e^{\lambda x} u(x) dx, \quad u \in H_+, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Дана нерівність показує, що матриця $\tau(\lambda)$ є невід'ємно визначеною, оскільки числа c_α довільні.

Із невід'ємності $\tau(\lambda)$ випливають наступні нерівності:

$$\tau_{11}(\lambda) \geq 0, \quad \tau_{22}(\lambda) \geq 0, \quad |\tau_{12}(\lambda)|^2 \leq \tau_{11}(\lambda)\tau_{22}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1. \tag{27}$$

Використовуючи міру ρ з твердження, отримаємо матричновизначену невід'ємну борелівську міру $d\sigma(\lambda)$ на $\mathbb{R}^1$:

$$d\sigma(\lambda) = \tau(\lambda) d\rho(\lambda) := (\tau_{\alpha\beta}(\lambda) d\rho(\lambda))^2_{\alpha,\beta=1} = (d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda))^2_{\alpha,\beta=1}. \tag{28}$$

Після підстановки (26) у зображення (15) одержимо формулу (5).

Перейдемо до дослідження збіжності інтегралів у (9). У відповідності з (27), (28) міри $d\sigma_{11}(\lambda)$, $d\sigma_{22}(\lambda)$ невід'ємні. Нехай $t \in [0, 2l)$ є довільним, покладемо в (5) $x = y = t$, тоді інтеграл $\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\sigma_{11}(\lambda) = K(t, t) < \infty$ збігається. Аналогічно переконуємось у збіжності інтеграла $\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\sigma_{22}(\lambda)$ при довільному $t \in (-2l, 0]$ (при $t = 0$ він збігається завдяки обмеженості ядра K). Збіжність інтегралів із мірами $d\sigma_{12}(\lambda)$ і $d\sigma_{21}(\lambda)$ гарантовано оцінкою (27).

Отже, ці властивості міри $d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$ викликають абсолютну збіжність чотирьох інтегралів у (5) та їх неперервність відносно $\langle x, y \rangle \in I \times I$.

Таким чином, ми довели зображення (5).

5. Доведемо обернене твердження: кожен інтеграл (5) має вигляд (4) з неперервними функціями $k_{\alpha\beta}(t)$ і є обмеженим додатно визначеним ядром, тому що для довільних $f \in C^{\infty}_{\mathrm{fin}}(I)$

$$\iint\limits_{I\times I} K(x,y) f(y)\overline{f(x)}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{I\times I} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(x+y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \mathbf{1}_{\alpha}(x)\mathbf{1}_{\beta}(y) d\sigma_{\alpha\beta(\lambda)} \right) f(y)\overline{f(x)}dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \overline{\int\limits_{I_\alpha} e^{\lambda x} f(x)dx} \int\limits_{I_\beta} e^{\lambda y} f(y)dy \right) d\rho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left| \int\limits_{I} e^{\lambda x} f(x)dx \right|^2 d\rho(\lambda) \geq 0.$$

6. Розглянемо випадок $l = \infty$. Тоді замість ланцюжка (14) потрібно побудувати деякий новий ланцюжок (див. [14, с. 5], § 5, п. 5.1, а також [9, с. 8], § 1). Так, нехай $\mathbb{R}^1 \ni p(x) \geq 1$ — нескінченно диференційовна вага, для якої $p^{-1}(x)$ є інтегровною на $\mathbb{R}^1$ відносно міри Лебега dx. У відповідності зі згаданими працями ми можемо побудувати ланцюжок

$$G_- \supset G_0 \supset G_+, \quad G_0 = L^2(\mathbb{R}^1, dx), \qquad G_+ = L^2(\mathbb{R}^1, p(x)dx).$$

Узагальнене ядро даного типу, як і раніше, обмежене, тому $K \in G_- \otimes G_-$, і ми можемо побудувати замість (8) квазіскалярний добуток

$$(f,g)_{H_K} = \iint\limits_{\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1} K(x,y) f(y)\overline{g(x)}dxdy, \quad f,g \in G_+, \tag{29}$$

що породжує гільбертів простір H_K.

