УДК 512.7

Б. Р. Зайналов (Самарканд, Узбекистан)

ПРЕДАЦИКЛИЧНОСТЬ НАД КОЛЬЦАМИ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ ВЫЧЕТОВ

We consider a simplicial scheme, its geometric realization, and the required properties of the simplicial scheme of unimodal frames and prove both a sufficiently strong theorem on acyclicity for the simplicial scheme of unimodal frames and a theorem stating that the first nontrivial group of homologies is generated by standard cycles over the rings with infinite fields of residues.

Розглядаються симпліціальна схема, її геометрична реалізація та необхідні властивості симпліціальних схем унімодулярних реперів. Доведено досить сильну теорему ациклічності для симпліціальних схем унімодулярних реперів, а також теорему про те, що перша нетривіальна група гомологій породжується стандартними циклами над кільцями з нескінченними полями лишків.

Введение. Основой для решения проблемы стабилизации в высшей алгебраической K-теории колец является изучение некоторых симплициальных множеств с унимодулярными реперами. Наиболее важные и интересные при этом симплициальные множества, рассмотренные в работах [6, 7]. Для доказательства теорем о стабилизации необходимо уметь доказывать сильную ацикличность симплициального множества унимодулярных реперов. Аналогично, если уметь вычислять первую нетривиальную группу гомологий соответствующего симплициального множества, то это даст ответ на проблему предстабилизации [5]. В данной работе мы вводим в рассмотрение множество симплициальных схем [3] и связанные с ними унимодулярные реперы. В п. 1 рассматривается определение симплициальных схем и их геометрическая реализация, в п. 2 построена гомология симплициальных схем, в п. 3 приведены необходимые свойства симплициальных схем унимодулярных реперов, в п. 4 доказана достаточно сильная теорема ацикличности для симплициальных схем унимодулярных реперов и, наконец, в п. 5 обобщается теорема, рассмотренная в [4], в которой утверждается, что для дедекиндового кольца первая нетривиальная группа гомологий порождается стандартными циклами. Эта теорема в более общей формулировке доказана для колец с бесконечными полями вычетов. Отметим, что полученный результат применим и к симплициальному множеству ван дер Каллена.

1. Симплициальные схемы и их геометрическая реализация. Для произвольного множества V через $\varepsilon(V)$ будем обозначать множество его непустых конечных подмножеств. Симплициальной схемой будем называть пару (V, F), где $F \subset \varepsilon(V)$, причем F вместе с каждым множеством содержит все его непустые подмножества. В случаях, когда множество V известно из контекста, будем опускать его в обозначениях и говорить, что $F(\subset \varepsilon(V))$ является симплициальной схемой.

Множества из F называются симплексами, при этом $s = \left\{ \vartheta_0, \ldots, \vartheta_p \right\} \in F$ называется p-мерным симплексом или p-симплексом, число p — размерностью симплекса $s : p = \dim s$. Если $s' = s$, то s' называется гранью симплекса s (собственной, если $s' \neq s$). Нульмерные грани называются вершинами.

Отметим, что обычно при определении симплициальной схемы налагают дополнительное требование, что все одноэлементные множества являются симплексами. Это требование, очевидно, несущественно и по техническим причинам не будет использоваться в дальнейшем.

Если $\Phi \subset F \subset \varepsilon(V)$ — симплициальные схемы, то Φ называется симплициальной подсхемой F. Нетрудно видеть, что множество всех граней симплексов $s \in F$ и множество всех собственных граней $\dot{s}$ образуют подсхемы симплициальной схемы F, которые обозначаются $\overline{s}$, $\dot{s}$ соответственно. Ясно также, что произвольное объединение (и произвольное пересечение) симплициальных подсхем снова является симплициальной подсхемой [3].

Пусть $s = \left\{ \vartheta_0, \ldots, \vartheta_p \right\} \in F$ — некоторый симплекс. Через F_s будем обозначать множество тех конечных подмножеств $t \in \varepsilon(V)$, для которых $t \bigcap s = \varnothing$ и $t \bigcup s \in F$. Ясно, что F_s является подсхемой схемы F. Справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 1.1. *Если* $t \in F_s$, *то* $(F_s)_t = F_{s \bigcup t}$.

Предположим, что множества V и W не пересекаются и $F \subset \varepsilon(V)$, $\Phi \subset \varepsilon(W)$ — симплициальные схемы. Джойном или соединением схем F и Φ называется симплициальная схема $F * \Phi \subset \varepsilon(V \bigcup W)$, симплексами которой являются те $u \in \varepsilon(V \bigcup W)$, для которых $u \bigcap V$ или пусто, или лежит в F и $u \bigcap W$ или пусто, или лежит в Φ. Напомним теперь конструкцию геометрической реализации симплициальной схемы [6]. Пусть $F \subset \varepsilon(V)$ — симплициальная схема. Рассмотрим множество X отображений $x : V \to [0,1]$ таких, что:

a) $\left\{ \vartheta \in V : x(\vartheta) \neq 0 \right\} \in F$ (в частности, это множество конечно);

b) $\sum_{\vartheta \in V} x(\vartheta) = 1$.

Пусть $s = \left\{ \vartheta_0, \ldots, \vartheta_p \right\} \in F$, положим $|s| = \left\{ x \in X : x(\vartheta) = 0,\ \vartheta \notin s \right\}$. Имеется очевидная биекция между $|s|$ и стандартным p-мерным геометрическим симплексом $\Delta^p = \left\{ (t_0, \ldots, t_p) \in R^{p+1} :\ 0 \leq t_i \leq 1,\ t_0 + \ldots + t_p = 1 \right\}$. Воспользуемся этой биекцией и перенесем топологию с Δ^p на $|s|$. После этого на X вводится слабая топология: $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $A \bigcap |s|$ открыто в $|s|$ для любого $s \in F$.

Множество X с введенной топологией называется геометрической реализацией F и обозначается $|F|$. По построению $|F|$ является полиэдром, геометрические симплексы которого находятся в однозначном соответствии с симплексами схемы F [3].

Напомним, что джойном или соединением топологических пространств X и Y называется фактор-пространство дизъюнктной суммы $X \coprod Y \coprod X \times Y \times I$ по отношению эквивалентности, порожденному отождествлениями

$$x \sim x \times y \times 0,$$

$$y \sim x \times y \times 1$$

при любых $x \in X$, $y \in Y$. Отметим, что имеет место следующее предложение.

Предложение 1.1. *Пусть* $F \subset \varepsilon(V)$, $\Phi \subset \varepsilon(W)$ — *симплициальные схемы, причем* $V \bigcap W = \varnothing$. *Тогда* $|F| * |\Phi| = |F * \Phi|$.

