УДК 519.21

А. А. Дороговцев, О. Л. Изюмцева (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ

This survey article is devoted to the local times of self-intersection as the most important geometric characteristics of random processes. The trajectories of random processes are, as a rule, very nonsmooth curves. This is why to characterize the geometric shape of the trajectory it is impossible to use the methods of differential geometry. Instead of this, one can consider the local times of self-intersection showing how much time the process stays in "small" vicinities of its self-crossing points. In our paper, we try to describe the contemporary state of the theory of local times of self-intersection for Gaussian and related processes. Different approaches to the definition, investigation, and application of the local times of self-intersection are considered.

Статтю присвячено локальним часам самоперетину, що є однією з найважливіших геометричних характеристик траєкторій випадкового процесу. Як правило, траєкторії випадкового процесу можуть бути дуже нерегулярними. Тому їх геометричні властивості не можуть вивчатися методами диференціальної геометрії. Геометричними характеристиками випадкового процесу є його часи перебування у нескінченно малих околах своїх точок самоперетину. В даній статті відображено сучасний стан теорії локальних часів самоперетину для гауссівських та споріднених із ними випадкових процесів. Наведено різноманітні способи визначення, вивчення та застосування локальних часів самоперетину для різних класів випадкових процесів.

Введение. В данной статье авторы попытались отразить современное состояние области теории случайных процессов, посвященной локальным временам самопересечения. Понятие локального времени самопересечения возникает естественным образом при исследовании геометрических свойств траекторий случайных процессов. Интерес к этому вопросу вызван несколькими обстоятельствами. Во-первых, случайные кривые широко используются для моделирования физических объектов, таких как, например, „длинные" молекулы белков, полимеров и т. д. [1 – 4]. Такие кривые не должны иметь самопересечения. Поэтому учет „количества" самопересечений у траектории случайного процесса имеет реальное прикладное значение. Во-вторых, траектории широкого класса случайных процессов, таких как, например, винеровский, диффузионный и т. д., являются недифференцируемыми функциями и имеют свойства, отличающиеся от свойств гладких кривых. Оказалось, что обычные средства дифференциальной геометрии не могут быть использованы при изучении негладких случайных процессов. Это обусловлено, прежде всего, их хаотичностью, которая приводит к появлению множества точек самопересечения. Локальное время самопересечения было предложено с целью охарактеризовать поведение процесса в инфинитезимально малых окрестностях своих точек самопересечения. В отличие от обычного локального времени в точке для одномерных случайных процессов, локальное время самопересечения не может быть определено с помощью простой аппроксимации δ-функции. Необходима дополнительная компенсация расходящихся интегралов, названная, по аналогии с физикой, перенормировкой. Полученные объекты характеризуют геометрию траекторий процесса. Так, в асимптотическом разложении площади „малой" трубки вокруг траектории случайного процесса содержатся, в качестве коэффициентов, как раз локальные времена самопересечения. Возможны различные подходы к перенормировке и исследованию локальных времен самопересечения. В данной статье рассматриваются гауссовские и близкие к ним процессы. Соответственно, используется аппарат гауссовского анализа (разложение Ито – Винера, преобразование Фурье – Винера и т. д.). Мы постарались привести основные и характерные результаты, касающиеся различных подходов. Конечно, статья не может содержать все известные факты о локальных временах самопересечения. Выбор материала связан с предпочтениями авторов и ограничением объема. Так, в работу не вошли факты, касающиеся локальных времен самопересечения устойчивых процессов и изоморфизма Дынкина. По этому поводу мы отсылаем читателя к монографиям [69, 70].

Статья состоит из нескольких частей. Первая часть содержит результаты, касающиеся построения локальных времен самопересечения для винеровского процесса, а также асимптотического разложения площади малой трубки вокруг траектории винеровского процесса. Во второй части рассматриваются обобщенные функционалы белого шума, а также такие инструменты их исследования, как разложение Ито – Винера и преобразование Фурье – Винера. В третьей части обсуждаются свойства гауссовского процесса, достаточные для существования его локального времени. В четвертой части приводится построение перенормировки локального времени самопересечения для процессов, полученных с помощью компактных возмущений винеровского процесса. В пятой части обсуждаются локальные времена самопересечения для диффузионных процессов на плоскости. В последней части работы мы рассматриваем гауссовские процессы, получающиеся действием оператора вторичного квантования на винеровский процесс. Каждому такому процессу, являющемуся функционалом белого шума, соответствует некоторый линейный непрерывный оператор. В случае, когда оператор непрерывно обратим, мы доказываем существование локального времени в точке так же, как и у одномерного винеровского процесса. Кроме того, доказана непрерывная зависимость локального времени от оператора, порождающего процесс. Поскольку статья является обзорной, многие утверждения приводятся либо без доказательств, либо с указанием только основных шагов. Однако в приведенных ссылках читатель может найти подробное изложение.

1. Геометрические характеристики траекторий случайных процессов. В этом пункте мы обсуждаем аналог теоремы Штейнера для траекторий случайных процессов. Пусть $K \subset \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело,

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < \varepsilon\}, \qquad K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B(x,\varepsilon).$$

Теорема 1.1 (Штейнер, Минковский [5, 6])**.**

$$|K_\varepsilon| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k W_k(K)\varepsilon^k.$$

Здесь $|A|$ — мера Лебега множества A, а коэффициенты $W_k(K)$ — это геометрические характеристики тела K ($W_0(K)$ — объем, $W_1(K)$ — площадь поверхности, $W_i(K)$, $i = \overline{0,n}$, — интегралы поперечных мер Минковского).

Пусть $\{x(t),\ t \in [0;1]\}$ — случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^2$. Для того чтобы понять, что могло бы служить геометрическими характеристиками траекторий x, рассмотрим поведение площади ε-трубочки вокруг траектории x. Определим приближения

$$\Gamma_\varepsilon^n = \bigcup_{k=1}^n B\left(x\left(\frac{k}{n}\right),\ \varepsilon\right).$$

Согласно формуле включения-исключения

$$\left|\bigcup_{k=1}^n B\left(x\left(\frac{k}{n}\right),\varepsilon\right)\right| = n\pi\varepsilon^2 - \sum_{k_1<k_2}\left|B\left(x\left(\frac{k_1}{n}\right),\varepsilon\right)\bigcap B\left(x\left(\frac{k_2}{n}\right),\varepsilon\right)\right| +$$

$$+ \sum_{k_1<k_2<k_3}\left|B\left(x\left(\frac{k_1}{n}\right),\varepsilon\right)\bigcap B\left(x\left(\frac{k_2}{n}\right),\varepsilon\right)\bigcap B\left(x\left(\frac{k_3}{n}\right),\varepsilon\right)\right| - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\left|B\left(x\left(\frac{1}{n}\right),\varepsilon\right)\bigcap\ldots\bigcap B(x(1),\varepsilon)\right|. \tag{1.1}$$

Для $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^2$ обозначим $b_\varepsilon^n(x_1,\ldots,x_n) = |B(x_1,\varepsilon)\cap\ldots\cap B(x_n,\varepsilon)|$. Заметим, что

$$b_\varepsilon^n(x_1,\ldots,x_n) = b_\varepsilon^n(0, x_2-x_1,\ldots,x_n-x_1) =$$

$$= p_\varepsilon^{n-1}(x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1}) =$$

$$= \varepsilon^2 p_1^{n-1}\left(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon},\ldots,\frac{x_n-x_{n-1}}{\varepsilon}\right).$$

Выберем c_{n-1} так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2(n-1)}} c_{n-1}p_1^{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})du_1\ldots du_{n-1} = 1.$$

Положим

$$\widetilde{p}_\varepsilon^{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1}) = \frac{c_{n-1}}{\varepsilon^{2(n-1)}}p_1^{n-1}\left(\frac{u_1}{\varepsilon},\ldots,\frac{u_{n-1}}{\varepsilon}\right).$$

Для любой $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{2(n-1)})$ имеет место соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2(n-1)}} \widetilde{p}_\varepsilon^{n-1}(u)\varphi(u)du \to \varphi(0), \quad \varepsilon\to 0. \tag{1.2}$$

Выражение (1.1) можно записать так:

$$\left|\bigcup_{k=1}^n B\left(x\left(\frac{k}{n}\right),\varepsilon\right)\right| =$$

$$= n\pi\varepsilon^2 - \sum_{k_1<k_2}\varepsilon^2 p_1^1\frac{\left(x\left(\frac{k_2}{n}\right) - x\left(\frac{k_1}{n}\right)\right)}{\varepsilon} +$$

$$+\sum_{k_1<k_2<k_3}\varepsilon^2 p_1^2\left(\frac{x\left(\frac{k_2}{n}\right)-x\left(\frac{k_1}{n}\right)}{\varepsilon},\frac{x\left(\frac{k_3}{n}\right)-x\left(\frac{k_2}{n}\right)}{\varepsilon}\right)-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\varepsilon^2 p_1^{n-1}\left(\frac{x\left(\frac{2}{n}\right)-x\left(\frac{1}{n}\right)}{\varepsilon},\ldots,\frac{x(1)-x\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\varepsilon}\right). \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) отдельное слагаемое в (1.3) (будучи нормированным)

$$\sum_{k_1<\ldots<k_m}\frac{c_{m-1}}{\varepsilon^{2(m-1)}}p_1^{m-1}\left(\frac{x\left(\frac{k_2}{n}\right)-x\left(\frac{k_1}{n}\right)}{\varepsilon},\ldots,\frac{x\left(\frac{k_m}{n}\right)-x\left(\frac{k_{m-1}}{n}\right)}{\varepsilon}\right)\frac{1}{n^{m-1}}$$

могло бы сходиться при $\varepsilon\to 0$, $n\to\infty$ к формальному интегралу

$$\int_{\Delta_m}\prod_{i=1}^{m-1}\delta_0(x(t_{i+1})-x(t_i))d\vec{t},$$

который естественно назвать m-кратным локальным временем самопересечения процесса x (здесь $\Delta_m(t)=\{0\le t_1\le\ldots\le t_m\le t\}$, $\Delta_m(1):=\Delta_m$). Таким образом, возникшие „локальные времена самопересечения”, если их удастся хорошо определить, должны отвечать за геометрические свойства траекторий процесса x. По-видимому, наиболее длинную историю изучения имеют локальные времена самопересечения для винеровского процесса. Отметим, прежде всего, что точки самопересечения у винеровской траектории действительно есть. Соответствующий результат содержится в теореме Дворецкого – Эрдеша – Какутани.