Роль ланцюжка (14) зараз відіграє наступний ланцюжок з нульовим простором $H_0 = G_0$:

$$H_- \supset H_0 \supset H_+. \tag{30}$$

Тут $H_+ = W^1_{2,0}(\mathbb{R}^1, q(x)dx)$ — підпростір, який складається з функцій простору $W^1_2(\mathbb{R}^1, q(x)dx)$, що дорівнюють нулю в точці $x = 0$; $q(x) \geq p(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, — нескінченно диференційовна вага, для якої існує така стала $C > 0$, що

$$\left|q'(x)\right| \leq Cq(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \text{і} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx < \infty.$$

У відповідності з [9, с. 1] (§ 3, теорема 3.6) можна стверджувати, що вкладення $W^1_2(\mathbb{R}^1, q(x)dx) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^1, p(x)dx)$ квазіядерне (див. також [15]). Отже, вкладення $H_+ \hookrightarrow G_+$ також є квазіядерним.

Введемо простір $H_{K,+}$, як простір функцій $u \in H_+$ зі скалярним добутком (29), і сконструюємо ланцюжок

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+}. \tag{31}$$

Вкладення простору $H_{K,+} \hookrightarrow H_K$ зараз також є квазіядерним, і ми можемо взяти це оснащення замість (6).

Після такої заміни доведення теореми зберігається у випадку $l = \infty$, але необхідно використовувати ланцюжки (30) та (31) замість ланцюжка (14).

7. Доведемо єдиність міри $d\sigma(\lambda)$ в зображенні (5). Це зображення еквівалентне чотирьом формулам при різних $\alpha, \beta = 1, 2:$

$$K(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(x+y)} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad \text{де} \quad \alpha = \beta = 1, \quad x, y \in [0, l), \tag{32}$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad x \in [0, l), \quad y \in (-l, 0),$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in [0, l),$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad x, y \in (-l, 0).$$

Розглянемо випадок $\alpha = \beta = 1$. Функція

$$F(t + is) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(t+is)} d\sigma_{11}(\lambda) \tag{33}$$

буде аналітичною функцією змінної $z = t + is$ при $t \in (0, 2l)$ і $s \in \mathbb{R}^1$, оскільки в (33) множник $e^{i\lambda s}$ по модулю дорівнює 1. Тобто функція (33) аналітична у смузі $t \in (0, 2l)$, $s \in \mathbb{R}^1$, і однозначно залежить від своїх значень на осі $\varepsilon + is$, $s \in \mathbb{R}^1$, де $\varepsilon \in (0, 2l)$ є фіксованим. Але

$$F(\varepsilon + is) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda s} e^{\lambda\varepsilon} d\sigma_{11}(\lambda), \quad s \in \mathbb{R}^1,$$

— перетворення Фур'є–Стільтьєса невід'ємної міри $e^{\lambda\varepsilon} d\sigma_{11}(\lambda)$, і ця міра однозначно відновлюється по ньому. Тим самим однозначно відновлюється і $d\sigma_{11}(\lambda)$.

У випадку $\alpha = 1$, $\beta = 2$ замість (33) маємо функцію

$$F(t + is) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(t+is)} d\sigma_{12}(\lambda),$$

яка буде аналітичною при $t \in (-l, l) \setminus \{0\}$ і $s \in \mathbb{R}^1$. Візьмемо знову вісь $\varepsilon + is$ із фіксованим $\varepsilon \in (0, l)$. Функція $F(\varepsilon + is)$ буде перетворенням Фур'є–Стільтьєса вже комплексної міри $e^{\lambda\varepsilon} d\sigma_{12}(\lambda)$, але і ця міра, а отже, і міра $d\sigma_{12}(\lambda)$ відновлюються по перетворенню Фур'є–Стільтьєса.

Аналогічно розглядаються і випадки $\alpha = 2$, $\beta = 1$ і $\alpha = \beta = 2$. Відновлення не обов'язково додатної міри по її перетворенню Фур'є–Стільтьєса див., наприклад, у [16, c. 16] (п. 4).

Таким чином, теорему доведено.

Зауважимо, що єдиність міри $d\sigma(\lambda)$ в зображенні (5) означає, що оператор A, який фігурував у п. 2 доведення, насправді буде єдиним самоспряженим розширенням оператора A', бо інші розширення цього оператора будуть давати інші міри $d\sigma(\lambda)$. Тим самим можна стверджувати, що оператор A' істотно самоспряжений у просторі H_K.

2. Зв'язок з проблемою моментів. Відомо, що додатно визначені функції тісно пов'язані з класичною проблемою моментів (див., наприклад, [9, 13, 14]). Виявляється, що доведена теорема пов'язана з так званою сильною проблемою моментів, коли йдеться про зображення послідовності дійсних чисел $s_j,\ j \in \mathbb{Z}\colon \{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$, у вигляді інтегралів

$$s_j = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda^j d\sigma(\lambda), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{34}$$

де $d\sigma(\lambda)$ — деяка невід'ємна борелівська міра на осі $\mathbb{R}^1$ (див. [17] і наведену там бібліографію).