Доказательство. Естественные вложения $F \underset{\longrightarrow}{\subset} F * \Phi \underset{\longleftarrow}{\supset} \Phi$ индуцируют вложения $|F| \subset |F * \Phi| \supset |\Phi|$. Определим, далее, отображение $|F| \times |\Phi| \times I \to |F * \Phi|$ по формуле $x \times y \times t \mapsto z$, где $z(\vartheta) = (1-t)x(\vartheta)$ при $\vartheta \in V$, $z(\omega) = ty(\vartheta)$ при $\omega \in W$. Если $s \in F$, $r \in \Phi$, то построенное отображение непрерывно отображает $|s| \times |r| \times I$ в $|s \bigcup r|$ и, поскольку топология на $|F|\times|\Phi|\times I$ определяется подмножествами вида $|s|\times|r|\times I$, построенное отображение непрерывно. Кроме того, ясно, что отображения $|F|\to|F*\Phi|$, $|\Phi|\to$ $\to|F*\Phi|$ и $|F|\times|\Phi|\times I\to|F*\Phi|$ согласованы с отождествлениями, используемыми при построении $|F|*|\Phi|$, и тем самым определяют непрерывное отображение $|F|*|\Phi|\to|F*\Phi|$.

Обратное отображение строится следующим образом: пусть $x: V\bigcup W\to[0,1]\in F*\Phi$. Если $z|_W=0$, то $x|_V=x\in|F|$ и z сопоставляется точка x. Если $z|_V=0$, то $y=z|_W\in|\Phi|$ и z сопоставляется точка y. Пусть $z|_V\neq 0$, $z|_W\neq 0$. Положим

$$t = \sum_{\omega\in W} z(\omega), \qquad x = \frac{1}{1-t}z|_V\in|F|, \qquad y = \frac{1}{t}z|_W\in|\Phi|$$

и сопоставим z точку $x\times y\times t\in|F|\times|\Phi|\times I$. Несложно проверить, что так определенное отображение $|F\times\Phi|\to|F|*|\Phi|$ непрерывно и является обратным к построенному выше.

2. Гомология симплициальных схем. Пусть $F\subset\varepsilon(V)$ — некоторая симплициальная схема. Обозначим через $C_p(F)$ свободную абелеву группу, базисом которой являются такие последовательности $\left\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\right\}$ не обязательно различных элементов V, что $\left\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\right\}\in F$. Определим гомоморфизм $d: C_p(F)\to C_{p-1}(F)$ обычной формулой

$$d(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\vartheta_0,\ldots,\hat{\vartheta}_i,\ldots,\vartheta_p),$$

где знак $\wedge$ над ϑ означает, что компонента ϑ_i опускается. Тривиальная проверка показывает, что $d^2=0$, т. е. $C_*(F)=C_0(F)\overset{d}{\leftarrow}C_1(F)\leftarrow\Delta\ldots$ является комплексом. Группы гомологий $H_i(C_*(F))$ обозначаются также $H_i(F)$ и называются (целочисленными) группами гомологий симплициальной схемы F. Для топологического пространства X через $C_*(X)$ будем обозначать его сингулярный цепной комплекс [3], а через $H_i(X)$ — группы сингулярных гомологий $X: H_i(X)=H_i(C_*(X))$. Если $F\subset\varepsilon(V)$ — симплициальная схема и $\left\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\right\}$ — сингулярный комплекс F, то имеется единственный линейный сингулярный симплекс f: $\Delta^p\to|F|$, переводящий i-ю вершину Δ^p в ϑ_i. Таким образом, возникает вложение комплексов $C_*(F)\subseteq C_*\left(|F|\right)$, которое, как известно [3], является гомотопической эквивалентностью. В частности, $H_i(F)=H_i\left(|F|\right)$. Положим $C_{-1}(F)=Z$ и определим пополнение ε: $C_0(F)\to C_{-1}(F)$ формулой $\varepsilon(\vartheta)=1$ для любой $\vartheta(\left\{\vartheta\right\}\in F)$. Комплекс

$$\tilde{C}_*(F) = C_{-1}(F)\overset{\varepsilon}{\leftarrow}C_0(F)\overset{d}{\leftarrow}C_1(F)\leftarrow\ldots$$

называется пополненным комплексом симплициальной схемы F, его гомологии обозначаются $\tilde{H}_i(F)$ и называются приведенными гомологиями схемы F. Тогда справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 2.1. a) *Если* $F=\varnothing$, *то* $\tilde{H}_{-1}(F)=Z$.

b) *Если* $F\neq\varnothing$, *то* $\tilde{H}_{-1}(F)=0$, $H_0(F)=\tilde{H}_0(F)\oplus Z$ *и* $\tilde{H}_i(F)=H_i(F)$ *при* $i>0$.

Таким образом, k-ацикличность при $k \leq -2$ не означает ничего, (-1)-ацикличность означает непустоту, 0-ацикличность — непустоту и линейную связность и т. д.

Пусть F_1 и F_2 — подсхемы симплициальной схемы F, тогда $C_*(F_1)$, $C_*(F_2)$ — подкомплексы $C_*(F)$, причем $C_*(F_1) \bigcap C_*(F_2) = C_*(F_1 \bigcap F_2)$, $C_*(F_1) + C_*(F_2) = C_*(F_1 \bigcup F_2)$.

Обозначим через

$$i_1 : F_1 \bigcap F_2 \subseteq F_1, \quad i_2 : F_1 \bigcap F_2 \subseteq F_2, \quad j_1 : F_1 \subseteq F_1 \bigcup F_2, \quad j_2 : F_2 \subseteq F_1 \bigcup F_2$$

соответствующие вложения. Тогда возникает точная последовательность комплексов

$$0 \to \tilde{C}_*(F_1 \bigcap F_2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{pmatrix}} \tilde{C}_*(F_1) \oplus \tilde{C}_*(F_2) \xrightarrow{(j_1,\, j_2)} \tilde{C}_*(F_1 \bigcup F_2) \to 0.$$

Соответствующая длинная точная последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_i(F_1 \bigcap F_2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{pmatrix}} H_i(F_1) \oplus H_i(F_2) \xrightarrow{((j_1),\, (j_2))}$$

$$\xrightarrow{((j_1),\, (j_2))} H_i(F_1 \bigcup F_2) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(F_1 \bigcup F_2) \to \ldots$$

называется последовательностью Майера – Вьеториса подсхем F_1 и F_2. Имеются также аналогичная точная последовательность пополненных комплексов

$$0 \to \tilde{C}_*(F_1 \bigcap F_2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{pmatrix}} \tilde{C}_*(F_1) \oplus \tilde{C}_*(F_2) \xrightarrow{(j_1,\, j_2)} \tilde{C}_*(F_1 \bigcup F_2) \to 0$$

и длинная точная последовательность Майера – Вьеториса для приведенных гомологий.

Помимо сингулярного комплекса $C_*(F)$ симплициальной схемы F часто рассматривают также так называемый ориентированный комплекс $W_*(F)$. Имеется естественное действие симметрической группы $\sum_{p+1}$ на $C_p(F)$, заданное формулой

$$\pi(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p) = \left(\vartheta_{\pi^{-1}(0)}, \ldots, \vartheta_{\pi^{-1}(p)}\right).$$

Через $W_p(F)$ обозначим фактор-группу $C_p(F)$ по подгруппе, порожденной вырожденными симплексами (т. е. теми $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p)$, у которых не все ϑ_i различны) и элементами вида

$$\pi(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot (\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p),$$

где $\operatorname{sign}(\pi) = \pm 1$ — четность подстановки.

