УДК 517.53

І. В. Андрусяк (Нац. ун-т „Львів. політехніка”),
П. В. Філевич (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ)

КОЕФІЦІЄНТИ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ І a-ТОЧКИ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЯКА МАЄ БОРЕЛЕВЕ ВИНЯТКОВЕ ЗНАЧЕННЯ

For entire functions with Borel exceptional values, we establish the relationship between the rate of approaching ∞ for the sequence of their a-points and the rate of approaching 0 for the sequence of their Taylor coefficients.

Для целых функций, имеющих борелевское исключительное значение, установлена связь между скоростью стремления к ∞ последовательности их a-точек и скоростью стремления к 0 последовательности их тейлоровских коэффициентов.

1. Вступ. У цій статті будемо використовувати стандартні означення і позначення з теорії розподілу значень мероморфних функцій (див., наприклад, [1]).

Зокрема, якщо $f \not\equiv \mathrm{const}$ — ціла функція і $a, z \in \mathbb{C}$, то число z називаємо a-точкою (a-точкою кратності m) функції f, якщо z є нулем (нулем кратності m) функції $f - a$. Через $n_f(r, a)$, $N_f(r, a)$, $T_f(r)$ і $M_f(r)$ позначимо лічильну функцію a-точок, усереднену лічильну функцію a-точок, характеристику Неванлінни і максимум модуля функції f відповідно.

Нагадаємо, що число a називається пікаровим винятковим значенням функції f, якщо кількість її a-точок є скінченною, і борелевим винятковим значенням функції f, якщо категорія зростання функції $n_f(r, a)$ нижча за категорію зростання функції f. Як відомо, трансцендентна ціла функція має в $\mathbb{C}$ щонайбільше одне борелеве (а тому й пікарове) виняткове значення.

Якщо число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням функції f (у цьому випадку f є трансцендентною), то нехай $(\zeta_n(a))$ — послідовність усіх її a-точок, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Нехай також (a_n) — послідовність коефіцієнтів степеневого розвинення функції f в околі точки $z = 0$, тобто $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$). Покладемо

$$G_f(a) = \varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Наступні теореми, що встановлюють зв’язок між швидкістю прямування до ∞ послідовності $(\zeta_n(a))$ і швидкістю прямування до 0 послідовності (a_n), доведено в [2].

Теорема A. (i) *Якщо число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f, то $G_f(a) \geq 1$.*

(ii) *Якщо число $b \in \mathbb{C}$ є борелевим, але не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f, то $G_f(b) = +\infty$.*

Теорема B. (i) *Існує ціла функція f без пікарового виняткового значення така, що для кожного $a \in \mathbb{C}$ правильною є рівність $G_f(a) = 1$.*

(ii) *Для довільних $q > 1$ і $b \in \mathbb{C}$ існує трансцендентна ціла функція f така, що b — її пікарове виняткове значення і для кожного $a \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$ виконується нерівність $G_f(a) < q$.*

Зауважимо, що з пункту (ii) теореми A випливає, що функція f, існування якої стверджується у пункті (i) теореми B, не може мати борелевого виняткового значення.

У даній роботі встановлено зв'язок між швидкістю прямування до ∞ послідовності a-точок і швидкістю прямування до 0 послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення трансцендентної цілої функції з борелевим винятковим значенням. Зокрема, показано, що пункти (ii) теорем A і B можна істотно уточнити.

2. Формулювання результатів. Позначимо через L клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій, а через $\mathcal{E}^*$ клас усіх цілих функцій, які не мають пікарового виняткового значення.

Нехай f — трансцендентна ціла функція з борелевим винятковим значенням, а ρ — її порядок. Відомо (див., наприклад, [1, с. 148]), що тоді або $\rho \in \mathbb{N}$, або $\rho = +\infty$.