Необхідною і достатньою умовою зображення (34) є додатна визначеність дискретного ядра $K_{j,k} = s_{j+k},\ j,k \in \mathbb{Z}$, тобто виконання нерівностей

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} K_{j,k} f_k \overline{f_j} = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} s_{j+k} f_k \overline{f_j} \geq 0$$

для довільної фінітної послідовності $f = (f_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ комплексних чисел.

Зображення (34) пов'язане з доведеною теоремою при $l = +\infty$. А саме, візьмемо її в формі виконання рівностей (32).Тоді мова буде йти про справедливість таких чотирьох зображень додатно визначеного дискретного ядра $K_{j,k},\ j,k \in \mathbb{Z}\colon$

$$K_{j,k} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda^{j+k} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad \text{де} \quad \alpha = \beta = 1, \quad j,k \in \mathbb{Z}_+ := \{0,1,\ldots\}, \tag{35}$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_- := \{\ldots,-2,-1\},$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad j \in \mathbb{Z}_-, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha = \beta = 2, \quad j,k \in \mathbb{Z}_-.$$

Тут двовимірна матрична міра $d\sigma(\lambda) = (d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda))_{\alpha,\beta=1}^2$ повинна бути невід'ємною.

Можна показати, що в цьому випадку має місце аналог доведеної теореми із зображенням (35) замість (5), (34).

Література

1. *Cotlar M., Sadosky C.* On the Helson – Szegö theorem and related class of modified Toeplitz kernels // Proc. Symp. Pure Math. – 1979. – **35**, Pt I. – P. 383 – 407.
2. *Cotlar M., Sadosky C.* Prolongements des formes de Hankel generalisees en formes de Toeplitz // C. r. Acad. sci. Paris. – 1987. – P. 167 – 170.
3. *Arocena R.* Generalized Toeplitz kernels and dilations of intertwining operators // Integr. Equat. Operator Theory. – 1983. – **6**. – P. 759 – 778.
4. *Arocena R.* Generalized Toeplitz kernels and dilations of intertwin ing operators II: the continuons case // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1989. – **53**. – P. 123 – 137.
5. *Arocena R., Cotlar M.* Dilation of generalized Toeplitz kernels and some vectorial moment and weighted problems // Lect. Notes Math. – 1982. – **908**. – P. 169 – 188.

6. *Bruzual R.* Local semigroups of contractions and some applications to Fourier representations theorems // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1987. – **10**. – P. 780 – 801.
7. *Bruzual R.* Representation of measurable positive definite generalized Toeplitz kernels in $\mathbb{R}$ // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1997. – **29**. – P. 251 – 260.
8. *Bruzual R. Domingues M.* A proof of the continuous commutant lifting theorem // Operator Theory and Relat. Topies: (Proc. Mark Krein Int. Conf., Odessa, Ukraine, August 18 – 22, 1997). – Basel: Birkhäuser-Verlag, 2000. – **2**. – P. 83 – 89.
9. *Berezanskii Yu. M.* Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators. – Providence, R.I: Amer. Math. Soc., 1968. (Rus. edition: Kiev: Naukova Dumka, 1965. – 800 c.).
10. *Berezansky Yu. M., Chernobai O. B.* On the theory of generalized Toeplitz kernels // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1458 – 1472.
11. *Чернобай О. Б.* Спектральне представлення для узагальнених операторнозначних ядер Тепліца // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1698 – 1710.
12. *Бернштейн С. Н.* Об определении и свойствах аналитических функций вещественной переменной: Собр. соч. – 1952. – Т. 1.
13. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961.
14. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral methods in infinite-dimensional analysis. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – xvii+572 p.; Vol. 2. – viii+427 p. (Rus. edition: Kiev: Naukova Dumka, 1988. – 680 c.).
15. *Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F.* Functional analysis. – Basel: Birkhäuser-Verlag, 1996. – Vol. 1. – xix+423 p.; Vol. 2. – xvi+293 p. (Rus. edition: Kiev: Vyshcha Shkola, 1990. – 600 c.).
16. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 2.
17. *Berezansky Yu. M., Dudkin M. E.* The strong Hamburger moment problem and related direct and inverse spectral problems for block Jacobi – Laurent matrices // Methods Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 3. – P. 203 – 241.

Одержано 16.04.15,
після доопрацювання — 10.09.15