Теорема 1.2 (Дворецкий – Эрдеш – Какутани [7, 71]). *С вероятностью* 1 *на любом отрезке времени d-мерный винеровский процесс в случае*

1) $d\ge 4$ *не имеет точек самопересечения,*

2) $d=3$ *имеет точки самопересечения только кратности* 2,

3) $d=2$ *имеет точки самопересечения произвольной кратности k.*

Тейлор в [8] доказал, что с вероятностью 1 множество

$$D_1=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\exists\, t_1\ne t_2\ne\ldots\ne t_k: w(t_1)=w(t_2)=\ldots=w(t_k)=x\right\}$$

имеет хаусдорфову размерность 2, а

$$D_2=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\exists\, t_1\ne t_2: w(t_1)=w(t_2)=x\right\}$$

— хаусдорфову размерность 1. Здесь w — винеровский процесс в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Следует также упомянуть, что условия существования точек самопересечения у произвольного марковского процесса приведены в работах [9, 10]. Вернемся к обсуждению локальных времен самопересечения для винеровского процесса в $\mathbb{R}^2$. Процедура их построения выглядит следующим образом. Для формального выражения

$$T^w_m := \int\limits_{\Delta_m} \prod_{i=1}^{m-1} \delta_0(w(t_{i+1}) - w(t_i))d\vec{t},$$

регистрирующего m-кратные самопересечения винеровского процесса в $\mathbb{R}^2$, рассмотрим аппроксимирующее его семейство случайных величин

$$T^w_{\varepsilon,m} := \int\limits_{\Delta_m} \prod_{i=1}^{m-1} f_\varepsilon(w(t_{i+1}) - w(t_i))d\vec{t}.$$

Здесь

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Предел таких величин $T^w_{\varepsilon,m}$ мог бы быть значением T^w_m. Заметим, что функции f_ε иногда выбирают по-другому. Например, пусть h — плотность распределения вероятностей на $\mathbb{R}^2$. Тогда в качестве $f_\varepsilon(x)$ можно рассмотреть $h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}h(\varepsilon^{-1}x)$. Такие приближения рассматривались в работах [11 – 15]. В частности, в качестве $f_\varepsilon(x)$ можно было бы взять функции $\dfrac{1}{\pi\varepsilon^2}\mathbb{I}_{B(0,\varepsilon)}(x)$ (см., например, [16, 17]). Нетрудно проверить, что

$$MT^w_{\varepsilon,2} \sim \frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|, \quad \varepsilon \to 0.$$

Это одна из причин расходимости семейства случайных величин $T^w_{\varepsilon,m}$ при $\varepsilon \to 0$. Предела $T^w_{\varepsilon,m}$ нет из-за сингулярностей в интеграле, возникающих при близких между собой значениях временных параметров. Для компенсации вклада „диагонали" используется процедура перенормировки, заимствованная из квантовой физики [18 – 20]. Приведем два типа перенормировок, предложенных Е. Б. Дынкиным и Дж. Розеном. Е. Б. Дынкин в [11] рассмотрел выражение

$$\Lambda^{w,\varphi}_{\varepsilon,k} = \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i))\varphi(\vec{s})d\vec{s},$$

где $\varphi \in C(\Delta_k)$, а плотность распределения вероятностей q на $\mathbb{R}^2$ имеет такие свойства:

1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |\ln\|x\||^k q(x)dx < +\infty$ для всех $k > 0$;

2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{\beta\|x\|}q(x)dx < \infty$ для некоторого $\beta > 0$.

Пусть оператор $B^l_k : C(\Delta_k) \to C(\Delta_l)$ действует по правилу

$$(B^l_k\varphi)(s_1, \ldots, s_l) = \sum_\sigma \varphi(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(k)}).$$

Здесь суммирование проводится по всем таким сюръективным отображениям $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, l\}$, что $\sigma_i \le \sigma_j$ для $i < j$. В качестве перенормировки $\Lambda^{w,\varphi}_{\varepsilon,k}$ Е. Б. Дынкиным было предложено выражение

$$\mathcal{T}^{w,\varphi}_{\varepsilon,k} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon\right)^{k-l} \int\limits_{\Delta_l} \prod_{i=1}^{l-1} q_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i))B^l_k(\varphi(\vec{s}))d\vec{s}, \quad \varphi \in C(\Delta_k).$$

Теорема 1.3 [11]. *Существует* $L_p\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{T}^{w,\varphi}_{\varepsilon,k}$ *для всех* $1 \le p < +\infty$.

Обозначим через $\mathcal{T}^{w,\varphi}_{k}$ предел случайных величин $\mathcal{T}^{w,\varphi}_{\varepsilon,k}$ при $\varepsilon \to 0$. Положим $\mathcal{T}^{w}_{k} :=$ $:= \mathcal{T}^{w,1}_{k}$. Случайная величина $\mathcal{T}^{w}_{k}$ и есть перенормированное локальное время самопересечения кратности k для винеровского процесса на плоскости.

Перенормировка Розена имеет вид

$$L^w_{\varepsilon,k} = \int\limits_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{k-1}\big\{f_\varepsilon(w(s_{i+1}) - w(s_i))\big\}d\vec{s},$$

где для случайной величины η выражение $\{\eta\}$ означает $\eta - M\eta$.

Теорема 1.4 [21]. *Существует*

$$L_2\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} L^w_{\varepsilon,k}.$$

Обозначим через L^w_k предел последовательности случайных величин $L^w_{\varepsilon,k}$ при $\varepsilon \to 0$. Случайная величина L^w_k называется перенормированным по Розену локальным временем самопересечения кратности k для винеровского процесса на плоскости. Следует отметить, что перенормировка Розена — это обобщение перенормировки С. Варадана [22] для локального времени двойного самопересечения винеровского процесса на плоскости. Оказывается, что введенные Е. Б. Дынкиным и Дж. Розеном математические объекты взаимосвязаны.

Лемма 1.1 [34].

$$L^w_2 - \mathcal{T}^w_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Лемма 1.2 [34].

$$\mathcal{T}^w_n(t) \overset{d}{=} t\sum_{k=1}^{n} C^{k-1}_{n-k}\left(\frac{1}{2\pi}\ln t\right)^{n-k}\mathcal{T}^w_k(1).$$

Здесь $\mathcal{T}^w_n(t)$ *— перенормированное по Дынкину локальное время самопересечения для* w *на* $\Delta_n(t) = \{0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t\}$.

Лемма 1.3 [34]. *Существует*

$$\int\limits_0^1 \mathcal{T}^w_k(s)ds := L_p\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 \mathcal{T}^w_{\varepsilon,k}(s)ds.$$

Следует отметить, что возможна иная точка зрения на локальные времена самопересечения. Для случайного поля

$$X : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$$

определим меру посещения следующим образом:

$$\mu_B(A) = \int\limits_B \mathbb{I}_A(X(\vec{t}))\,d\vec{t}.$$

Здесь $B \subset \mathbb{R}^2_+$, $A \subset \mathbb{R}^2$ — борелевские множества. Если мера μ_B имеет плотность $\Big($случайная неотрицательная функция $l(\cdot, B) \in L_1(\mathbb{R}^2)$ такая, что почти наверное $\mu_B(A) = \int_A l(x, B)dx\Big)$, то эта плотность была бы локальным временем поля X и для любой ограниченной борелевской функции f выполнялось бы равенство

$$\int_B f(X(t))d\vec{t} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)l(x, B)dx.$$

Определим теперь случайное поле $X : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^d$, $d = 2$ или 3, по правилу

$$X(t_1, t_2) = w(t_2) - w(t_1).$$

Дж. Розен доказал следующее утверждение.

Теорема 1.5 [24]. *Для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^2_+$ X имеет локальное время на B.*

Согласно теореме 1.5, существует случайная неотрицательная функция $l(\cdot, \Delta_2) \in L_1(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$\int_{\Delta_2} f_\varepsilon(w(t_2) - w(t_1) - x_0)d\vec{t} = \int_{\mathbb{R}^2} l(x, \Delta_2) f_\varepsilon(x - x_0)dx, \tag{1.4}$$

где, как и ранее, $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Если функция $l(\cdot, \Delta_2)$ непрерывна в точке x_0, то согласно (1.4)

$$l(x_0, \Delta_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Delta_2} f_\varepsilon(w(t_2) - w(t_1) - x_0)d\vec{t}.$$

Оказывается, что такая непрерывность имеет место для всех $x_0 \neq 0$ [24]. Для обсуждения локальных времен самопересечения важна точка $x_0 = 0$. К сожалению, как это следует из вышеизложенного, предел в (1.4) для $x_0 = 0$ был бы равен $+\infty$. С. Варадан доказал следующий факт.

Теорема 1.6 [22]. *Для каждого $t > 0$ существует предел*

$$L_2\text{-}\lim_{x \to 0} \left[\pi l(x, \Delta_2(t)) - t \ln \frac{1}{|x|}\right],$$

совпадающий с определенным ранее $L_2^w(t)$.

Траектории двумерного винеровского процесса являются очень нерегулярными кривыми на плоскости. Такие понятия, как, например, кривизна кривой, непригодны для характеризации геометрических свойств винеровской траектории. Показательным в этом плане является асимптотическое поведение площади ее ε-трубочки. Исследованию ε-трубочки винеровского процесса посвящены работы [25 – 32]. Асимптотическое поведение площади ε-трубочки вокруг траектории винеровского процесса на плоскости изучалось в работах [28, 29].