Теорема 1. *Нехай $\rho \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C}$.*

(i) *Для довільної цілої функції $f \in \mathcal{E}^*$ порядку ρ з борелевим винятковим значенням b існує така функція $l \in L$, що*

$$l(x) = o(x), \qquad x \to +\infty, \tag{1}$$

і виконується рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[l(n)]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty. \tag{2}$$

(ii) *Для довільної функції $l \in L$, яка задовольняє співвідношення* (1), *існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^*$ порядку ρ з борелевим винятковим значенням b така, що*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[l(n)]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Нехай $b \in \mathbb{C}$.*

(i) *Для довільної цілої функції $f \in \mathcal{E}^*$ нескінченного порядку з борелевим винятковим значенням b існує така функція $l \in L$, що*

$$\log l(x) = o(\log x), \qquad x \to +\infty, \tag{4}$$

і виконується рівність (2).

(ii) *Для довільної функції $l \in L$, яка задовольняє співвідношення* (4), *існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^*$ нескінченного порядку з борелевим винятковим значенням b така, що виконується рівність* (3).

Пункти (ii) теорем 1 і 2 вказують на те, що функцію l, існування якої для заданої цілої функції f стверджується у пунктах (i) цих теорем, не можна вибрати незалежною від f. Зауважимо також, що рівності, встановлені у пунктах (i) теорем 1 і 2, точніші за рівність $G_f(b) = +\infty$ з пункту (ii) теореми A.

Якщо f — трансцендентна ціла функція порядку $\rho \in \mathbb{N}$ з пікаровим винятковим значенням $b \in \mathbb{C}$, то $G_f(a) = (e\pi)^{1/\rho}$ для кожного $a \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$. Цей факт випливає з наведеної далі теореми, оскільки кожну таку функцію можна зобразити у вигляді

$$f(z) = b + e^{cz^\rho} g(z), \tag{5}$$

де $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, а g — ціла функція порядку не вище $\rho - 1$.

Теорема 3. *Нехай $\rho \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, g — ціла функція, що має зростання не вище порядку ρ мінімального типу, f — ціла функція вигляду (5), а (k_n) — неспадна необмежена зверху послідовність цілих чисел. Тоді для всіх $a \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$ виконується подвійна нерівність*

$$e\pi \varliminf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{k_n}(a)|^\rho |a_n|^{\rho/n} \le e\pi \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n}, \tag{6}$$

зокрема, якщо існує границя

$$\Delta = \lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n},$$

то для всіх $a \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$ справджується рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{k_n}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = (e\pi\Delta)^{1/\rho}.$$

Зауважимо, що якщо цілу функцію f можна подати у вигляді, вказаному в теоремі 3, то ця функція має порядок ρ і тип $|c|$ (див. нижче лему 2), має борелеве виняткове значення b і для неї $G_f(a) = (e\pi)^{1/\rho}$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$. Проте в зазначеному вигляді можна подати не кожну цілу функцію скінченного порядку, що має борелеве виняткове значення. Наприклад, якщо $\rho \in \mathbb{N}$ і $\zeta_n = (n+1)^{1/\rho}$, $n \in \mathbb{N}_0$, то добуток Вейєрштрасса

$$g(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{z}{\zeta_n}, \rho\right) \tag{7}$$

є цілою функцією порядку ρ максимального типу (див. [1, c. 79, 341]), а тому його не можна зобразити у вказаному вигляді, хоча він має борелеве виняткове значення 0 (легко бачити, що $n_g(r, 0)$ є функцією порядку ρ нормального типу).

Нехай $\rho \in \mathbb{N}$ або $\rho = +\infty$, $\mathcal{E}(\rho)$ — клас усіх цілих функцій f порядку ρ, що мають борелеве виняткове значення b_f, і

$$F_1(\rho) = \inf_{f\in\mathcal{E}(\rho)} \inf_{a\in\mathbb{C}\backslash\{b_f\}} G_f(a), \qquad F_2(\rho) = \inf_{f\in\mathcal{E}(\rho)} \sup_{a\in\mathbb{C}\backslash\{b_f\}} G_f(a).$$

Зрозуміло, що $F_1(\rho) \le F_2(\rho)$. За теоремою A маємо $F_1(\rho) \ge 1$ в кожному з випадків $\rho \in \mathbb{N}$ і $\rho = +\infty$. З теореми 3 випливає, що $F_2(\rho) \le (e\pi)^{1/\rho}$ у випадку $\rho \in \mathbb{N}$.