Несложно проверить, что дифференциал $d : C_p(F) \to C_{p-1}(F)$ при переходе к фактор-группам определяет дифференциал $d : W_p(F) \to W_{p-1}(F)$. Таким образом, получаем комплекс $W_*(F)$ и эпиморфизм комплексов $C_*(F) \to W_*(F)$, который является гомотопической эквивалентностью [3] (гл. 5, § 8). Через $\tilde{W}_*(F)$ будем обозначать соответствующий пополненный комплекс. Группа $W_p(F)$ может быть также описана как абелева группа, образующими которой являются ориентированные p-мерные симплексы F (ориентацией симплекса $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\}\in F$ называется упорядочение множества $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\}$, причем два упорядочения определяют одну ориентацию, если они отличаются на четную подстановку), и образующие, соответствующие противоположным ориентациям одного и того же симплекса, отличаются знаком.

Будем говорить, что сингулярные симплексы $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p)$ и $(\omega_0,\ldots,\omega_q)$ схемы F трансверсальны, если $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\}\bigcap\{\omega_0,\ldots,\omega_q=\varnothing\}$ и $\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p,\omega_0,\ldots,\omega_q\}\in F$. В этом случае положим $(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p)*(\omega_0,\ldots,\omega_q)=(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p,\ \omega_0,\ldots,\omega_q)\in C_{p+q+1}(F)$. Распространим это определение по линейности на произвольные цепи комплекса $\tilde{C}_*(F)$: две цепи трансверсальны, если любой симплекс, входящий с ненулевым коэффициентом в первую цепь, трансверсален любому комплексу, входящему с ненулевым коэффициентом во вторую цепь; (–1)-мерная цепь трансверсальна любой цепи.

Лемма 2.2. *Если цепи* σ *и* τ *трансверсальны, трансверсальны и цепи* $d\sigma$ *и* τ, σ *и* $d\tau$. *Кроме того,* $d(\sigma*\tau)=d\sigma*\tau+(-1)^{\dim(\sigma)+1}\sigma*d\tau$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, а второе следует из формулы

$$d(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p,\omega_0,\ldots,\omega_q)=$$

$$=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\vartheta_0,\ldots,\hat{\vartheta}_i,\ldots,\vartheta_p,\omega_0,\ldots,\omega_q)+\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\vartheta_0,\ldots,\hat{\vartheta}_i,\ldots,\vartheta_p,\omega_0,\ldots,\hat{\omega}_j,\ldots,\omega_q).$$

Пусть $F\subset\varepsilon(V)$, $\Phi\subset\varepsilon(W)$ (где $V\bigcap W=\varnothing$ — симплициальные схемы). Комплексы $C_*(F)$, $C_*(\Phi)$ естественно вкладываются в $\tilde{C}_*(F*\Phi)$, причем их образы очевидно трансверсальны. Тем самым при любых p и q получаем гомоморфизм $\tilde{C}_p(F)\otimes\tilde{C}_q(\Phi)\to\tilde{C}_{p+q+1}(F*\Phi)$.

Для любого комплекса C через $C[-1]$ будем обозначать комплекс, у которого $C[-1]_i=C_{i-1}$ и дифференциал получается из дифференциала комплекса C изменением знака. Используя лемму 2.1, видим, что мы построили гомоморфизм комплексов $\tilde{C}_*(F)[-1]\otimes\tilde{C}_*(\Phi)[-1]\to\tilde{C}_*(F*\Phi)[-1]$.

Предложение 2.1. *Гомоморфизм* $\tilde{C}_*(F)[-1]\otimes\tilde{C}_*(\Phi)[-1]\to\tilde{C}_*(F*\Phi)[-1]$ *является гомотопической эквивалентностью. В частности, для любого* n *имеется точная последовательность*

$$0\to\coprod_{k+l=n-1}\tilde{H}_k(F)\otimes\tilde{H}_l(\Phi)\to\tilde{H}_n(F*\Phi)\to\coprod_{k+l=n-2}\operatorname{Tor}(\tilde{H}_k(F),\tilde{H}_l(\Phi))\to 0.$$

Доказательство. Второе утверждение следует из первого и из теоремы Кюнкета [3] (см. гл. VI). Для доказательства первого утверждения отметим, что гомоморфизм $\tilde{C}_*(F)[-1]\otimes\tilde{C}_*(\Phi)[-1]$ определяет при переходе к факторам гомоморфизм, который, очевидно, является изоморфизмом.

В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_*(F)[-1] \otimes \tilde{C}_*(\Phi)[-1] & \to & \tilde{C}_*(F * \Phi)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{W}_*(F)[-1] \otimes \tilde{W}_*(\Phi)[-1] & \to & \tilde{W}_*(F * \Phi)[-1] \end{array}$$

все стрелки, кроме, возможно, верхней горизонтальной, являются гомотопическими эквивалентностями. Следовательно, и эта стрелка — эквивалентность.

***Следствие* 2.1**. *Если* F m*-ациклична, а* Φ n*-ациклична, то* $F * \Phi$ $(m+n+2)$*-ациклична.*

Возьмем в качестве Φ k-мерную сферу, т. е. симплициальную схему всех собственных подмножеств $(k+2)$-элементного множества $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{k+1}\}$. Поскольку $H_i(\Phi) = 0$ при $i \neq k$ и $\tilde{H}_k(\Phi) = Z$, причем образующим является класс гомологий цикла $\tau = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j (\vartheta_0, \ldots, \widehat{\vartheta}_i, \ldots, \vartheta_k)$, из леммы 2.2 получаем такое следствие.

***Следствие* 2.2**. *Если* Φ — k*-мерная сфера, то* $\tilde{H}_n(F * \Phi) = \tilde{H}_{n-k-1}(F)$. *Этот изоморфизм переводит класс цикла* $\sigma \in \tilde{C}_{n-k-1}(F)$ *в класс цикла* $\sigma * \tau \in \tilde{C}_n(F * \Phi)$.

3. Симплициальная схема унимодулярных реперов. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим через $GL_n(A)$ группу обратимых $(m \times n)$-матриц над кольцом A, через $M_{n,m}(A)$ множество всех $(n \times m)$-матриц над A. Обозначим, далее, через A^∞ свободный левый A-модуль со счетным базисом $e_1, \ldots, e_n, \ldots$, через A^n его подмодуль с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Элементы из A^n будем, как правило, представлять столбцами их координат в базисе $e_1, \ldots, e_n$, тем самым отождествляя A^n с $M_{n,1}(A)$. Если $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k \in A^n$, то будем отождествлять последовательность $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ с соответствующей матрицей из $M_{n,k+1}(A)$. Положим также $GL(A) = \varinjlim GL_n(A)$ и будем отождествлять эту группу с подгруппой $\mathrm{Aut}_A(A^\infty)$.

Лемма 3.1. *Пусть* P — A*-модуль,* $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k \in P$. *Тогда следующие условия равносильны*:

a) $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k$ *образуют базис свободного прямого слагаемого* P;

b) *существуют* $w_0, \ldots, w_k \in P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ *такие, что* $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$ (*символ Кронекера*).