Для $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ обозначим

$$\Gamma_\varepsilon(0,T) = \bigcup_{t\in[0;T]} B(w(t),\varepsilon).$$

Исследование асимптотического поведения площади $\Gamma_\varepsilon(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ основано на оценке времени последовательного попадания w в круги радиуса ε. Здесь мы приведем краткое описание соответствующего подхода, следуя работам Ле Галля [28, 29]. Рассмотрим винеровский процесс w в $\mathbb{R}^2$ на интервале времени $[0;\zeta]$, где ζ — показательно распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от w. В этом случае площадь

$$|\Gamma_\varepsilon(0,\zeta)| = \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\tau_y^\varepsilon \le \zeta\}} dy.$$

Здесь

$$\tau_y^\varepsilon = \inf\{t \ge 0 \colon \|w(t) - y\| \le \varepsilon\}.$$

Таким образом,

$$M|\Gamma_\varepsilon(0,\zeta)| = \int\limits_{\mathbb{R}^2} P\{\tau_y^\varepsilon \le \zeta\} dy.$$

Для описания $P\{\tau_y^\varepsilon \le \zeta\}$ рассмотрим функцию

$$G(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x)\, dt, \quad x \ne 0,$$

где $p_t(x) = \dfrac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\|x\|^2}{2t}}$ — двумерная гауссовская плотность. Известно, что

$$G(x) = \frac{1}{\pi} K_0\left(\sqrt{2\lambda}\|x\|\right),$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя [72]. Поэтому при $\|x\| \to 0$

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\|x\|} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\ln 2 - \ln \lambda}{2} - \gamma\right) + o\left(\|x\|^2 \ln \frac{1}{\|x\|}\right),$$

где γ — постоянная Эйлера. Кроме того, при достаточно малых $a > 0$

$$G(x) = o(e^{-a\|x\|}), \quad \|x\| \to +\infty.$$

Пусть $\bar{B}(y,r)$ — замкнутый круг с центром в y радиуса r. Обозначим через τ момент первого попадания винеровского процесса в круг $\bar{B}(0,1)$, т. е.

$$\tau = \inf\left\{t \ge 0 \colon w(t) \in \bar{B}(0,1)\right\}.$$

Тогда (см. [73])

$$P_x\{\tau < \zeta\} = c_1 \int\limits_{S_1} G(x-y)\sigma(dy).$$

Здесь σ — равномерное распределение на S_1, а c_1 — емкость единичного круга. Поскольку $G(x)$ имеет вышеприведенную асимптотику при $\|x\| \to 0$, то при $4\varepsilon < \|x\| \wedge \|y\| \wedge \dfrac{1}{2}$, $\|z\| < \varepsilon$

$$\ln\frac{1}{\varepsilon} P_z\{\tau_\varepsilon(x) < \zeta\} \le k_1 G\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 P_z\big\{\tau_\varepsilon(x) < \zeta,\, \tau_\varepsilon(y) < \zeta\big\} \le k_2\left(G\left(\frac{x}{2}\right) + G\left(\frac{y}{2}\right)\right) G\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

где $\tau_\varepsilon(x)$ — момент первого попадания в $\bar{B}(x,\varepsilon)$ [29]. Такие неравенства позволяют получить оценки для моментов перенормированных локальных времен самопересечения. Для этого нужно воспользоваться подходом к определению локального времени, основанным на изложенной в начале статьи идее. А именно, похоже, что для дельта-функций от значений винеровского процесса справедливо равенство

$$\prod_{k=1}^{n-1} \delta_0(w(s_{k+1}) - w(s_k)) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \prod_{k=1}^{n} \delta_0(w(s_k) - y)dy, \quad s_1 < s_2 < \ldots < s_n. \tag{1.5}$$

Мы получим это равенство позднее как следствие более общего утверждения об обобщенных функционалах белого шума. Используем (1.5) для построения приближений к локальному времени самопересечения для w. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$q_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} 1\!\!1_{B(0,\varepsilon)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Зададим

$$\tilde{T}^w_{\varepsilon,m} = \int\limits_{\Delta_m} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \prod_{k=1}^{m} q_\varepsilon(w(s_k) - y)\, dy\, d\vec{s}.$$

Как и $T^w_{\varepsilon,m}$, это выражение нуждается в перенормировке для того, чтобы сделать возможным переход к пределу при $\varepsilon \to 0$. Соответствующая перенормировка имеет тот же вид, что и перенормировка Дынкина [11]. Получившийся предел обозначим через $\tilde{T}^w_m$. Обозначим

$$T^w_{\varepsilon,m}(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \int\limits_{\Delta_m} \prod_{k=1}^{m} q_\varepsilon(w(s_k) - x)\, d\vec{s}\, dx, \quad \varphi \in S.$$

Для записи перенормировки определим число h_ε так:

$$h_\varepsilon = M \int\limits_0^\zeta q_\varepsilon(w(s) - y)\, ds, \quad \|y\| = \varepsilon.$$

Значение h_ε не зависит от выбора y такого, что $\|y\| = \varepsilon$. Используя ранее определенный потенциал G, можно записать

$$h_\varepsilon = -G(\varepsilon) + o\left(\varepsilon^2 \ln\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\ln 2 - \ln\lambda}{2} - \gamma\right) + o\left(\varepsilon^2\ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Перенормировку $\tilde{T}^w_{\varepsilon,m}(\varphi)$, следуя [11], определим следующим образом:

$$\tilde{T}^w_{\varepsilon,m}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \sum_{j=2}^{m} C_{m-1}^{j-1} \frac{h_\varepsilon^{m-j}}{j!} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{j} q_\varepsilon(w(s_i) - y)\, d\vec{s}\, dy.$$

Записывая интегралы по кубам как интегралы по симплексам с факториальным множителем и используя (1.5), приходим к выводу, что предложенная перенормировка совпадает с перенормировкой Дынкина с точностью до константы и членов порядка малости $o\left(\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$, отличающих h_ε от $-\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Однако вышеприведенная конструкция, опирающаяся на выражение для G и выбор q_ε как нормированного индикатора круга радиуса ε, позволяет для оценки моментов $\tilde{T}^w_{\varepsilon,m}(\varphi)$ использовать оценки на время достижения круга и метод математической индукции. Так получаются соотношения

$$M(\tilde{T}^w_{\varepsilon,m}(\varphi) - \tilde{T}^w_m(\varphi))^{2p} \le c_p \|\varphi\|^{2p}_\infty\, \varepsilon \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{2pk}, \quad p \in \mathbb{N},$$

где c_p зависит только от p. Здесь $\tilde{T}^w_k(\varphi)$ — перенормированное локальное время самопересечения процесса w, соответствующее функции φ (перенормированное по Дынкину время получается при $\varphi \equiv 1$). Сам вид перенормировки для $\tilde{T}^w_{\varepsilon,k}(\varphi)$ позволяет записать равенство

$$T^w_{\varepsilon,n}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} P_{n,k}\left(\frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + \beta\right)\right) T^w_k(\varphi) + R_n(\varepsilon, \varphi),$$

где $P_{n,k}$ — многочлены, которые легко можно представить в явном виде, а остаток $R_n(\varepsilon, \varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$MR_n(\varepsilon, \varphi)^{2p} \le c^1_p \|\varphi\|^{2p}_\infty\, \varepsilon \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{2np}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Возвращаясь к вопросу об асимптотике площади винеровской ε-трубочки, положим

$$S_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) 1\!\!1_{\Gamma_\varepsilon(0;\zeta)}(y)\, dy$$

и рассмотрим

$$M\left(S_\varepsilon(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} (h_\varepsilon)^{-k} T^w_{\varepsilon,k}(\varphi)\right)^2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(y)\varphi(z) M\left(Y_\varepsilon(y) + \sum_{k=1}^{n} (h_\varepsilon)^{-k} X^w_{\varepsilon,k}(y)\right)\left(Y_\varepsilon(z) + \sum_{k=1}^{n} (h_\varepsilon)^{-k} X^w_{\varepsilon,k}(z)\right) dy\, dz, \qquad (1.6)$$

где

$$Y_\varepsilon(y) = 1\!\!1_{\{y \in S_\varepsilon(0;\zeta)\}},$$

$$X^w_{\varepsilon,k}(y) = \int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k} q_\varepsilon(w(s_j) - y) d\vec{s}.$$

Отметим, что

$$1\!\!1_{\Gamma_\varepsilon(0;\zeta)}(y) = 1\!\!1_{\{\tau_\varepsilon(y)<\zeta\}}.$$

Поэтому

$$MY_\varepsilon(y)Y_\varepsilon(z) = P\{\tau_\varepsilon(y) \le \tau_\varepsilon(z) < \zeta\} + P\{\tau_\varepsilon(z) \le \tau_\varepsilon(y) < \zeta\}.$$

Ранее была приведена оценка

$$\big|h_\varepsilon P\{\tau_\varepsilon(y) < \zeta\} + G(y)\big| \le 2\varepsilon\rho(\|y\|).$$

Заметим, что

$$P\{\tau_\varepsilon(y) \le \tau_\varepsilon(z) < \zeta\} = P\{\tau_\varepsilon(y) \le \tau'_\varepsilon(z) < \zeta\} - P\{\tau_\varepsilon(z) \le \tau_\varepsilon(y) \le \tau'_\varepsilon(z) < \zeta\},$$

где

$$\tau'_\varepsilon(z) = \inf\{t \ge \tau_\varepsilon(y) \colon w(t) \in B(z,\varepsilon)\}.$$

Используя строго марковское свойство и приведенные оценки для τ_ε, можно показать, что

$$P\{\tau_\varepsilon(y) \le \tau'_\varepsilon(z) < \zeta\} = h_\varepsilon^{-2} G(y)G(z-y) + r_\varepsilon,$$

где

$$r_\varepsilon \le c\,\varepsilon\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \left(G\left(\frac{y}{2}\right)\rho(\|z-y\|) + \rho(\|y\|)G(z-y)\right),$$

$$P\{\tau_\varepsilon(z) \le \tau_\varepsilon(y) \le \tau'_\varepsilon(z) < \zeta\} \le c\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^3 G\left(\frac{z}{2}\right) G\left(\frac{z-y}{2}\right)^2.$$

Поэтому

$$\big|MY_\varepsilon(y)Y_\varepsilon(z) - h_\varepsilon^{-2}(G(y)-G(z))G(y-z)^2\big| \le \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-3} f_2(y,z).$$

Аналогично можно показать, что для произвольного $p \ge 2$

$$\left|MY_\varepsilon(y)Y_\varepsilon(z) - \sum_{k=2}^{p} h_\varepsilon^{-k}(G(y)-G(z))G(y-z)^k\right| \le \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-p-1} f_p(y,z),$$

где $f_p \in L_1((\mathbb{R}^2)^2)$. Такие оценки можно провести и для других слагаемых в (1.6). Суммируя их, получаем соотношение

$$M\left(S_\varepsilon(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} (h_\varepsilon)^{-k} T^w_{\varepsilon,k}(\varphi)\right)^2 = o\left(\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n}\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

Учитывая выражение $T^w_{\varepsilon,k}(\varphi)$ через $T^w_k(\varphi)$, приведенное ранее, получаем асимптотическое разложение $S_\varepsilon(\varphi)$ по степеням $\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$. Следующее утверждение описывает асимптотическое разложение $S_\varepsilon(\varphi)$ по степеням $\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$ в случае $\varphi\equiv 1$.

Теорема 1.7 [29]. *Асимптотическое разложение площади ε-трубочки вокруг траектории винеровского процесса на плоскости имеет вид*

$$|\Gamma_\varepsilon(0;\zeta)| = -\sum_{k=1}^n h_\varepsilon^{-k}\mathcal{T}^w_k(\zeta)+R_n,$$

где $\mathcal{T}^w_k(\zeta)$ — перенормированное по Дынкину локальное время k-кратного самопересечения для w на симплексе $\Delta_k(\zeta)$,

$$h_\varepsilon = -\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon}+c_\lambda,$$

c_λ — некоторая константа, зависящая от λ, а

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon^{2n} MR_n^2 = 0.$$

Предположим теперь, что w — винеровский процесс в $\mathbb{R}^3$. Обозначим

$$\Delta_2^\varepsilon = \{(s,t)\in\Delta_2 : t-s\geq\varepsilon\},$$

$$\{\eta\} = \eta - M\eta.$$

Следующее утверждение описывает асимптотику ε-трубочки в случае размерности 3.