З огляду на викладене виникає задача щодо встановлення точних значень величин $F_1(\rho)$ та $F_2(\rho)$. Отримати розв'язок цієї задачі у випадку $\rho \in \mathbb{N}$ авторам не вдалося. Зауважимо, однак, що $F_1(+\infty) = F_2(+\infty) = 1$. Цей факт випливає з наступної теореми, яка уточнює пункт (ii) теореми A.

Теорема 4. *Нехай $b \in \mathbb{C}$. Існує трансцендентна ціла функція f порядку $\rho = +\infty$ така, що b — її пікарове виняткове значення і для кожного $a \in \mathbb{C}\backslash\{b\}$ справджується рівність $G_f(a) = 1$.*

3. Допоміжні результати. Нехай Ω — клас таких опуклих на $[x_0, +\infty)$ функцій Φ, що $\Phi(x)/x \to +\infty$, $x \to +\infty$.

Наступні три твердження, якими скористаємося при доведенні сформульованих вище теорем, доведено в [3], [4, c. 41] і [5] відповідно.

Лема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді існує ціла функція f така, що $\log M_f(r) \sim \Phi(\log r)$, $r \to +\infty$.*

Лема 2. *Нехай* $\rho, \sigma \in (0, +\infty)$, h — *ціла функція порядку* ρ *і типу* σ, *а* g — *ціла функція, що має зростання не вище порядку* ρ *мінімального типу. Тоді функція* $f(z) = h(z)g(z)$ *має порядок* ρ *і тип* σ.

Лема 3. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Тоді для того щоб для довільної функції* $\Psi \in \Omega$ *такої, що* $\Psi(x) \sim \Phi(x)$, $x \to +\infty$, *було правильним співвідношення* $\Psi'_+(x) \sim \Phi'_+(x)$, $x \to +\infty$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall l \in L: \qquad \Phi'_+\left(x + \frac{\Phi(x)}{l(x)\Phi'_+(x)}\right) \sim \Phi'_+(x), \qquad x \to +\infty. \tag{8}$$

4. Доведення теорем. ***Доведення теореми* 1.** (i) Нехай $\rho \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C}$, а $f \in \mathcal{E}^*$ — ціла функція порядку ρ з борелевим винятковим значенням b. Доведемо, що тоді існує функція $l \in L$, для якої виконуються співвідношення (1) і (2). Як легко бачити, для цього досить довести, що для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ справджується рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[\varepsilon n]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty.$$

Припустимо від супротивного, що існують такі додатні сталі ε і A, що $|\zeta_{[\varepsilon n]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} \le A$, $n \in \mathbb{N}_0$. Нехай $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ і $\nu_f(r) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ — максимальний член і центральний індекс степеневого розвинення функції f відповідно, а n_1 — номер першого відмінного від нуля члена послідовності $(\zeta_n(a))$. Оскільки $\nu_f(r) \to +\infty$, $r \to \to +\infty$, то $\nu_f(r) \ge n_1$ для всіх $r \ge r_1$, а тому для таких r маємо

$$\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \ge n_1\} \le \max\{(Ar/|\zeta_{[\varepsilon n]}(b)|)^n : n \ge n_1\}.$$