Доказательство. a) $\to$ b). Пусть $P = P_1 \oplus P_2$, где P_1 — свободный модуль с базисом $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k$. Тогда любой $p \in P$ однозначно записывается в виде $p = \lambda_0\vartheta_0 + \ldots + \lambda_k\vartheta_k + p_2$, где $\lambda_i \in A$, $p_2 \in P_2$, и мы можем определить функционалы w_j формулами $w_j(p) = \lambda_j$.

b) $\to$ a). Положим $P_2 = \ker w_0 \bigcap \ldots \bigcap \ker w_k$. Для любого $p \in P$ элемент $p - w_0(p)\vartheta_0 - \ldots - w_k(p)\vartheta_k$ лежит в P_2. Наоборот, если $p = \lambda_0\vartheta_0 + \ldots + \lambda_k\vartheta_k + p_2$, где $p_2 \in P_2$, то $\lambda_j = w_j(p)$ и $p_2 = p - w_0(p)\vartheta_0 - \ldots - w_k(p)\vartheta_k$. Таким образом, любой $p \in P$ однозначно записывается в виде $\lambda_0\vartheta_0 + \ldots + \lambda_k\vartheta_k + p_2$, где $\lambda_i \in A$, $p_2 \in P_2$ и $P = P_1 \oplus P_2$, где P_1 — свободный модуль с базисом $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k$.

Если выполнены равносильные условия леммы 3.1, то будем говорить, что элементы $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k$ в совокупности унимодулярны или образуют унимодулярный репер.

Через $Um(P) \subset \varepsilon(P)$ будем обозначать симплициальную схему, k-симплексами которой являются такие множества $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k\}$, что ϑ_i — унимодулярный в совокупности. Симплициальную схему $Um\ (A^\infty)$ будем обозначать через U.

Лемма 3.2. a) *Если* P *— прямое слагаемое модуля* Q *и* $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k \in P$, *то* ϑ_i *унимодулярны в совокупности в модуле* P *в том и только в том случае, когда они унимодулярны в совокупности в модуле* Q. *В частности,* $\varepsilon(A^n) \bigcap U = Um(A^n)$.

b) *Пусть* $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k \in A^n$, $w'_0, \ldots, w'_k \in M_{1,n}(A)$. *Если* $(w'_0, \ldots, w'_k)^T \left(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k\right) \in GL_k(A)$, *то* $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ *— унимодулярный репер*.

c) *Пусть* $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k \in A^n$ и $\vartheta = (*, \ldots, *, 1)^T \in A^{n+1}$. *Тогда унимодулярность репера* $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ *равносильна унимодулярности репера* $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k, \vartheta)$.

d) *Если* $\alpha \in GL(A)$, *то реперы* $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ *и* $(\alpha\vartheta_0, \ldots, \alpha\vartheta_k)$ *унимодулярны одновременно* $(\vartheta_i \in A^\infty)$.

e) *Унимодулярность репера* $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ *эквивалентна унимодулярности репера* $(\vartheta_0, \vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k + \lambda_k\vartheta_0)$.

Доказательство. a) Пусть $Q = P \oplus P'$. Допустим, что ϑ_i унимодулярны в Q и $w_i \in Q^*$ — такие функционалы, что $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$. Обозначим $\overline{w}_i(\vartheta_j) = w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$ и, следовательно, ϑ_j унимодулярны в P. Наоборот, допустим, что ϑ_i унимодулярны в P и $w_i \in P^*$ — такие функционалы, что $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$. Обозначим через π проекцию Q на P, тогда $w_i\pi \in Q^*$ и $(w_i\pi)(\vartheta_j) = w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$. Следовательно, ϑ_j унимодулярны в Q.

b) Обозначим через α матрицу $(w'_0, \ldots, w'_k)^T \left(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k\right)$ и положим $\alpha^{-1}(w'_0, \ldots, w'_k)^T = (w_0, \ldots, w_k)^T$. Тогда $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$ и, следовательно, репер $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ унимодулярен.

c) Допустим, что репер $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ унимодулярный. Выберем $w_0, \ldots, w_k \in M_{1,n}(A) = (A^n)^*$ так, что $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} w_0 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ w_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & * \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & 1 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{k+2}(A),$$

а репер $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k, \vartheta)$ унимодулярен согласно п. b). Обратное утверждение очевидно.

d) Если $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k$ унимодулярны в совокупности и $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$, то $(w_i\alpha^{-1})(\alpha\vartheta_j) = \delta_{ij}$, а значит, $\alpha\vartheta_j$ унимодулярны в совокупности.

e) Если $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k)$ — унимодулярный репер и $w_i(\vartheta_j) = \delta_{ij}$, то

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ \ldots \\ w_k \end{pmatrix} \left(\vartheta_0, \vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k + \lambda_k\vartheta_0\right) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_k \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in GL_{k+1}(A).$$

Следовательно, $(\vartheta_0, \vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k + \lambda_k\vartheta_0)$ — унимодулярный репер согласно п. b).

Стабильным рангом кольца A, которое обозначается через $s.r.A$, называется наименьшее натуральное число n такое, что для любого унимодулярного столбца $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ существуют такие элементы $\mu_1, \ldots, \mu_n \in A$, что столбец $(\lambda_1 + \mu_1\lambda_0, \ldots, \lambda_n + \mu_n\lambda_0)^T$ также унимодулярен. Если такие n не существуют, то будем говорить, что $s.r.A = \infty$ [2]. Согласно теореме Басса [1] для нетерового коммутативного кольца A $s.r.A \le \dim \operatorname{Max} A + 1$, где $\operatorname{Max} A$ — спектр максимальных идеалов A. В частности, $s.r.A \le \dim A + 1$.

Доказательство следующего известного и тривиального факта можно найти, например, в [1].

Лемма 3.3. *Если* $n \ge s.r.A + 1$, *то группа* $GL_n(A)$ *транзитивно действует на множестве унимодулярных столбцов высоты* n.

Лемма 3.4. *Предположим, что столбец* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots, \lambda_m)^T$ *унимодулярен и* $n \ge s.r.A$. *Тогда к* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *можно прибавить такие линейные комбинации* $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m$, *что соответствующий столбец высоты* n *унимодулярен.*

Доказательство. Найдем такие μ_i, что $\sum_{i=1}^m \mu_i\lambda_i = 1$. Столбец $\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \sum_{i=1}^m \mu_i\lambda_i\right)^T$, очевидно, унимодулярен. Согласно определению стабильного ранга найдутся такие $\theta_1, \ldots, \theta_n$, что столбец

$$\left(\lambda_1 + \theta_1, \left(\sum_{i=1}^m \mu_i\lambda_i\right), \ldots, \lambda_n + \theta_n\left(\sum_{i=1}^m \mu_i\lambda_i\right)\right)^T$$

унимодулярен.