Теорема 1.8 [28]. *Пусть*

$$l(0,\Delta_2^{\varepsilon^2}) = \int\limits_{\Delta_2^{\varepsilon^2}} \delta_0(w(t_2)-w(t_1))dt_1dt_2.$$

Тогда существует константа $c>0$ такая, что для любого $\varepsilon\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$$M\Big(\varepsilon^{-2}\{|\Gamma_\varepsilon(0;1)|\} - \{l(0,\Delta_2^{\varepsilon^2})\}\Big)^2 \leq c,$$

$$\varepsilon^{-2}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}(|\Gamma_\varepsilon(0;1)|-\varepsilon)\xrightarrow{d}\frac{1}{\pi}N(0;1), \quad \varepsilon\to 0$$

($N(0;1)$ — *стандартная случайная величина*).

Результат Дворецкого–Эрдеша–Какутани о наличии лишь двойных самопересечений у трехмерного винеровского процесса и теорема 1.8 показывают, что геометрия винеровского процесса в пространстве существенно отличается от геометрии винеровского процесса на плоскости.

Пусть $\{w(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^3$. Согласно теореме 1.4 существует случайная неотрицательная функция $l(\cdot, \Delta_2(t)) \in L_1(\mathbb{R}^3)$ такая, что

$$\int\limits_{\Delta_2(t)} f_\varepsilon(w(t_2) - w(t_1))d\vec{t} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(x)l(x, \Delta_2(t))dx.$$

Следует отметить, что, как и в двумерном случае, $l(x, \Delta_2(t))$ не является непрерывной в точке $x = 0$. Действительно,

$$Ml(x, \Delta_2(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} M \int\limits_{\Delta_2(t)} f_\varepsilon(w(t_2) - w(t_1) - x)\, d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2(t)} \frac{1}{(2\pi(t_2 - t_1))^{3/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2(t_2 - t_1)}}\, d\vec{t} =$$

$$= \|x\| \int\limits_{\Delta_2\left(\frac{t}{\|x\|^2}\right)} \frac{1}{(2\pi(t'_2 - t'_1))^{3/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2(t'_2 - t'_1)}}\, d\vec{t'} =$$

$$= \|x\| \int\limits_{\left\{ \substack{s_1 \geq 0, s_1 \geq 0 \\ s_1 + s_2 \leq \frac{t}{\|x\|^2}} \right\}} \frac{1}{(2\pi s_2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2s_2}} d\vec{s} =$$

$$= \frac{t}{\|x\|} \int\limits_0^{\frac{t}{\|x\|^2}} \frac{1}{(2\pi s_2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2s_2}} ds_2 - \|x\| \int\limits_0^{\frac{t}{\|x\|^2}} \frac{s_2}{(2\pi s_2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2s_2}} ds_2 \sim \frac{t}{\|x\|}, \quad x \to 0.$$

М. Йор в работе [33] предложил следующую перенормировку. Для $x > 0$ обозначим через $Y_x(t)$ случайный процесс вида

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1}{|x|}}} \left(2\pi l(x, \Delta_2(t)) - \frac{t}{|x|} \right).$$

Справедливым является следующее утверждение.

Теорема 1.9 [33]. *Семейство случайных процессов Y_x сходится по распределению при $x \to$ $\to 0$ к 2β, где β — одномерный винеровский процесс.*

Далее предлагается несколько иной подход к определению локального времени самопересечения для винеровского процесса в $\mathbb{R}^3$. Вместо

$$T_2^w = \int\limits_{\Delta_2} \delta_0(w(t_2) - w(t_1))d\vec{t}$$

рассмотрим

$$T = \int_{\Delta_2} \varkappa(w(t_2) - w(t_1))d\vec{t},$$

где $\varkappa$ — мера на p-мерном многообразии в $\mathbb{R}^3$, $p \leq 3$. Как уже отмечалось, если $p = 0$, а размерность пространства $d = 2$, т. е. $d-p = 2$, то согласно Дж. Розену [21] существует предел в среднем квадратическом $T^w_{\varepsilon,2} - MT^w_{\varepsilon,2}$. Оказывается, что это имеет место, когда $d = 3$. А именно будет рассмотрена ситуация, когда значения винеровского процесса в $\mathbb{R}^3$ в разные моменты времени оказываются на одной гладкой кривой, т. е. $\varkappa$ — мера длины на 1-мерном многообразии в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, снова $d - p = 2$. Увеличив размерность $\varkappa$, мы, „грубо говоря”, понизили размерность пространства и свели трехмерный случай к двумерному. Действительно, пусть $\{w(t),\ t \in [0; 1]\}$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим в пространстве гладкую регулярную кривую Γ, заданную параметрически

$$x(t) = \begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t), \qquad t \in [0; 1]. \\ x_3 = x_3(t), \end{cases}$$

Пусть существуют константы $0 < a_1 < a_2$ такие, что

$$a_1 \leq \|x'(t)\| \leq a_2. \tag{1.7}$$

В этом случае можно показать, что к T применима перенормировка Розена. Пусть $S(\mathbb{R}^3)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^3$. Для обобщенной функции $\varkappa$ из $S^*(\mathbb{R}^3)$ такой, что для любой $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \varkappa, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi dl,$$

рассмотрим выражение

$$T = \int_{\Delta_2} \varkappa(w(t_2) - w(t_1))d\vec{t},$$

регистрирующее случаи попадания разности $w(t_2) - w(t_1)$ на кривую Γ, которые зависят, грубо говоря, от двух координат процесса w.

Пусть

$$T_\varepsilon := \int_{\Delta_2} \varkappa_\varepsilon(w(t_2) - w(t_1))d\vec{t}$$

— аппроксимирующее T семейство случайных величин. Здесь

$$\varkappa_\varepsilon = \varkappa * \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{3/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon > 0.$$

Следующие два результата отражают „двумерность” рассматриваемой конструкции. Следующая лемма показывает, что T_ε имеет логарифмическую асимптотику, как и в случае двумерного винеровского процесса. В случае специальной кривой доказательство утверждения приведено в [34, 35]. В данной работе мы приводим доказательство для произвольной регулярной кривой в пространстве.

Лемма 1.4. *Пусть K — множество таких значений t, что $x(t)=0$. Тогда*

$$MT_\varepsilon \sim |K|\frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|, \quad \varepsilon\to 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$MT_\varepsilon = \int\limits_{\Delta_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{3\times 2}}\int\limits_0^1 f_\varepsilon(y_2-y_1-x(t))\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi s_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\|y_1\|^2}{2s_1}\right\}\frac{1}{(2\pi(s_2-s_1))^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\|y_2-y_1\|^2}{2(s_2-s_1)}\right\}\|x'(t)\|\,dt\,d\vec{y}\,d\vec{s}=$$

$$=\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{(2\pi(s_2-s_1+\varepsilon))^{3/2}}\int\limits_0^1\exp\left\{-\frac{\|x(t)\|^2}{2(s_2-s_1+\varepsilon)}\right\}\|x'(t)\|\,dt\,d\vec{s}.$$

Кривая Γ проходит через нуль конечное число раз. Действительно, пусть это не так, тогда существует бесконечное число точек $t_1,\ldots,t_n,\ldots$ из отрезка $[0;1]$ таких, что $x(t_1)=\ldots$ $\ldots=x(t_n)=\ldots=0$. Из ограниченной последовательности $\{t_n\}_{n\geq 1}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_k}\}_{k\geq 1}$. Тогда $\|x'(t_{n_k})\|\to 0$, $k\to+\infty$. Согласно условию (1.7), для любого $t_{n_k}\in[0;1]$ справедливо соотношение

$$a_1\leq\|x'(t_{n_k})\|\leq a_2. \tag{1.8}$$

Устремляя k к бесконечности в (1.8), приходим к противоречию. Поэтому далее считаем, что x обращается в нуль в точках $\{t_1,\ldots,t_N\}\in[0;1]$. Для любого $\delta>0$ обозначим $K=\bigcup_{i=1}^N(t_i-$ $-\delta;t_i+\delta)$. Нетрудно показать, что

$$\sup_{\varepsilon>0}\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi(s_2-s_1+\varepsilon)}}\int\limits_{[0;1]\setminus K}\exp\left\{-\frac{\|x(t)\|^2}{2(s_2-s_1+\varepsilon)}\right\}\|x'(t)\|\,dt\,d\vec{s}<+\infty. \tag{1.9}$$

Для $t_i\in(0;1)$ рассмотрим

$$\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{(2\pi(s_2-s_1+\varepsilon))^{3/2}}\int\limits_{t_i+\delta}^{t_i-\delta}\exp\left\{-\frac{\|x(t)\|^2}{2(s_2-s_1+\varepsilon)}\right\}\|x'(t)\|\,dt\,d\vec{s}.$$

Поскольку кривая Γ гладкая, то

$$\|x(t)\|^2=\|x'(t_i)\|^2(t-t_i)^2+o((t-t_i)^2), \quad t\to t_i.$$

Следовательно, для любого $\sigma>0$ существует $\delta>0$ такое, что для $t\in(t_i-\delta;t_i+\delta)$, $t\neq t_i$

$$\left|\frac{\|x(t)\|^2}{\|x'(t_i)\|^2(t-t_i)^2}-1\right|<\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(2\pi(s_2 - s_1 + \varepsilon))^{3/2}} \int\limits_{t_i+\delta}^{t_i-\delta} \exp\left\{-\frac{\|x(t)\|^2}{2(s_2 - s_1 + \varepsilon)}\right\} \|x'(t)\|\, dt\, d\vec{s}$$

равен или меньше, чем

$$\int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(2\pi(s_2 - s_1 + \varepsilon))^{3/2}} \int\limits_{t_i+\delta}^{t_i-\delta} \exp\left\{-\frac{(1-\sigma)\|x'(t_i)\|^2(t-t_i)^2}{2(s_2 - s_1 + \varepsilon)}\right\} \|x'(t)\|\, dt\, d\vec{s} \leq$$

$$\leq \frac{1+\sigma'}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2} \frac{d\vec{s}}{s_2 - s_1 + \varepsilon} = \frac{1+\sigma'}{2\pi} |\ln \varepsilon| + o(\ln \varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.10}$$

С другой стороны, справедлива следующая оценка снизу:

$$\int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(2\pi(s_2 - s_1 + \varepsilon))^{3/2}} \int\limits_{t_i+\delta}^{t_i-\delta} \exp\left\{-\frac{(1+\sigma)\|x'(t_i)\|^2(t-t_i)^2}{2(s_2 - s_1 + \varepsilon)}\right\} \|x'(t)\|\, dt\, d\vec{s} \geq$$

$$\geq \frac{1-\sigma''}{2\pi} |\ln \varepsilon| + o(\ln \varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.11}$$

Величины σ' и σ'' могут быть сделаны достаточно малыми выбором δ. Нетрудно показать, что в случае, когда $t_i = 0$ или $t_i = 1$, оценки (1.10), (1.11) имеют место для интегралов

$$\int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(2\pi(s_2 - s_1 + \varepsilon))^{3/2}} \int\limits_{0}^{\delta} \exp\left\{-\frac{\|x(t)\|^2}{2(s_2 - s_1 + \varepsilon)}\right\} \|x'(t)\|\, dt\, d\vec{s},$$

$$\int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(2\pi(s_2 - s_1 + \varepsilon))^{3/2}} \int\limits_{1-\delta}^{1} \exp\left\{-\frac{\|x(t)\|^2}{2(s_2 - s_1 + \varepsilon)}\right\} \|x'(t)\|\, dt\, d\vec{s},$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1.10 [34, 35]. *Существует*

$$L_2\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}[T_\varepsilon - MT_\varepsilon].$$

Таким образом, геометрия перенормировки для локального времени самопересечения трехмерного винеровского процесса, соответствующего мере длины на гладкой кривой, сходна с геометрией перенормировки для локального времени самопересечения винеровского процесса на плоскости.