Покладемо $r_2 = \min\{r \ge 0 : \mu_f(r) \ge 1\}$, $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ і нехай $r \ge r_0$. Зрозуміло, що тоді $(Ar/|\zeta_{[\varepsilon\nu_f(r)]}(b)|)^n \ge 1$. Отже, $|\zeta_{[\varepsilon\nu_f(r)]}(b)| \le Ar$, а тому й $\varepsilon\nu_f(r) \le n_f(Ar, b)$ для всіх $r \ge r_0$. Враховуючи, що $r(\log \mu_f(r))'_+ = \nu_f(r)$ і $r(N_f(r,b))'_+ = n_f(r,b)$, для всіх $r \ge r_0$ отримуємо

$$\log \mu_f(r) - \log \mu_f(r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{\nu_f(t)}{t} dt \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_0}^{r} \frac{n_f(At, b)}{t} dt = \frac{1}{\varepsilon}(N_f(Ar, b) - N_f(Ar_0, b)).$$

Звідси випливає, що категорія зростання функції $\log \mu_f(r)$ не перевищує категорію зростання функції $N_f(r, b)$. Але, як відомо, функції f та $\log \mu_f(r)$, як і функції $N_f(r, b)$ та $n_f(r, b)$, мають однакові категорії зростання. Отже, категорія зростання функції f не перевищує категорію зростання функції $n_f(r, b)$, а це суперечить тому факту, що b є борелевим винятковим значенням функції f.

(ii) Нехай $\rho \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C}$, а функція $l \in L$ задовольняє співвідношення (1). Доведемо, що існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^*$ порядку ρ з борелевим винятковим значенням b, для якої виконується рівність (3).

З (1) видно, що $n = o(l^{-1}(n))$, $n \to \infty$, а тому існує додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність (η_n), для якої $n\eta_n = o(l^{-1}(n))$, $n \to \infty$. Нехай (ζ_n) — така комплексна послідовність, що $\zeta_n^\rho = (-1)^n(n+1)\eta_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що тоді

$$|\zeta_{[l(n)]}| = o((l^{-1}([l(n)]))^{1/\rho}) = o(n^{1/\rho}), \qquad n \to +\infty. \tag{9}$$

Розглянемо добуток Вейєрштрасса (7), який задає цілу функцію g порядку ρ. Оскільки $n = o(|\zeta_n|^\rho)$, $n \to \infty$, то

$$\Delta_1 := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_g(r,0)}{r^\rho} = 0.$$

Отже, $n_g(r,0)$ є функцією порядку ρ мінімального типу. Покладемо

$$K(r) = \frac{1}{\rho}\sum_{|\zeta_n|\le r} \frac{1}{\zeta_n^\rho}, \qquad r \ge 0.$$

Оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\eta_n}$$

є збіжним і його сумою є деяке додатне число S, то

$$\Delta_2 := \varlimsup_{r\to+\infty} |K(r)| = S/\rho > 0.$$

Оскільки $0 < \max\{\Delta_1, \Delta_2\} < +\infty$, то функція g за теоремою Ліндельофа (див. [1, с. 85]) має нормальний тип. Тому 0 є борелевим (але не є пікаровим) винятковим значенням функції g. Крім того, якщо $\sigma \in (0,+\infty)$ — тип функції g, а b_n — n-й коефіцієнт її степеневого розвинення, то, використовуючи формулу Коші – Адамара

$$\sigma e\rho = \varlimsup_{n\to\infty} n|b_n|^{\rho/n},$$

отримуємо $\sqrt[n]{|b_n|} \le (2\sigma e\rho/n)^{1/\rho}$, $n \ge n_0$. Звідси і з (9) випливає співвідношення

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[l(n)]}| \sqrt[n]{|b_n|} = 0.$$

Покладемо $f(z) = b + g(z)$. Тоді, як легко бачити, функцією, існування якої стверджується, і буде функція f.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** (i) Нехай $b \in \mathbb{C}$, а $f \in \mathcal{E}^*$ — ціла функція порядку $\rho = +\infty$ з борелевим винятковим значенням b. Доведемо, що тоді існує функція $l \in L$, для якої правильними є співвідношення (4) і (2). Як легко бачити, для цього досить довести, що для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ справджується рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[n^\varepsilon]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty.$$