Предложение 3.1. *Предположим, что* $n \ge s.r.A + 1$ *и* $\vartheta \in A^\infty$ — *унимодулярный столбец. Тогда*:

a) *существует такая* $\alpha \in GL(A)$, *что* $\alpha \cdot A^n = A^n$, $\alpha \cdot (A^n + e_{n+1}) = A^n + e_{n+1}$ *и n-я координата* $\alpha\vartheta$ *равна единице*;

b) *существует такое* $\vartheta' \in A^{n+1} + e_n$, *что* ϑ *и* ϑ' *унимодулярны в совокупности.*

Доказательство. a) Пусть $\vartheta = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots, \lambda_m)^T$ согласно лемме 3.4, а также существует такая матрица $\beta \in M_{n,m-n}(A)$, что столбец $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T + \beta(\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m)^T$ унимодулярен. В силу леммы 3.3 найдется такой $\gamma \in GL_n(A)$, что

$$\gamma\left[(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T + \beta(\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m)^T\right] = (0, \ldots, 1)^T.$$

Теперь достаточно положить $\alpha = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) При доказательстве этого утверждения мы можем заменить ϑ на $\alpha\vartheta$ для любой $\alpha \in GL(A)$ такой, что $\alpha \cdot (A^{n-1} + e_n) = A^{n-1} + e_n$. Действуя, как и при доказательстве п. a), можем считать, что $\vartheta = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \ldots)^T$, где столбец $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})^T$ унимодулярен. В этом случае можно взять $\vartheta' = e_n$.

4. Теорема ацикличности. Пусть $F \subset \varepsilon(N)$ — симплициальное множество, $X \subset V$ и d — целое число. Тогда справедлива следующая теорема.

Предложение 4.1. *Пусть* $F \subset \varepsilon(N)$ *— симплициальная схема,* $X \subset V$ *и* d *— целое число. Кроме того, пусть*:

a) $\varepsilon(X) \bigcap F$ d*-ациклична*;

b) *для любого* $(k-1)$*-симплекса* $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\} \in F$ *такого, что* $v_i \notin X$ *при* $i = 1, \ldots, k$, *схема* $\varepsilon(X) \bigcap F_s$ $(d-k)$*-ациклична.*

Тогда F d*-ациклична.*

Доказательство. Обозначим через F_i симплициальную подсхему F, симплексом которой являются те $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p\} \in F$, для которых не более i среди элементов $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p$ лежат вне X. Тогда $F_0 \subset F_s \subset \ldots$, $F = \bigcup F_k$ и $F_0 = \varepsilon(X) \bigcap F$. Индукцией по k докажем, что F_k d-ациклична. $F_0 = \varepsilon(X) \bigcap F$ d-ациклична по условию. Пусть F_k d-ациклична. Покажем, что F_{k+1} также d-ациклична. Рассмотрим такой k-симплекс $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\} \in F$, что $\vartheta_i \notin X$ при $i = 0, \ldots, k$, и положим $st(s) = \bigcup\limits_{S \subset r \in F_{k+1}} \overline{r}\ st(s) = \bigcup\limits_{S \subset r \in F_{k+1}} \overline{r}$. Тогда $F_{k+1} = F_k \bigcup \bigcup\limits_s st(s)$, кроме того, легко видеть, что:

1) $st(s) = \left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right) * \overline{s}$;

2) $st(s) \bigcap F_k = \left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right) * \dot{s}$;

3) $st(s) \bigcap st(s') \subset F_k$ при $s \neq s'$.

Теперь достаточно проверить сохранение d-ацикличности при присоединении очередной $st(s)$. При этом присоединение, согласно свойствам $1-3$, приведет к тому, что получилось на предыдущем этапе: $\left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right) * \overline{s}$ приклеивается относительно $\left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right) * \overline{s}$. Тогда симплициальная схема $\left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right) * \overline{s}$ бесконечно ациклична в силу предложения 2.1 (так как симплициальная схема $\overline{s}$-бесконечно ациклична). Схема $\dot{s}$ $(k-2)$-ациклична ($|\overline{s}| \cong s^{k-1}$ — сфера), и, следовательно, $\left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right) * \dot{s}$ $\left((d-k-1) + (k-2) + 2 = d-1\right)$-ациклична. Теперь осталось воспользоваться следующей леммой.

Лемма 4.1. *Пусть* Φ *и* Ψ *— подсхемы симплициальной схемы* F. *Предположим, что* Φ *и* Ψ d*-ацикличны, а* $\Phi \bigcap \Psi$ $(d-1)$*-ациклична. Тогда* $\Phi \bigcup \Psi$ d*-ациклична.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть точную последовательность Майера – Веториса

$$\ldots, \ \tilde{H}_i(F) \oplus \tilde{H}_i\left(F \bigcup \Phi\right) \to \tilde{H}_i\left(F \bigcup \Phi\right) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}\left(F \bigcap \Phi\right) \to \ldots .$$

Предложение 4.2. *В обозначениях предложения* 4.1 *предположим, что*:

a) *для любого симплекса* $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\} \in F$ *такого, что* $\vartheta_i \notin X$ *при* $i = 0, \ldots, k$, *симплициальная схема* $\left(\varepsilon(X) \bigcap F_s\right)$ $(d-k+1)$*-ациклична*;

b) *существует вершина* $\{y_0\} \in F$ *такая, что* $\varepsilon(X) \bigcap F \subset F_{\{y_0\}}$.

Тогда симплициальная схема F $(d+1)$*-ациклична.*

Доказательство. Сохраним обозначения из предыдущего доказательства. При переходе от F_0 к F_1 присоединим прежде всего $st(\{y_0\}) = \left(\varepsilon(X) \bigcap F_{\{y_0\}}\right) * \{y_0\}$. По условию $\varepsilon(X) \bigcap F_{\{y_0\}} = \varepsilon(X) \bigcap F = F_0$, так что симплициальная схема $F_0 \bigcup st(\{y_0\})$ совпадает с $st(\{y_0\})$ и, следовательно, бесконечно ациклична (а значит, и $(d+1)$-ациклична). На последующих этапах $(d+1)$-ацикличность сохраняется, как и в доказательстве предложения 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть* A *— ассоциативное кольцо с единицей. Тогда симплициальная схема* $\varepsilon(A^n) \bigcap U = Um(A^n)$ $(n-r-1)$*-ациклична.*

Доказательство проведем индукцией по n. Если $n = 0$, то $n - r - 1 \le -2$ и доказывать нечего. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при всех $n \le N$.

Лемма 4.2. *Пусть* $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\} \in U$. *Если* $n - k \le N$, *то симплициальная схема* $\varepsilon(A^n) \bigcap U_s$ $(n - r - k - 1)$*-ациклична.*

Доказательство проведем индукцией по n. Утверждение правильно при $n - r - k < -1$, тем самым можно считать, что $n \ge r + k \ge r + 1$. Справедливость (или несправедливость) данного утверждения, очевидно, сохраняется при применении к реперу s любого автоморфизма A^∞, сохраняющего A^n. Согласно предложению 3.1 а) мы можем таким образом считать, что n-я координата ϑ_k равна единице. Запишем $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{k-1}$ в виде $\vartheta_i = \lambda_i \vartheta_k + \vartheta'_k$, где n-я координата ϑ'_i равна нулю. Наконец, положим

$$\varepsilon(A^n) \bigcap U_s = F, \quad X = A^{n-1}, \quad d = n - r - k - 1$$

и воспользуемся предложением 4.1. Согласно лемме 3.2 e) и c) получим

$$\varepsilon(X) \bigcap F = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}} = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}}.$$

Эта симплициальная схема d-ациклична либо по предположению индукции, либо по условию $k = 1$. Далее, если $t = \{w_1, \ldots, w_l\} \in F$ и w_i записать в виде $w_i = \mu_i \vartheta_k + w'_i$, где n-я координата w_i равна нулю, то

$$\varepsilon(X) \bigcap F_t = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{w_1, \ldots, w_l, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\}} = \varepsilon(A^{n-1}) \bigcap U_{\{w'_1, \ldots, w'_l, \vartheta v_1, \ldots, \vartheta_{k-1}\}}.$$

Эта схема $(d-l)$-ациклична по предположению индукции. Предложение 4.1 показывает, что симплициальная схема F d-ациклична.