2. Обобщенные функционалы белого шума. Доказательства всех вышеизложенных результатов из первого пункта, касающихся перенормированных локальных времен самопересечения для винеровского процесса, а также асимптотическое поведение площади ε-трубочки вокруг траектории винеровского процесса существенно базируются на условии марковости. В настоящем пункте обсуждается иной подход, при котором локальное время самопересечений для винеровского процесса рассматривается как обобщенный функционал от него. При этом инструментами исследования являются разложение Ито – Винера и преобразование Фурье – Винера.

Теорема 2.1 (разложение Ито – Винера [36 – 39, 52]). *Всякая случайная величина α, имеющая конечный второй момент и измеримая относительно двумерного винеровского процесса $w = (w_1, w_2)$, однозначно представляется в виде сходящегося в среднем квадратическом ряда из ортогональных слагаемых*

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \int_{\Delta_n} \alpha_n(r_1, \ldots, r_{n_1}, r_{n_1+1}, \ldots, r_{n_2}) dw_1(r_1) \ldots$$

$$\ldots dw_1(r_{n_1}) dw_2(r_{n_1+1}) \ldots dw_2(r_{n_2}).$$

Здесь при $n = 0$ соответствующее слагаемое является числом $\alpha_0 = M\alpha$. При $n > 0$ функция α_n такова, что

$$\int_{\Delta_n} \alpha_n^2(r_1, \ldots, r_{n_1}, r_{n_1+1}, \ldots, r_{n_2}) dr_1 \ldots dr_{n_1} dr_{n_1+1} \ldots dr_{n_2} < +\infty.$$

Нетрудно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ $M(T^w_{\varepsilon,k})^2 < +\infty$. Следовательно, случайная величина $T^w_{\varepsilon,k}$ имеет разложение Ито – Винера. Обозначим через

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$$

n-й многочлен Эрмита со старшим коэффициентом 1. Для функции $f \in L_2([0;1])$ обозначим через $f^{\otimes n}$ ее n-кратную тензорную степень, т. е. ядро

$$f^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1) \ldots f(t_n).$$

Известно [36 – 39, 52], что

$$n! \int_{\Delta_n} f^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n) dw(t_1) \ldots dw(t_n) =$$

$$= \|f\|^n H_n \left(\frac{1}{\|f\|} \int_0^1 f(t) dw(t) \right).$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2([0;1])$. Обозначим

$$I_n^i(f^{\otimes n}) = n! \int_{\Delta_n} f^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n) dw_i(t_1) \ldots dw_i(t_n), \quad i = 1, 2.$$

Можно проверить, что при $\varepsilon \to 0$ разложение Ито – Винера для $T^w_{\varepsilon,k}$ превращается в формальный ряд

$$T^w_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1^1+n_2^1+\ldots+n_1^{k-1}+n_2^{k-1}=n} \int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \prod_{m=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{n_m^j!}} H_{n_m^j}(0) \times$$

$$\times I^m_{n_m^j}\left(\left(\frac{1\!\!\mathrm{I}_{[s_j;s_{j+1}]}}{\sqrt{s_{j+1}-s_j}}\right)^{\otimes n_m^j}\right) f_{s_{j+1}-s_j}(0)\, d\vec{s}.$$

Поэтому перенормировка данного выражения состоит в вычитании слагаемых, содержащих ядра, „взрывающиеся” на диагонали симплекса Δ_k.

Прежде чем мы обсудим результаты подобного рода, определим действие обобщенных функций на гауссовские функционалы. Необходимость в этом вызвана тем, что при рассмотрении локальных времен самопересечения естественным образом возникает выражение вида $\prod_{j=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{j+1}) - x(t_j))$. Приведем необходимые определения и факты о действии функций из пространства Шварца на гладкие гауссовские функционалы [23, 39, 47, 48].

Определение 2.1 [38 – 48, 52]**.** *Пусть H — полное сепарабельное гильбертово пространство. Линейное соответствие ξ такое, что*

$$H \ni x \longrightarrow (x, \xi) \sim N(0, \|x\|^2),$$

называется белым шумом в H.

Для нас важен следующий пример.

***Пример* 2.1.** Пусть $H = L_2([0;1])$, $w(t)$, $t \in [0;1]$, — винеровский процесс в $\mathbb{R}$. Зададим соответствие следующим образом:

$$L_2([0;1]) \ni x \longrightarrow (x, \xi) = \int\limits_0^1 x(t)\, dw(t).$$

Используя свойства стохастического интеграла, нетрудно проверить, что ξ — белый шум в $L_2([0;1])$. При этом исходный винеровский процесс w может быть представлен в виде $w(t) = (1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \xi)$.

Пусть ξ — белый шум в $L_2([0;1])$. Далее считаем, что σ-алгебра случайных событий $\mathcal{F}$ порождена ξ, т. е. $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$. Обозначим через $\mathcal{P} \subset L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ множество случайных величин, элементы которого имеют конечное разложение Ито – Винера, т. е.

$$\mathcal{P} = \left\{F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \colon F = \sum_{n=0}^{N} I_n(f_n)\right\}, \quad N \geq 1.$$

Определим норму

$$\|F\|^2_{p,\alpha} = \sum_{n=0}^{N} (1+n)^\alpha \|I_n(f_n)\|_p$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Здесь $\|I_n(f_n)\|_p$ — обычная L_p-норма случайной величины $I_n(f_n)$.

Определение 2.2 [39, 47]. *Пополнение $\mathcal{P}$ по норме $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ называется пространством Соболева порядка α относительно L_p-сходимости.*

Заметим, что для $\alpha_1 < \alpha_2$ $D_{p,\alpha_1} \supset D_{p,\alpha_2}$. Обозначим

$$D^{\infty} := \bigcap_{\alpha>0} \bigcap_{1<p<\infty} D_{p,\alpha},$$

$$D^{-\infty} := \bigcup_{\alpha>0} \bigcup_{1<p<\infty} D_{p,-\alpha}.$$

Пусть $D^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ — пространство случайных векторов с координатами из D^{∞}.

***Замечание* 2.1.** Поскольку $D_{p,0} = L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то элементы пространства $D_{p,\alpha}$ для $\alpha \geq 0$ являются „обычными” винеровскими функционалами. В случае $\alpha < 0$ это не так. Элементы пространств $D_{p,-\alpha}$, $\alpha > 0$, называются обобщенными винеровскими функционалами. Следующее рассуждение содержит важный пример таких функционалов. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ пространство Шварца функций медленного роста на $\mathbb{R}^d$. Положим

$$\|\varphi\|_{2k} = \|(1+|x|^2-\Delta)^k\varphi\|_{\infty}, \tag{2.1}$$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad \|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|,$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$. Пусть $\mathcal{T}_{2k}$ — пополнение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ по норме (2.1). Известно [49, 50], что

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \ldots \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_0 = \widehat{C}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{T}_{-2} \subset \ldots \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Здесь $\widehat{C}(\mathbb{R}^d)$ — банахово пространство всех непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$, сходящихся к нулю на бесконечности, $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ — пространство обобщенных функций Шварца [49, 50]. Для $F \in D^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ обозначим через $\sigma := (\langle DF_i, DF_j\rangle)_{ij=1}^d$ матрицу Грама для случайных элементов $DF_1, \ldots, DF_d$ (D — стохастическая производная [23, 38]). Предположим, что:

1) $\det\sigma > 0$,

2) $[\det\sigma]^{-1} \in \bigcap_{1<p<\infty} L_p$.

Справедливым является следующее утверждение.

Теорема 2.2 [49, 50]. *Для каждого $p \in (1; +\infty)$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$ существует положительная константа $c = C_{p,k}$ такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ выполняется соотношение*

$$\|\varphi(F)\|_{p,-2k} \leq c\|\varphi\|_{-2k}.$$

Обозначим $\varphi_\varepsilon = \varphi * p_\varepsilon$, где $p_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}$. Из теоремы 2.2 следует, что для $k_0 \geq 1$ $\{\varphi_\varepsilon(F)\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна в $D_{p,-2k_0}$, т. е. существует предел $\varphi_\varepsilon(F)$, $\varepsilon \to 0$, в $D_{p,-2k_0}$.

Определение 2.3. *Значение обобщенной функции φ на F — это*

$$\varphi(F) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(F).$$

***Замечание* 2.2.** В условиях теоремы 2.2 обобщенный функционал $\varphi(F)$ имеет разложение Ито – Винера, элементы которого являются пределами соответствующих элементов разложения $\varphi_\varepsilon(F)$. В частности, естественно определить $M\varphi(F)$ как предел $M\varphi_\varepsilon(F)$. Заметим также, что в условиях теоремы случайная величина F имеет плотность распределения $p_F \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ [23]. Поэтому для $\varphi = \delta_0$ справедливо равенство

$$M\delta_0(F) = p_F(0).$$

Для обобщенных гауссовских функционалов из $D_{p,-2k}$ естественным образом определено спаривание с функционалами из $D_{q,2k}$, которое по-прежнему будем обозначать с помощью математического ожидания $M\alpha G$, $\alpha \in D_{q,2k}$, $G \in D_{p,-2k}$. Наиболее важным является случай, когда α — стохастическая экспонента (элемент пространства D^∞). Для $G \in D_{p,-2k}$ можно определить его преобразование Фурье – Винера.