З формули Коші – Адамара

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{-\log|a_n|}$$

і рівності $\rho = +\infty$ випливає існування такої зростаючої послідовності (n_k) невід'ємних цілих чисел, що

$$\varepsilon_k := \frac{-\log|a_{n_k}|}{n_k \log n_k} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Зауважимо, що $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = n_k^{-\varepsilon_k}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки b є борелевим винятковим значенням функції f, то функція $n_f(r,b)$ має скінченний порядок, а тому існує таке число $C > 0$, що $n_f(r,b) - 1 \le r^C$ для всіх $r \ge r_0$. Тоді $n = n_f(|\zeta_n(b)|, b) - 1 \le |\zeta_n(b)|^C$ для всіх $n \ge n_0$.

Отже, для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[n^\varepsilon]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} \geq \varlimsup_{k\to\infty} |\zeta_{[n_k^\varepsilon]}(b)| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \varlimsup_{k\to\infty} [n_k^\varepsilon]^{1/C} n_k^{-\varepsilon_k} = +\infty,$$

що й потрібно було довести.

(ii) Нехай $b \in \mathbb{C}$, а функція $l \in L$ задовольняє співвідношення (4). Доведемо, що існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^*$ нескінченного порядку з борелевим винятковим значенням b, для якої виконується рівність (3).

Нехай $\Psi \in L$ — деяка функція, для якої $\Psi^{-1}(x) = 2\log l(x)$, $x \geq x_1$. Тоді, згідно з (4),

$$\sigma = 2\log l(\Psi(\sigma)) = o(\log\Psi(\sigma)), \qquad \sigma \to +\infty,$$

а тому існує така функція $\varphi \in L$, що $2\sigma\varphi(\sigma) \leq \log\Psi(\sigma) - 1$, $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. Покладемо

$$\Phi(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varphi(t)dt, \qquad \sigma \geq \sigma_0.$$

Зрозуміло, що $\Phi \in \Omega$, а тому за лемою 1 існує така ціла функція g, що

$$\log M_g(r) \sim \Phi(\log r), \qquad r \to +\infty.$$

Оскільки $\Phi(\sigma) \leq (\sigma - \sigma_0)\varphi(\sigma) \leq \sigma\varphi(\sigma)$, $\sigma \geq \sigma_0$, то

$$\log M_g(r) \leq 2\Phi(\log r) \leq 2\log r\varphi(\log r) \leq \log\Psi(\log r) - 1, \qquad r \geq r_0.$$

Розглянемо цілу функцію $f(z) = b + e^{g(z)}h(z)$, де $h(z) = e^{2\pi iz} - 1$. Зрозуміло, що функція g є трансцендентною, а тому функція e^g має нескінченний порядок. Функція h має порядок 1 і прості нулі в точках $z \in \mathbb{Z}$, які збігаються з b-точками функції f, тобто $\zeta_n(b) = (-1)^n[(n+1)/2]$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, функція f має нескінченний порядок і $n_f(r,b) = n_h(r,0) = 2[r] + 1$, $r \geq 0$, звідки випливає, що число b є борелевим (але не є пікаровим) винятковим значенням функції f.

Далі маємо

$$M_f(r) \leq e^{M_g(r)}(e^{2\pi r} + 1) + |b| \leq e^{\Psi(\log r)}, \qquad r \geq r_1.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$ — ціле число. Використовуючи нерівність Коші $|a_n|r^n \leq M_f(r)$, $r \geq 0$, отримуємо

$$|a_n| \leq e^{\Psi(\log r) - n\log r}, \qquad r \geq r_1.$$

Звідси для всіх $n \geq \Psi(\log r_1)$, покладаючи $r = \exp(\Psi^{-1}(n))$, маємо $|a_n| \leq \exp(n(1 - \Psi^{-1}(n))$. Тому

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_{[l(n)]}(b)| \sqrt[n]{|a_n|} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{l(n)}{2} e^{1-\Psi^{-1}(n)} = \frac{e}{2} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{l(n)} = 0,$$

тобто виконується рівність (3).