Лемма 4.3. *Если* $n \le N$, *то симплициальная схема* $\varepsilon\left(A^n \bigcap (A^n + e_{n+1})\right) \bigcap U$ $(n-r)$*-ациклична.*

Доказательство. Положим $\varepsilon\left(A^n \bigcap (A^n + e_{n+1})\right) \bigcap U = F$, $X = A^n$, $d = n - r - 1$ и воспользуемся предложением 4.2. Пусть $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l\} \in F$, причем $\vartheta_i \notin A^n$. Тогда $\vartheta_i \in A^n + e_{n+1}$ и в силу леммы 3.2 e) и c) получаем $\varepsilon(X) \bigcap F_s = \varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{v_1, \ldots, v_l\}} =$ $= \varepsilon(A^n) \bigcap U_{\{v_1 - v_l, \ldots, v_{l-1} - v_l\}}$. Полученная симплициальная схема $(n - r - (l-1) - 1 = d - l + 1)$-ациклична либо в силу леммы 4.2, либо по условию $l = 1$. Тем самым выполнено условие предложения 4.2 a). Условие предложения 4.2 b), очевидно, выполняется, если $y_0 = e_{n+1}$. Таким образом, согласно предложению 4.2 симплициальная схема $(F - (d+1) = n - r)$-ациклична.

Лемма 4.4. *Пусть* $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l\} \in U$. *Тогда симплициальная схема* $\varepsilon\Big(A^n \cap \cap (A^n + e_{n+1})\Big) \cap U_s$ $(n-r-k)$*-ациклична при* $n-k \le N$.

Доказательство проведем индукцией по n. Если $n = r$, то утверждение нетривиально только при $k = 1$. Можно проверить, что в этом случае $\varepsilon\Big(A^n \cap (A^n + e_{n+1})\Big) \cap U_s \ne \varnothing$, где $\vartheta \in A^\infty$. Это следует из предложения 3.1 b). При $n \ge r+1$ доказательство дословно совпадает с доказательством леммы 4.2.

Лемма 4.5. $Um(A^{N+1})$ $(N-r)$*-ациклична.*

Доказательство. Положим $F = Um(A^{N+1})$, $d = N - r$, $X = A^N \bigcup (A^N + e_{n+1})$ и воспользуемся предложением 4.1. Тогда $\varepsilon(X) \cap F = \varepsilon\Big(A^N \bigcup (A^N + e_{n+1})\Big) \cap U_s$ $(N-r-l)$-ациклична согласно лемме 4.3. Если $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l\} \in F$, то $\varepsilon(X) \cap F_s = \varepsilon\Big(A^N \bigcup (A^N + e_{N+1})\Big) \cap \cap U_s$ $(N-r-l)$-ациклична согласно лемме 4.4. Предложение 4.1 показывает, что F d-ациклична.

***Следствие* 4.1.** *В условиях теоремы* 4.1 *симплициальная схема* $\varepsilon\Big(A^n \cap (A^n + e_{n+1})\Big) \cap U$ $(n-r)$*-ациклична. Кроме того, если* $s = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l\} \in U$, *то симплициальная схема* $\varepsilon(A^n) \cap U_s$ $(n-r-k-1)$*-ациклична, а* $\varepsilon\Big(A^n \cap (A^n + e_{n+1})\Big) \cap U_s$ $(n-r-k)$*-ациклична.*

Все утверждения были доказаны по ходу доказательства теоремы 4.1.

5. Обобщенная теорема. Пусть $F \subset \varepsilon(V)$ — симплициальная схема. Комплекс $\tilde{C}_*(F)$ является, очевидно, подкомплексом $\tilde{C}_*(\varepsilon(V))$. Предположим теперь, что $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{p+1}\} \in \in \varepsilon(\vartheta)$, причем все собственные грани симплекса $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{p+1}\}$ лежат в F, т. е. $\{\vartheta_0, \ldots, \hat{\vartheta}_i, \ldots, \vartheta_{p+1}\} \in F$ при всех $i = 0, \ldots, p+1$, где знак $\hat{\vartheta}_i$ означает, что компонента ϑ_i опускается. Тогда p-мерная цепь

$$d\Big(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{p+1}\Big) = \sum_{i=0}^{p+1} \big((-1)\big)^i \Big(\vartheta_0, \ldots, \hat{\vartheta}_i, \ldots, \vartheta_{p+1}\Big)$$

лежит в $\tilde{C}_*(F)$ и является, очевидно, циклом. Такие циклы будем называть стандартными p-мерными циклами симплициальной схемы F и обозначать $\big[\vartheta_0, \ldots, \vartheta_p\big]$.

Согласно [4] для произвольного дедекиндова кольца A группа $\tilde{H}_{n-2}\Big(Um(A^n)\Big)$ порождается стандартными циклами. В данной работе мы рассмотрим кольца, у которых все поля вычетов бесконечны, и докажем в этом случае более общий результат. Всюду в данной работе (если не оговорено противное) кольцо A обозначает нетерово коммутативное кольцо, у которого все поля вычетов бесконечны. Обозначим через X спектр максимальных идеалов кольца A: $X = \operatorname{Max} A$. Пространство X нетерово в силу нетеровости A. Через d мы обозначим размерность Крулля X: $d = \dim X$ [1]. Для произвольной точки $x \in X$ через $k(x)$ обозначим поле вычетов в точке x: $k(x) = A/\mu_x$, где μ_x — соответствующий максимальный идеал кольца A. Если $a \in A$, то через $a(x)$ обозначим значение a в точке x, т. е. образ a

при канонической проекции $A \to A/\mu_x = k(x)$; если $\vartheta = \left(a_1, \ldots, a_n\right)^T \in A^n$, то через $v(x) \in k(x)^n$ обозначим столбец $\left(a_1(x), \ldots, a_n(x)\right)^T$.