Определение 2.4 [51, 52]. *Преобразованием Фурье – Винера случайной величины β, интегрируемой с квадратом и измеримой относительно белых шумов ξ_1, ξ_2, называется выражение*

$$\mathcal{T}(\beta)(h_1, h_2) = M\beta \exp\left\{(h_1, \xi_1) + (h_2, \xi_2) - \frac{1}{2}(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2)\right\}.$$

***Замечание* 2.3.** Любая случайная величина, удовлетворяющая условиям определения 2.4, однозначно восстанавливается по своему преобразованию Фурье – Винера.

В силу замечания 2.3 далее, для удобства, мы иногда обсуждаем не локальные времена самопересечения случайных процессов, а их преобразование Фурье – Винера.

***Пример* 2.2** [53, 54]. Пусть w — двумерный винеровский процесс. Рассмотрим обобщенный функционал $\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(s_{i+1}) - w(s_i))$. Его разложение Ито – Винера имеет вид

$$\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(s_{i+1}) - w(s_i)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1^1+n_2^1+\ldots+n_1^{k-1}+n_2^{k-1}=n} \prod_{j=1}^{k-1} \prod_{m=1}^{2} \frac{1}{n_m^j!} I_{n_m^j}^m \left(\left(\frac{1\!\!\mathrm{I}_{[s_j;s_{j+1}]}}{\sqrt{s_{j+1}-s_j}}\right)^{\otimes n_m^j}\right) H_{n_m^j}(0) f_{s_{j+1}-s_j}(0),$$

где $f_t(x) = \dfrac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\|x\|^2}{2t}}$.

Найдем преобразование Фурье – Винера $\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(s_{i+1}) - w(s_i))$:

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(w(t_{i+1}) - w(t_i))\right)(h) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon(w(t_{i+1}) - w(t_i))\right)(h) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \Delta t_i} e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{k-1}\|P_{t_i t_{i+1}} h\|^2},$$

где $P_{t_i t_{i+1}}$ — проектор на $1\!\!\mathrm{I}_{[t_i;t_{i+1}]}$.

***Пример* 2.3.** Пусть $g \in C\big([0;1], L_2([0;1])\big)$, ξ — белый шум в $L_2([0;1])$. Рассмотрим гауссовский процесс в $\mathbb{R}$ $x(t) = (g(t), \xi)$ [61]. Найдем преобразование Фурье – Винера

$$\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i)).$$

Для того чтобы выполнялись условия теоремы 2.2, определитель Грама

$$G(\Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{k-1})) = \det((\Delta g(t_i), \Delta g(t_j))_{ij=1}^{k-1},$$

где $\Delta g(t_i) = g(t_{i+1}) - g(t_i)$, должен быть отличен от нуля $\Big($здесь мы используем соотношение

$$M\Delta x(t_i)\Delta x(t_j) = (\Delta g(t_i), \Delta g(t_j))\Big).$$

Если это условие выполняется, то $\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))$ является обобщенным функционалом от ξ и его преобразование Фурье – Винера имеет вид

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))\right)(h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1} f_\varepsilon(x(t_{i+1}) - x(t_i))\right)(h) =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(A^{-1}_{t_1\ldots t_k}u, u)\right\}}{G(\Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{k-1}))},$$

$$u = \big((\Delta g(t_1), h), \ldots, (\Delta g(t_{k-1}), h)\big), \qquad A_{t_1\ldots t_k} = \big((\Delta g(t_i), \Delta g(t_j))\big)_{ij=1}^{k-1}.$$

Обозначим через $P_{t_1\ldots t_k}$ проектор на линейную оболочку $\Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{k-1})$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1 [34]. *Для произвольного* $h \in L_2([0;1])$

$$(A^{-1}_{t_1\ldots t_k}u, u) = \|P_{t_1\ldots t_k}h\|^2.$$

Доказательство. Определим оператор $B_{t_1\ldots t_k}$ следующим образом:

$$B_{t_1\ldots t_k}h = \frac{1}{G(\Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{k-1}))} \sum_{ij=1}^{k-1} (-1)^{i+j} M_{ij}(\Delta g(t_i), h)\Delta g(t_j),$$

где M_{ij} — минор матрицы $A_{t_1\ldots t_k}$, соответствующий i-й строке и j-му столбцу. Покажем, что $B_{t_1\ldots t_k} = P_{t_1\ldots t_k}$. Для этого нужно доказать, что:

1) для произвольного $h \perp \Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{k-1})$

$$B_{t_1\ldots t_k}h = 0;$$

2) для произвольного $l = \overline{1, k-1}$

$$B_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_l) = \Delta g(t_l).$$

Пункт 1 очевиден. Проверим пункт 2. Заметим, что

$$B_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_l) = \frac{1}{G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1}))}\sum_{ij=1}^{k-1}(-1)^{i+j}M_{ij}(\Delta g(t_i),\Delta g(t_l))\Delta g(t_j) =$$

$$= \frac{1}{G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1}))}\sum_{j=1}^{k-1}\Delta g(t_j)\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{i+j},$$

$$M_{ij}(\Delta g(t_i),\Delta g(t_l)) =$$

$$= \frac{1}{G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1}))}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{k-1}\Delta g(t_j)\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{i+j}M_{ij}(\Delta g(t_i),\Delta g(t_l)) + \right.$$

$$\left. + \Delta g(t_l)\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+l}M_{il}(\Delta g(t_i),\Delta g(t_l))\right).$$

В силу свойств определителя первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое равно

$$\frac{1}{G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1}))}\Delta g(t_l)\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+l}M_{il}(\Delta g(t_i),\Delta g(t_l)) =$$

$$= \frac{1}{G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1}))}\Delta g(t_l)G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1})) = \Delta g(t_l).$$

Соотношения из пунктов 1 и 2 влекут равенство

$$B_{t_1\ldots t_k}h = P_{t_1\ldots t_k}h.$$

Лемма 2.1 доказана.

Из леммы 2.1 следует, что

$$\mathcal{T}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\delta_0(x(t_{i+1})-x(t_i))\right)(h) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\|P_{t_1\ldots t_k}h\|^2\right\}}{G(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1}))}.$$

Далее через f_ε^n обозначена плотность распределения гауссовского вектора $\eta \sim N(0,\varepsilon I)$ в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$f_\varepsilon^n(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Как и ранее, $\{\eta\} = \eta - M\eta$. Nualart и Vives в [55] доказали следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть w — винеровский процесс в $\mathbb{R}^2$. Тогда существует*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_2}\left\{f_\varepsilon^2(w(t_2)-w(t_1))\right\}d\vec{t}$$

в $D_{\alpha,2}$ для всех $\alpha<\dfrac{1}{2}$.

Позже этот результат был усилен в работе Imkeller, Perez-Abrew, Vives [53].

Теорема 2.4. *Пусть w — винеровский процесс в $\mathbb{R}^2$. Тогда существует*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_2}\left\{f_\varepsilon^2(w(t_2)-w(t_1))\right\}d\vec{t}$$

в $D_{\alpha,2}$ для всех $\alpha<1$.

Также в [53] было показано, что для размерности $n\geq 3$ семейство случайных величин $\left\{\int_{\Delta_2}\{f_\varepsilon^n(w(t_2)-w(t_1))\}d\vec{t},\ 0<\varepsilon\leq 1\right\}$ не является ограниченным в $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Теорема 2.5. *Семейство случайных величин*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}}\int\limits_{\Delta_2}\{f_\varepsilon^3(w(t_2)-w(t_1))\}d\vec{t},\ 0<\varepsilon\leq 1\right\}$$

слабо компактно в $D_{\alpha,2}$ для всех $\alpha<\dfrac{1}{2}$.

Теорема 2.6. *Для всех $n\geq 4$ семейство случайных величин*

$$\left\{\varepsilon^{(n-3)/2}\int\limits_{\Delta_2}\{f_\varepsilon^n(w(t_2)-w(t_1))\}d\vec{t},\ 0<\varepsilon\leq 1\right\}$$

слабо компактно в $D_{\alpha,2}$ для всех $\alpha<\dfrac{4-n}{2}$.

Теоремы 2.5, 2.6 были уточнены в работе Я. Ху [56].

Теорема 2.7. *Семейство случайных величин*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}}\int\limits_{\Delta_2}\{f_\varepsilon^3(w(t_2)-w(t_1))\}d\vec{t},\ 0<\varepsilon\leq 1\right\}$$

слабо компактно в $D_{\alpha,2}$ при $\varepsilon\to 0$ для $\alpha<\dfrac{1}{2}$. Для $\alpha\geq\dfrac{1}{2}$ данное семейство неограничено в $D_{\alpha,2}$ при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 2.8. *Семейство случайных величин*

$$\left\{\varepsilon^{(n-3)/2}\int\limits_{\Delta_2}\{f_\varepsilon^n(w(t_2)-w(t_1))\}d\vec{t},\ 0<\varepsilon\leq 1\right\}$$

слабо компактно в $D_{\alpha,2}$ при $\varepsilon\to 0$ и $\alpha<\dfrac{4-n}{2}$. Для $\alpha\geq\dfrac{4-n}{2}$ данное семейство случайных величин неограничено при $\varepsilon\to 0$.

В [57] Я. Ху исследовал локальное время самопересечения для процесса $x = (B_1^H, \ldots, B_d^H)$, где $B_1^H, \ldots, B_d^H$ — независимые фрактальные броуновские движения, $H \in (0,1)$. Был доказан следующий результат.

Теорема 2.9. *Для* $H < \min\left(\dfrac{3}{2d}, \dfrac{2}{d+2}\right)$

$$\int\limits_{\Delta_2} \big\{\delta_0(x(t_2) - x(t_1))\big\} d\vec{t}$$

является элементом пространства $D_{1,2}$.

А. В. Руденко в [15] привел необходимые и достаточные условия для существования локального времени центрированного гауссовского поля как элемента некоторого пространства Соболева.

Пусть $\xi(t),\ t \in T,$ — центрированное гауссовское поле. Обозначим

$$V_\varepsilon = \int\limits_T f_\varepsilon(\xi(t))\nu(dt), \qquad G(s,t) = K^{-1/2}(t,t)K(s,t)K^{-1/2}(s,s)$$

и

$$I_n = \int\limits_T \int\limits_T \int\limits_{S_d} \|G(s,t)x\|^n \sigma(dx) \frac{\nu(ds)}{\sqrt{\det K(s,s)}} \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}},$$

где K — ковариационная матрица поля ξ, S_d — единичная сфера в $\mathbb{R}^d$, σ — равномерная поверхностная мера на S_d. А. В. Руденко доказал следующий факт.