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Нехай $\rho \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, g — ціла функція, що має зростання не вище порядку ρ мінімального типу, f — ціла функція вигляду (5), а (k_n) — неспадна необмежена зверху послідовність цілих чисел. Зафіксуємо довільне $a \in \mathbb{C}\setminus\{b\}$ і доведемо, що виконується (6).

Покладемо $h(z) = e^{cz^\rho}$. Оскільки $M_h(r) = e^{|c|r^\rho}$, то функція h має порядок ρ і тип $|c|$. Скориставшись лемою 2, легко показати, що функція f, як вже зазначалося вище, також має порядок ρ і тип $\sigma = |c|$.

Нехай $\varepsilon \in (0,1)$ — довільне фіксоване число. З формули Коші – Адамара

$$\sigma e\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|a_n|^{\rho/n}$$

випливає, що

$$|a_n|^{\rho/n} \le (1+\varepsilon)|c|e\rho/n, \qquad n \ge n_0, \qquad |a_{m_p}|^{\rho/m_p} \ge (1-\varepsilon)|c|e\rho/m_p, \qquad p \in \mathbb{N}_0, \qquad (10)$$

де (m_p) — деяка зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел.

Як відомо (див., наприклад, [6, с. 26]), $T_h(r) \sim |c|r^\rho/\pi$, $r \to +\infty$. Крім того, оскільки функція g має зростання не вище порядку ρ мінімального типу, то $T_g(r) = o(r^\rho)$, $r \to +\infty$. Тому, використовуючи відомі властивості характеристики Неванлінни (див. [1, с. 45]), бачимо, що $T_f(r) \sim T_h(r) \sim |c|r^\rho/\pi$, $r \to +\infty$.

Далі доведемо, що $N_f(r,a) \sim |c|r^\rho/\pi$, $r \to +\infty$. Використовуючи другу основну теорему теорії розподілу значень у формулюванні, наведеному в [7, с. 255, 256], з $q = 3$, $\lambda = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ і $a_3 = \infty$, отримуємо $T_f(r) \le N_f(r,a) + N_f(r,b) + S(r)$, де $S(r) = o(\log r)$ при $r \to +\infty$ зовні такої множини $E \subset [0,+\infty)$, що $\displaystyle\int_E dt < +\infty$. Нехай $d > \int_E dt$. Зрозуміло, що для кожного $r \ge d$ відрізок $[r-d, r]$ містить таку точку $\beta(r)$, що $\beta(r) \notin E$. Тоді $S(\beta(r)) = o(\log\beta(r)) = o(T_f(r))$ і $T_f(\beta(r)) \sim T_f(r)$, якщо $r \to +\infty$. Крім того, $N_f(r,b) = N_g(r,0) = o(r^\rho)$, $r \to +\infty$. Тому

$$N_f(r,a) \ge N_f(\beta(r),a) \ge T_f(\beta(r)) - N_f(\beta(r),b) - S(\beta(r)) = (1+o(1))T_f(r), \qquad r \to +\infty.$$

З іншого боку, $N_f(r,a) \le T_f(r) + O(1)$, $r \to +\infty$. Отже, $N_f(r,a) \sim T_f(r) \sim |c|r^\rho/\pi$, $r \to +\infty$.