Пусть $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k \in A^n$ и $x \in X$. Через $\operatorname{rank}_x\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right)$ обозначим ранг $(n \times k)$-матрицы $\left(\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_k(x)\right)$ над полем $k(x)$. Положим, кроме того, $F_j = \left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right) = \left\{x \in X : \operatorname{rank}_x\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right) < j\right\}$. Очевидно, что $F_j = \left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right) = X$, если $j > \min(k, n)$. Кроме того, если $j \le \min(k, n)$, то $x \in F_j = \left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right)$ в том и только в том случае, когда все j-миноры матрицы $\left(\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_k(x)\right)$ равны нулю, т. е. когда все j-миноры матрицы $\left(\vartheta_1(x), \ldots\right.$ $\left.\ldots, \vartheta_k(x)\right) \in M_{n,k}(A)$ равны нулю в точке x. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть I — идеал кольца A, порожденный всевозможными j-минорами матрицы $\left(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k\right)$. Тогда $F_j\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right) = V(I)$. В частности, $F_j\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right)$ всегда замкнуто в X.*

Теперь, чтобы получить основной результат данной работы, сформулируем и докажем несколько следующих лемм.

Лемма 5.2. *Пусть A — произвольное коммутативное кольцо и $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k \in A^n$. Тогда следующие условия равносильны*:

a) $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$ — *унимодулярный репер*;

b) *строки матрицы* $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$ *порождают модуль*;

c) $F_k\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right) = \varnothing$;

d) *идеал I, порожденный k-минорами матрицы $\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right)$, совпадает с A.*

Доказательство. Условие b) в точности означает существование таких строк $\omega_1, \ldots, \omega_k \in M_{1,n}(A)$, что $\omega_i\left(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k\right) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 находится в i-й строке. Таким образом, условия a) и b) равносильны для любого (не обязательно коммутативного) кольца A. Если $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$ — унимодулярный репер, то для любого $x \in X$ репер $(v_1(x), \ldots, v_k(x))$ также унимодулярен, т. е. строки матрицы $(\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_k(x))$ порождают $M_{1,k}\left(k(x)\right)$ и, следовательно, ранг этой матрицы равен k. Тем самым из условия a) следует условие c).

Условия c) и d) равносильны согласно лемме 5.1.

Предположим, наконец, что выполнено условие d). Зафиксируем некоторые k строк матрицы $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$. Соответствующую $(k \times k)$-подматрицу обозначим через α, а взаимную к ней матрицу — через $\tilde{\alpha}$. Формула $\tilde{\alpha} \cdot \alpha = \det \alpha \cdot 1_k$ показывает, что подмодуль, порожденный строками α, содержит $\det \alpha \cdot M_{1,k}(A)$. Таким образом, подмодуль, порожденный строками $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$, содержит $I \cdot M_{1,k}(A) = M_{1,k}(A)$.

Лемма 5.3. *Предположим,* что $k < n$ *и заданы k-реперы $\left(\vartheta_1^i, \ldots, \vartheta_k^i\right)$, $l \le i \le N$, такие, что при всех i и $j \ge 0$ выполнено неравенство $\operatorname{codim} F_i\left(\vartheta_1^i, \ldots, \vartheta_k^i\right) \ge k + 1 - j$. Тогда найдется $\vartheta \in A^n$ такой, что при всех i и $j \ge 0$ $\operatorname{codim} F_i\left(\vartheta_1^i, \ldots, \vartheta_k^i\right) \ge k + 2 - j$.*

Доказательство. Ограничимся индексами $j \le k + 1$. Заметим, что при любом выборе вектора $F_i\left(\vartheta_1^i, \ldots, \vartheta_k^i, \vartheta\right) \subset F_i\left(\vartheta_1^i, \ldots, \vartheta_k^i\right)$. Поскольку $\operatorname{codim} F_i\left(v_1^i, \ldots, v_k^i\right) \ge k + 1 - j$, то достаточно подобрать вектор v таким образом, чтобы $F_i\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\vartheta\right)$ не содержал целиком ни одной компоненты $F_i\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i\right)$ коразмерности $k+1-j$. Если Y — такая компонента, то $Y\not\subset F_{j-1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i\right)$, поскольку $\operatorname{codim} F_{j-1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i\right)\geq k+2-j$, и мы можем выбрать точку $y\in EY-F_{j-1}\left(v_1^i,\ldots,v_k^i\right)$. Ранг матрицы $\left(v_1^i(y),\ldots,v_k^i(y)\right)$ равен $j-1$. Для того чтобы $y\notin F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\vartheta\right)$, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\vartheta(y)$ не лежал в линейном подпространстве $\left\langle\vartheta_1^i(y),\ldots,\vartheta_k^i(y)\right\rangle$ размерности $j-1\leq k<n$. Выполнив эту процедуру для всех $i,j\leq k+1$ и всех компонент, получим конечное $S\subset X$ и для любой $y\in S$ конечный набор собственных линейных подпространств в $k(y)^n$ таких, что если $\vartheta(y)$ не лежит в соответствующих подпространствах при всех $y\in S$, то вектор $k(y)$ удовлетворяет требованиям леммы. Поскольку поле бесконечно, то объединение конечного числа собственных подпространств $k(y)^n$ не может покрыть все пространство $k(y)^n$ и, значит, найдется $\vartheta_y\in k(y)^n$, не лежащий в соответствующих подпространствах. Теперь осталось заметить, что согласно китайской теореме об остатках найдется такой $\vartheta\in A^n$, что $\vartheta(y)=\vartheta_y$ при всех $y\in S$.

Лемма 5.4. *Предположим, что* $k<n$ *и задано конечное множество унимодулярных* k*-реперов* $\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i\right)$. *Для любого* $r=1,\ldots,n-k$ *можно построить векторы* $\omega_n,\ldots,\omega_r$ *такие, что* $\operatorname{codim} F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_r\right)\geq n+1-j$ *при* $1\leq j\leq k+r$.

Доказательство. Применив несколько раз лемму 5.3, построим такие векторы $\omega_i,\ldots,\omega_{n-k}$, что $\operatorname{codim} F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_r\right)\geq n+1-j$ при всех i и j. Это доказывает справедливость данного утверждения при $r=n-k$. Воспользуемся теперь обратной индукцией по r. Пусть $\operatorname{codim} F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_r\right)\geq n+1-j$ при $l\leq j\leq k+r+1$. Покажем, что можно подобрать такие $a_i,\ldots,a_r\in A$, что $\omega_1^l=\omega_i,\ldots,\ a_i,\ \omega_{r+1},\ldots,\ \omega_r^l=$ $=\omega_r+a_r\omega_{r+1}$ удовлетворяют требованиям леммы. Заметим, что при любом a_i справедливо включение

$$F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_r\right)\subset F_{j-1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_{r+1}\right),$$

и так как $\operatorname{codim} F_{j+1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_r\right)\geq n-j$, достаточно подобрать a_i таким образом, чтобы при $l\leq j\leq k+r+1$ $F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1^i,\ldots,\omega_r^i\right)$ не содержало ни одной компоненты $F_{j+1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_i,\ldots,\omega_{r+1}\right)$ коразмерности $n-j$. Пусть Y — такая компонента. Поскольку $\operatorname{codim} F_{j+1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_n,\ldots,\omega_{r+1}\right)\geq n+1-j$, то $Y\not\subset F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_i,\ldots,\omega_{r+1}\right)$. Выберем точку $y\in Y-F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1,\ldots,\omega_{r+1}\right)$, тогда $\dim_{k(y)}\left\langle\vartheta_1^i(y),\ldots,\vartheta_k^i(y),\right.$ $\left.\omega_1(y),\ldots,\omega_{r+1}(y)\right\rangle=j$ и необходимо подобрать a_i так, чтобы

$$\dim_{k(y)}\left\langle\vartheta_1^i(y),\ldots,\vartheta_k^i(y),\,\omega_1(y)+a_1(y)\omega_{r+1}(y),\ldots,\omega_r(y)+a_r(y)\omega_{r+1}(y)\right\rangle\ =\ j\,.$$

Действуя так же, как при доказательстве леммы 5.3, видим, что достаточно установить следующую лемму.