Теорема 2.10 [15]. *Для* $\alpha \in \mathbb{R}$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) $V_\varepsilon \to V,\ \varepsilon \to 0$ *в* $D_{\alpha,2}$;

2) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \|V_\varepsilon\|_{\alpha,2} < +\infty$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n}(2n+1)^{\alpha+d/2-1} < +\infty$.

***Следствие* 1** [15]. *При* $\alpha < -\dfrac{d}{2}$ *утверждения теоремы эквивалентны условию*

$$\int\limits_T \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} < +\infty.$$

3. Локальный нондетерминизм гауссовских процессов. При построении локального времени самопересечения для винеровского процесса существенно использовалась его марковская природа. Для гауссовских процессов марковское свойство влечет за собой некоторую невырожденность распределений конечномерных распределений. Именно это свойство играет решающую роль при построении локальных времен самопересечения. В этом пункте мы приводим и обсуждаем определения локального нондетерминизма, строгого локального нондетерминизма случайных процессов, характеризующие невырожденность конечных семейств приращений на малых интервалах времени. Начнем с более слабого свойства локального нондетерминизма, возникшего в работах С. Бермана [58 – 60].

Пусть $\{x(t),\, t \in J\}$ — центрированный гауссовский процесс со значениями в $\mathbb{R}$, заданный на открытом интервале J. Предположим, что существует такое $\varepsilon > 0$, что:

1) $M(x(t)-x(s))^2>0$ для всех $s,t\in J$ таких, что

$$0<|t-s|\le\varepsilon,$$

2) $Mx^2(t)>0$ для всех $t\in J$.

Для $m\ge 2$, $t_1,\ldots,t_m$ из $J: t_1<t_2<\ldots<t_m$ обозначим через

$$V_m=\frac{D(x(t_m)-x(t_{m-1})/x(t_1),\ldots,x(t_{m-1}))}{D(x(t_m)-x(t_{m-1}))}$$

отношение условной и безусловной дисперсии приращения $x(t_m)-x(t_{m-1})$.

Определение 3.1 [58]. *Гауссовский процесс x является локально нондетерминированным на J, если для каждого $m\ge 2$*

$$\lim_{c\to 0}\inf_{t_m-t_1\le c}V_m>0.$$

Обозначим

$$U_m=\frac{\det\operatorname{cov}(x(t_1),\ldots,x(t_m))}{Dx(t_1)D(x(t_2)-x(t_1))\ldots D(x(t_m)-x(t_{m-1}))}.$$

Справедливым является следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Гауссовский процесс x является локально нондетерминированным на J тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{c\to 0}\inf_{t_m-t_1\le c}U_m>0,\quad m\ge 2.$$

Доказательство леммы следует из равенства $U_m=V_2\ldots V_m$.

***Замечание* 3.1.**

$$U_m=\det\operatorname{cov}\left(\frac{x(t_1)}{\sqrt{Dx(t_1)}},\frac{x(t_2)-x(t_1)}{\sqrt{D(x(t_2)-x(t_1))}},\ldots,\frac{x(t_m)-x(t_{m-1})}{\sqrt{D(x(t_m)-x(t_{m-1}))}}\right).$$

Следующая лемма дает еще одну характеризацию свойства локального нондетерминизма случайного процесса.

Лемма 3.2 [58]. *Процесс x является локально нондетерминированным на J тогда и только тогда, когда для любого $m\ge 2$ и каждого вектора $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_m)\ne 0$*

$$\lim_{c\to 0}\inf_{t_m-t_1\le c}D\left\{b_1\frac{x(t_1)}{\sqrt{Dx(t_1)}}+\sum_{j=2}^m b_j\frac{x(t_j)-x(t_{j-1})}{\sqrt{D(x(t_j)-x(t_{j-1}))}}\right\}>0. \tag{3.1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x имеет свойство локального нондетерминизма. Предположим, что существует такой вектор $\vec{b}\ne 0$, что

$$\lim_{c\to 0}\inf_{t_m-t_1\le c}D\left\{b_1\frac{x(t_1)}{\sqrt{Dx(t_1)}}+\sum_{j=2}^m b_j\frac{x(t_j)-x(t_{j-1})}{\sqrt{D(x(t_j)-x(t_{j-1}))}}\right\}=0.$$

Это означает, что для некоторой последовательности $t^l=(t_1^l,\ldots,t_m^l)$

$$\lim_{t^l_m - t^l_1 \to 0} D\left\{ b_1 \frac{x(t_1)}{\sqrt{Dx(t_1)}} + \sum_{j=2}^{m} b_j \frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{\sqrt{D(x(t_j) - x(t_{j-1}))}} \right\} = 0. \tag{3.2}$$

Из слабо компактной последовательности векторов

$$\vec{x}^l := \left(\frac{x(t^l_1)}{\sqrt{Dx(t^l_1)}}, \frac{x(t^l_2) - x(t^l_1)}{\sqrt{D(x(t^l_2) - x(t^l_1))}}, \ldots, \frac{x(t^l_m) - x(t^l_{m-1})}{\sqrt{D(x(t^l_m) - x(t^l_{m-1}))}} \right)$$

в $\mathbb{R}^m$ выберем слабо сходящуюся подпоследовательность. Считаем, что это она сама. Тогда

$$\vec{x}^l \Rightarrow \eta, \quad t^l_m - t^l_1 \to 0,$$

где η имеет гауссовское распределение, а также

$$\mathrm{cov}_{\vec{x}^l} \to \mathrm{cov}_{\vec{\eta}}, \quad t^l_m - t^l_1 \to 0, \tag{3.3}$$

$$\det \mathrm{cov}_{\vec{x}^l} \to \det \mathrm{cov}_{\vec{\eta}}, \quad t^l_m - t^l_1 \to 0. \tag{3.4}$$

Поскольку x — центрированный гауссовский процесс, то условие (3.2) означает, что

$$(\mathrm{cov}_{\vec{x}^l}\, \vec{b}, \vec{b}) \to 0, \quad t^l_m - t^l_1 \to 0. \tag{3.5}$$

В силу (3.3)

$$(\mathrm{cov}_{\vec{x}^l}\, \vec{b}, \vec{b}) \to (\mathrm{cov}_{\vec{\eta}}\, \vec{b}, \vec{b}), \quad t^l_m - t^l_1 \to 0. \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) следует, что

$$(\mathrm{cov}_{\vec{\eta}}\, \vec{b}, \vec{b}) = 0.$$

Это означает, что $\mathrm{cov}_{\vec{\eta}}$ вырождена. Из (3.4) следует, что $\det \mathrm{cov}_{\vec{x}^l} \to 0$, $t^l_m - t^l_1 \to 0$. Это противоречит локальной неопределенности процесса x.

Достаточность. Пусть выполняется условие (3.1), однако x не является локально нондетерминированным, т. е.

$$\lim_{c \to 0} \inf_{t_m - t_1 \le c} \det \mathrm{cov} \left(\frac{x(t_1)}{\sqrt{Dx(t_1)}}, \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\sqrt{D(x(t_2) - x(t_1))}}, \ldots, \frac{x(t_m) - x(t_{m-1})}{\sqrt{D(x(t_m) - x(t_{m-1}))}} \right) = 0.$$

Это означает, что существует последовательность $t^l = (t^l_1, \ldots, t^l_m)$ такая, что

$$\det \mathrm{cov} \left(\frac{x(t^l_1)}{\sqrt{Dx(t^l_1)}}, \frac{x(t^l_2) - x(t^l_1)}{\sqrt{D(x(t^l_2) - x(t^l_1))}}, \ldots, \frac{x(t^l_m) - x(t^l_{m-1})}{\sqrt{D(x(t^l_m) - x(t^l_{m-1}))}} \right) \to 0, \quad t^l_m - t^l_1 \to 0.$$

Снова из слабой компактности последовательности

$$\vec{x}^l := \left(\frac{x(t^l_1)}{\sqrt{Dx(t^l_1)}}, \frac{x(t^l_2) - x(t^l_1)}{\sqrt{D(x(t^l_2) - x(t^l_1))}}, \ldots, \frac{x(t^l_m) - x(t^l_{m-1})}{\sqrt{D(x(t^l_m) - x(t^l_{m-1}))}} \right)$$

выбираем слабо сходящуюся подпоследовательность. Эта подпоследовательность сходится к вырожденному гауссовскому вектору η. Значит, существует такой вектор $\vec{b} \neq 0$, что $\mathrm{cov}_{\vec{\eta}}\,\vec{b} = 0$. Следовательно,

$$(\mathrm{cov}_{\vec{x}^l}\,\vec{b}, \vec{b}) \to 0, \quad t_m^l - t_1^l \to 0,$$

что противоречит условию (3.1).

Лемма 3.2 доказана.

Ранее уже отмечалось, что гауссовский процесс может быть определен с помощью белого шума в пространстве $L_2([0;1])$. Рассмотрим произвольную функцию

$$g \in C\big([0;1], L_2([0;1])\big),$$

где $C([0;1], L_2([0;1]))$ — пространство непрерывных функций из $[0;1]$ в $L_2([0;1])$. Формула $x(t) = (g(t), \xi)$, $t \in [0;1]$, задает центрированный гауссовский процесс x, все свойства которого полностью определяются функцией g. Поэтому удобно было бы иметь определение свойства локального нондетерминизма в терминах функции g. Пусть $G(e_1, \ldots, e_n)$ — определитель Грама, построенный по векторам $e_1, \ldots, e_n$. Следующая лемма описывает свойство локального нондетерминизма в терминах функции g, которая задает процесс x.

Лемма 3.3. *Гауссовский процесс x является локально нондетерминированным на J, если для каждого $m \geq 2$*

$$\lim_{c \to 0} \inf_{t_m - t_1 \leq c} \frac{G(g(t_1), \Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{m-1}))}{\|g(t_1)\|^2 \|\Delta g(t_1)\|^2 \ldots \|\Delta g(t_{m-1})\|^2} > 0.$$

Доказательство. Данное утверждение является следствием определения V_m и соотношения

$$V_2 \ldots V_m = \frac{\det \mathrm{cov}(x(t_i), x(t_j))_{ij=1}^m}{D(x(t_1)) D((x(t_2) - x(t_1))) \ldots D(x(t_m) - x(t_{m-1}))} =$$

$$= \frac{G(g(t_1), \Delta g(t_1), \ldots, \Delta g(t_{m-1}))}{\|g(t_1)\|^2 \|\Delta g(t_1)\|^2 \ldots \|\Delta g(t_{m-1})\|^2}.$$

Следующая лемма описывает широкий класс гауссовских процессов, обладающих свойством локального нондетерминизма.