Доведемо тепер, що $n_f(r,a) \sim |c|\rho r^\rho/\pi$, $r \to +\infty$. Розглянемо функцію $\Phi(x) = |c|e^{\rho x}/\pi$, $x \ge 0$, і нехай $l \in L$. Враховуючи, що $\Phi'(x) = |c|\rho e^{\rho x}/\pi$, $x \ge 0$, отримуємо

$$\Phi'\left(x + \frac{\Phi(x)}{l(x)\Phi'(x)}\right) = \Phi'\left(x + \frac{1}{\rho l(x)}\right) = \frac{|c|\rho}{\pi}\exp\left(\rho x + \frac{1}{l(x)}\right) \sim \frac{|c|\rho}{\pi}e^{\rho x} = \Phi'(x), \quad x \to +\infty,$$

тобто для функції Φ виконується умова (8). Зрозуміло також, що $\Phi \in \Omega$. Оскільки функція $N_f(e^x, a)$ є опуклою на $\mathbb{R}$ і, згідно з доведеним вище, $N_f(e^x,a) \sim \Phi(x)$, $x \to +\infty$, то за лемою 3 маємо $n_f(e^x,a) = (N_f(e^x,a))'_+ \sim \Phi'(x)$, $x \to +\infty$, тобто $n_f(r,a) \sim |c|\rho r^\rho/\pi$, $r \to +\infty$.

Використовуючи останнє співвідношення, отримуємо

$$n + 1 = n_f(|\zeta_n(a)|, a) \sim |c|\rho|\zeta_n(a)|^\rho/\pi, \qquad n \to \infty.$$

Тоді $|\zeta_n(a)|^\rho \sim \pi n/(|c|\rho)$, $n \to +\infty$, а тому, використовуючи (10), одержуємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\zeta_{k_n}(a)|^\rho |a_n|^{\rho/n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\pi k_n}{|c|\rho}\frac{(1+\varepsilon)|c|e\rho}{n} = (1+\varepsilon)e\pi \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \frac{k_n}{n},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\zeta_{k_n}(a)|^\rho|a_n|^{\rho/n}\ge\varlimsup_{p\to\infty}|\zeta_{k_{m_p}}(a)|^\rho|a_{m_p}|^{\rho/m_p}\ge\varlimsup_{p\to\infty}\frac{\pi k_{m_p}}{|c|\rho}\frac{(1-\varepsilon)|c|e\rho}{m_p}=$$

$$=(1-\varepsilon)e\pi\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{k_{m_p}}{m_p}\ge(1-\varepsilon)e\pi\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{k_n}{n}.$$

Звідси завдяки довільності $\varepsilon\in(0,1)$ маємо (6).

Теорему 3 доведено.

***Доведення теореми* 4.** Розглянемо функцію $f(z)=e^{e^z}+b$. Зрозуміло, що ця функція має нескінченний порядок і b є її пікаровим винятковим значенням. Зафіксуємо довільне $a\in\mathbb{C}\backslash\{b\}$ і доведемо, що $G_f(a)=1$.

Для наведеної функції маємо $M_f(r)=e^{e^r}+O(1)$, $r\to+\infty$. Відомо також (див., наприклад, [6, с. 26]), що

$$T_f(r)\sim\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}},\qquad r\to+\infty.$$

Нехай $n\ge3$ — фіксоване ціле число. Використовуючи нерівність Коші $|a_n|r^n\le M_f(r)$, $r\ge0$, отримуємо

$$|a_n|\le Ce^{e^r-n\log r},\qquad r\ge1,$$

де $C>0$ — деяка стала. Функція $y(r)=e^r-n\log r$, $r\ge1$, має єдину точку мінімуму r_n таку, що $r_ne^{r_n}=n$. Тоді

$$\sqrt[n]{|a_n|}\le\sqrt[n]{C}e^{y(r_n)/n}=\sqrt[n]{C}e^{1/r_n}/r_n.$$

Враховуючи, що $r_n\sim\log n$, $n\to\infty$, одержуємо

$$\varlimsup_{n\to\infty}\log n\sqrt[n]{|a_n|}\le1. \tag{11}$$

Далі доведемо, що

$$N_f(r,a)\sim\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}},\qquad r\to+\infty. \tag{12}$$