Лемма 5.5. *Пусть* k *— бесконечное поле и задано конечное число* $k+r+1$ *реперов* $\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1^i,\ldots,\omega_{r+1}^i\right)$, *где* $k<n$, $r<n-k$, *причем векторы* $\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i$ *линейно независимы, а векторы* $\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1^i,\ldots,\omega_{r+1}^i$ *линейно зависимы. Тогда найдутся такие* $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in k$, *что*

$$\left\langle \vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1^i+\lambda_1\omega_{r+1}^i,\ldots,\omega_r^i+\lambda_r\omega_{r+1}^i\right\rangle = \left\langle \vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1^i,\ldots,\omega_{k+1}^i\right\rangle$$

при всех i.

Доказательство. Зафиксируем i и запишем соотношение линейной зависимости $\theta_1^i\vartheta_1^i+\ldots+\theta_k^i\vartheta_k^i+\sigma_1^i\omega_1^i+\ldots+\sigma_{r+1}^i\omega_{r+1}^i=0$. В силу линейной независимости $\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i$ не все коэффициенты σ равны нулю. При произвольном выборе λ имеем

$$\left\langle \vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega_1^i+\lambda_1\omega_{r+1}^i,\ldots,\omega_r^i+\lambda_r\omega_{r+1}^i\right\rangle \ni$$

$$\ni \theta_1^i\vartheta_1^i+\ldots+\theta_k^i\vartheta_k^i+\sigma_1^i(\omega_1^i+\lambda_1\omega_{k+1}^i)+\ldots+\sigma_r^i(\omega_r^i+\lambda_r\omega_{r+1}^i) =$$

$$= \left(\sigma_1^i\lambda_1+\ldots+\sigma_r^i\lambda_r-\sigma_{r+1}^i\right)\cdot\omega_{r+1}^i.$$

Таким образом, достаточно подобрать λ так, чтобы они не обращали в нуль ни одну из линейных форм $\sigma_1^i\lambda_1+\ldots+\sigma_r^i\lambda_r-\sigma_{r+1}^i$. Существование таких λ очевидно вследствие бесконечности поля k.

***Следствие* 5.1.** *Пусть* $k\le n-d-1$ *и заданы унимодулярные реперы* $\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i\right)$. *Тогда найдется такой вектор* $\omega\in A^n$, *что все реперы* $\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega\right)$ *унимодулярны.*

Доказательство. Применив лемму 5.4 с $r=1$, найдем вектор $\omega\in A^n$ такой, что $F_j\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\,\omega\right)\ \ge\ n+1-j$ при $j\le k+1$. В частности, $\operatorname{codim}F_{k+1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\omega\right)\ \ge\ \ge n-k\ge d+1$ и, значит, $F_{k+1}\left(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\omega\right)=\varnothing$, т. е. репер $(\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_k^i,\omega)$ унимодулярен.

Теорема 5.1. *Симплициальная схема* $Um(A^n)$ $(n-d-2)$-*ациклична, группа* $\tilde H_{n-d-1}(Um(A^n))$ *порождается стандартными циклами.*

Доказательство. То, что симплициальная схема $Um(A^n)$ $(n-d-2)$-ациклична, следует из теоремы 4.1, но в рассматриваемом случае можно дать более простое доказательство. Пусть $r\le n-d-2$ и $\sum n_i\left(\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_r^i\right)$ — r-мерный цикл. Согласно следствию 5.1 существует такое $\omega\in A^n$, что $\left\{\omega,\vartheta_1^i,\ldots,\vartheta_r^i\right\}\in Um(A^n)$ при любом i. Осталось заметить, что

$$\sum n_i\left(\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_r^i\right) = d\left(\sum n_i\left(\omega,\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_r^i\right)\right).$$

Рассмотрим теперь произвольный $(n-d-1)$-мерный цикл $z=\sum n_i\left(\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_{n-d-2}^i\right)$. Согласно следствию 5.1 можно найти такой $\omega\in A^n$, что $\left\{\omega,\vartheta_0^i,\ldots,\widehat{\vartheta}_j^i,\ldots,\widehat{\vartheta}_{n-d-2}^i\right\}\in Um(A^n)$ при любом i и $j=0,\ldots,n-d-2$. Тем самым $\left[\omega,\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_{n-d-2}^i\right]$ — стандартные циклы и

$$d\left(\sum n_i\left(\omega,\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_{n-d-2}^i\right)\right)=\sum n_i\left[\omega,\vartheta_0^i,\ldots,\vartheta_{n-d-2}^i\right].$$

Приведенные выше рассуждения без изменений переносятся на комплекс, рассмотренный ван дер Калленом [6]. Комплекс ван дер Каллена $K_*\left(Um(A^n)\right)$ является подкомплексом $C_*\left(Um(A^n)\right)$, где $K_p\subset C_p$ — свободная абелева группа, порожденная такими последовательностями $\left(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\right)$, что ϑ_i попарно различны и $\left\{\vartheta_0,\ldots,\vartheta_p\right\}\in Um(A^n)$.

Теорема 5.2. *Комплекс* $\tilde{K}_*\left(Um(A^n)\right)$ $(n-d-2)$*-ацикличен, группа* $H_{n-d-2}\left(\tilde{K}_*\left(Um(A^n)\right)\right)$ *порождается стандартными циклами, т. е. циклами вида*

$$\left[\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{n-d-1}\right]=d\left(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{n-d-1}\right),$$

где v_i *попарно различны и* $\left(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{n-d-1}\right)$ *— унимодулярный репер для всех* $i=0,\ldots,n-d-1$.

Литература

1. *Басс Х.* Алгебраическая К-теория. – М.: Мир, 1973.
2. *Вассерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 17 – 27.
3. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. – М.: Мир, 1976.
4. *Зайналов Б. Р.* Вычисление образующих гомологий симплициальных схем унимодулярных реперов над дедекиндовым кольцом // Материалы респ. науч. конф. „Актуальные проблемы математического анализа” (9 – 10 ноября 2012 г.). – Самарканд: Самарканд. гос. ун-т, 2012. – Ч. 1. – С. 86 – 87.
5. *Зайналов Б. Р., Суслин А. А.* Гомологическая стабилизация для дедекиндовых колец арифметического типа // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1464 – 1476.
6. *Van der Kallen W.* Homology stability for linear groups // Invent. Math. – 1980. – № 3. – P. 269 – 295.
7. *Suslin A. A.* Stability in algebraic K-theory // Lect. Notes Math. – 1982. – **966**. – P. 304 – 334.

Получено 06.04.15