Використовуючи другу основну теорему теорії розподілу значень у формулюванні, наведеному в [7, с. 255, 256], з $q=3$, $\lambda=2$, $a_1=a$, $a_2=b$ і $a_3=\infty$, отримуємо $T_f(r)\le N_f(r,a)+S(r)$, де $S(r)=o(r)$ при $r\to+\infty$ зовні такої множини $E\subset[0,+\infty)$, що $\int_E tdt<+\infty$. Нехай $c>2\int_E tdt$ і $\alpha(r)=r-\dfrac{c}{r}$, $r\ge\sqrt{c}$. Тоді для всіх $r\ge\sqrt{c}$ маємо

$$\int\limits_{\alpha(r)}^{r}tdt=\frac{r^2-\alpha^2(r)}{2}=\frac{c(r+\alpha(r))}{2r}\ge\frac{c}{2}>\int\limits_E tdt.$$

Отже, для кожного $r\ge\sqrt{c}$ відрізок $[\alpha(r),r]$ містить таку точку $\beta(r)$, що $\beta(r)\notin E$. Тоді $S(\beta(r))=o(\beta(r))=o(T_f(r))$ і $T_f(\beta(r))\sim T_f(r)$, якщо $r\to+\infty$, а тому, як і при доведенні попередньої теореми, $N_f(r,a)\sim T_f(r)$, $r\to+\infty$, звідки випливає (12).

Доведемо тепер, що

$$n_f(r,a)\sim e^r\sqrt{\frac{r}{2\pi^3}},\qquad r\to+\infty. \tag{13}$$

Розглянемо функцію
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \exp\left(e^x - \frac{x}{2}\right), \qquad x \ge 0,$$
і покажемо, що для неї виконується умова (8). Для функції Φ маємо
$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \left(e^x - \frac{1}{2}\right) \exp\left(e^x - \frac{x}{2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \exp\left(e^x + \frac{x}{2}\right), \qquad x \to +\infty.$$
Нехай $l \in L$. Покладемо
$$\gamma(x) = \frac{\Phi(x)}{l(x)\Phi'(x)} = \frac{2}{l(x)(2e^x - 1)}, \qquad x \ge x_0.$$
Тоді $\gamma(x) \to 0$, $x \to +\infty$, а тому
$$e^{x+\gamma(x)} - e^x = e^x(e^{\gamma(x)} - 1) = (1 + o(1))e^x\gamma(x) = o(1), \qquad x \to +\infty.$$
Отже,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'\left(x + \gamma(x)\right)}{\Phi'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(e^{x+\gamma(x)} - e^x\right) = 1,$$
тобто виконується (8). Зрозуміло також, що $\Phi \in \Omega$. Оскільки, згідно зі співвідношенням (12), $N_f(e^x, a) \sim \Phi(x)$, $x \to +\infty$, то за лемою 3 маємо $n_f(e^x, a) \sim \Phi'(x)$, $x \to +\infty$, звідки й випливає (13).

Зі співвідношення (13) отримуємо
$$n + 1 = n_f(|\zeta_n(a)|, a) \sim e^{|\zeta_n(a)|}\sqrt{|\zeta_n(a)|/(2\pi^3)}, \qquad n \to \infty.$$
Тому $|\zeta_n(a)| \sim \log n, n \to +\infty$. Звідси і з (11) видно, що $G_f(a) \le 1$. Але $G_f(a) \ge 1$ за теоремою А. Отже, $G_f(a) = 1$.

Теорему 4 доведено.

Література

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. *Пельчарська І. В., Шеремета М. М.* Про розподіл значень і коефіцієнти степеневого розвинення цілої функції // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 21 – 25.
3. *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic growth // Can. J. Math. – 1965. – **17**, № 3. – P. 396 – 404.
4. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
5. *Філевич П. В.* Про асимптотичну рівність похідних логарифмів максимуму модуля і максимального члена цілої функції // Мат. вісн. НТШ. – 2009. – **6**. – С. 252 – 260.
6. *Хейман У.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 288 с.
7. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1941. – 388 с.

Одержано 13.03.15