Лемма 3.4. *Пусть A — непрерывно обратимый оператор в $L_2([0;1])$. Тогда гауссовский процесс $x(t) = (A\mathbb{1}_{[0;t]}, \xi)$, $t \in [0;1]$, является локально неопределенным на $(0;1)$.*

Доказательство. Обозначим $g_0(t) := \mathbb{1}_{[0;t]}$. Покажем, что

$$\lim_{c \to 0} \inf_{t_m - t_1 \leq c} \frac{G(Ag_0(t_1), A\Delta g_0(t_1), \ldots, A\Delta g_0(t_{m-1}))}{\|Ag_0(t_1)\|^2 \|A\Delta g_0(t_1)\|^2 \ldots \|A\Delta g_0(t_{m-1})\|^2} > 0.$$

Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Пусть A — непрерывно обратимый оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда для всех $k \geq 1$ существует положительная константа $c(k)$, зависящая от k и оператора A, такая, что для любых $e_1, \ldots, e_k \in H$ выполняется соотношение*

$$G(Ae_1, \ldots, Ae_k) \geq c(k) G(e_1, \ldots, e_k).$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$\inf G\left(\frac{Af_1}{\|Af_1\|},\ldots,\frac{Af_k}{\|Af_k\|}\right)>0,$$

где инфимум берется по всем ортонормированным системам $(f_1,\ldots,f_k)$. Использовав метод ортогонализации Грама–Шмидта, построим ортонормированную систему $q_1,\ldots,q_k$ из $\frac{Af_1}{\|Af_1\|},\ldots,\frac{Af_k}{\|Af_k\|}$. Здесь

$$q_j=\frac{Af_j}{\|Af_j\|}-\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}\frac{Af_i}{\|Af_i\|}$$

с некоторыми a_{ij}. Докажем, что

$$\inf_{(f_1,\ldots,f_k)}G\left(\frac{Af_1}{\|Af_1\|},\ldots,\frac{Af_k}{\|Af_k\|}\right)=\inf_{(f_1,\ldots,f_k)}\prod_{i=1}^{k}\|q_i\|^2>0.$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что это не так. Тогда существуют последовательность $\{f_1^n,\ldots,f_k^n\}_{n\geq 1}$ и $j=\overline{1,k}$ такие, что $\|q_j^n\|\to 0,\ n\to\infty$. Непрерывная обратимость оператора A влечет следующее:

$$\left\|\frac{f_j^n}{\|Af^n)j\|}-\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^n\frac{f_i^n}{\|Af_i^n\|}\right\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Однако

$$\left\|\frac{f_j^n}{\|Af_j^n\|}-\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^n\frac{f_i^n}{\|Af_i^n\|}\right\|\geq\frac{1}{\|Af_j^n\|}>0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 3.5.

Из леммы 3.5 следует, что

$$\frac{G(Ag_0(t_1),A\Delta g_0(t_1),\ldots,A\Delta g_0(t_{m-1}))}{\|Ag_0(t_1)\|^2\|A\Delta g_0(t_1)\|^2\ldots\|A\Delta g_0(t_{m-1})\|^2}>$$

$$>c(m)\|A\|^{-m}\frac{G(g_0(t_1),\Delta g_0(t_1),\ldots,\Delta g_0(t_{m-1}))}{\|g_0(t_1)\|^2\|\Delta g_0(t_1)\|^2\ldots\|\Delta g_0(t_{m-1})\|^2}=c(m)\|A\|^{-m}.$$

Таким образом,

$$\lim_{c\to 0}\inf_{t_m-t_1\leq c}\frac{G(A\Delta g_0(t_1),\ldots,A\Delta g_0(t_{m-1}))}{G(A\Delta g_0(t_1),\ldots,A\Delta g_0(t_{m-2}))\|A\Delta g_0(t_{m-1})\|^2}>0. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что процесс x является локально нондетерминированным.

Лемма 3.4 доказана.

В некоторых случаях выполнение условия локального нондетерминизма может быть гарантировано в терминах ковариационной функции случайного процесса.

Пусть x — гауссовский марковский процесс, удовлетворяющий свойствам 1, 2, сформулированным в начале этого пункта.

Лемма 3.6 [58]. *Процесс x обладает свойством локального нондетерминизма тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{c\to 0}\sup_{0<t-s\le c}\frac{|\operatorname{cov}(x(t)-x(s),x(s))|}{\sqrt{M(x(t)-x(s))^2Mx(s)^2}}<1.$$

Далее рассмотрим гауссовский процесс вида

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,u)\varkappa(du),\quad t\in J.$$

Здесь F — измеримая функция по паре переменных (t,u), а $\varkappa$ — центрированный гауссовский процесс на $\mathbb{R}$ с независимыми приращениями и

$$M(\varkappa(t)-\varkappa(s))^2=N(t)-N(s),$$

где N — неубывающая функция. Предположим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{t}F^2(t,u)dN(u)<+\infty,\quad t\in J.$$

Лемма 3.7 [58]. *Пусть*

$$\lim_{c\to 0}\inf_{\substack{0<t-s\le c\\ t,s\in J}}\frac{\displaystyle\int_s^t F^2(t,u)dN(u)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{s}(F(t,u)-F(s,u))^2dN(u)}>0,$$

тогда x является локально нондетерминированным процессом на J.

Перейдем к рассмотрению условия локального нондетерминизма для гауссовских процессов со стационарными приращениями. Случайный процесс $\{x(t),\,t\ge 0\}$ со значениями в $\mathbb{R}$ такой, что:

1) для любых t, s

$$M(x(t)-x(s))^2<+\infty;$$

2) для любых t_1, s_1, t_2, s_2

$$r(t_1,s_1,t_2,s_2)=M(x(t_1)-x(s_1))(x(t_2)-x(s_2))$$

удовлетворяет соотношению

$$r(t_1+h,s_1+h,t_2+h,s_2+h)=r(t_1,s_1,t_2,s_2);$$

3) $\lim_{h\to 0}M|x(t+h)-x(t)|^2=\lim_{h\to 0}r(0,h,0,h)=0$,
называется процессом со стационарными приращениями.

***Пример* 3.1.** Пусть x_1 — стационарный в широком смысле случайный процесс. Тогда

$$x(t) := \int\limits_0^t x_1(s)\,ds$$

является процессом со стационарными приращениями.

***Пример* 3.2.** Фрактальное броуновское движение $\Big($центрированный гауссовский процесс с функцией ковариации вида

$$K(t,s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + S^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad H \in (0;1)\Big)$$

является процессом со стационарными приращениями.

Пусть x — случайный процесс со стационарными приращениями. Будем считать, что $x(0) = 0$. Обозначим $\sigma^2(t) = Mx(t)^2$. Известно [62], что $\sigma^2(t)$ имеет спектральное представление вида

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{ixt} - 1|^2 \frac{(1+x^2)}{x^2} dF(x), \tag{3.8}$$

где F — ограниченная неубывающая функция.

Лемма 3.8 [58]**.** *Существует такое $d > 0$, что x является локально нондетерминированным на $(0;d)$ тогда и только тогда, когда:*

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 dF(x) = +\infty$;
2) *для всех $m \geq 2$ и каждого ненулевого вектора $(b_1,\ldots,b_m)$ выполняется следующее:*

$$\varliminf_{t_m \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^m b_j \frac{e^{ixt_j} - e^{ixt_{j-1}}}{\sigma(t_j - t_{j-1})} \right|^2 \frac{1+x^2}{x^2} dF(x) > 0.$$

Вернемся к рассмотрению гауссовского процесса $x(t) = (g(t), \xi)$. Следующее условие строгого локального нондетерминизма гарантирует, что конечные семейства приращений процесса x ведут себя так же, как приращения винеровского процесса на малых интервалах времени [34].

Определение 3.2. *Процесс x (или функция g) является строго локально нондетерминированным, если для любого фиксированного $k \geq 2$ и произвольного $M \subset \{1,\ldots,k-1\}$*

$$G\big(\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1})\big) \sim G(\Delta g(t_i), i \notin M) \prod_{i \in M} \|\Delta g(t_i)\|^2, \qquad \max_{i \in M} \Delta t_i \to 0.$$

Приведем пример класса процессов, имеющих свойство, описанное в определении 3.2. По-прежнему, ξ — белый шум в пространстве $L_2([0;1])$, S — компактный оператор в $L_2([0;1])$, I — тождественный оператор в том же пространстве.

Определение 3.3 [34, 64]**.** *Процесс*

$$x(t) = ((I+S)1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \xi)$$

называется процессом, полученным с помощью компактных возмущений винеровского.

Богатый класс процессов, полученных с помощью компактных возмущений винеровского, возникает при решении краевых задач с белым шумом [63].

***Пример* 3.3** [34, 64]**.** Пусть ξ — белый шум в $L_2\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $w(t) = (1\!\!1_{[0;t]}, \xi)$, а u — решение следующей краевой задачи [63]:

$$\begin{aligned} &u'' + u = \xi, \\ &u(0) = 0, \\ &u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Под решением задачи (3.9) понимается непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс такой, что для любой $f \in C^2\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$, носитель которой лежит внутри отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, выполняется равенство

$$\int_0^{\pi/2} u(s)(f(s) + f''(s))ds = \int_0^{\pi/2} f(s)dw(s).$$

Пусть G — функция Грина задачи (3.9). Можно показать, что случайный процесс

$$u(t) = \int_0^{\pi/2} G(t,s)dw(s)$$

является решением задачи (3.9) и $u(t) = (S1\!\!1_{[0;t]}, \xi)$, где S — компактный оператор. Тем самым процесс $w(t) + u(t)$ удовлетворяет определению 3.2.

Лемма 3.9 [34, 64]**.** *Если оператор $I + S$ обратим, то функция $g(t) = (I + S)1\!\!1_{[0;t]}$, $t \in$ $\in [0; 1]$, является строго локально нондетерминированной.*

Доказательство. Заметим, что для произвольного $\delta > 0$ в силу обратимости оператора $I + S$

$$\inf\Big\{G(g(t_1'') - g(t_1'), \ldots, g(t_n'') - g(t_n')) :$$

$$0 \leq t_1' < t_1'' \leq \ldots \leq t_n' < t_n'' \leq 1, \ \min_{i=\overline{1,n}}(t_i'' - t_i') \geq \delta\Big\} > 0.$$

Из компактности оператора S следует, что

$$\|g(t'') - g(t')\| \sim \sqrt{t'' - t'}, \quad t'' - t' \to 0.$$

Рассмотрим последовательность $\{0 \leq t_1^k < \ldots < t_n^k \leq 1, \, k \geq 1\}$ и множество $M' \subset \{1, \ldots, n -$ $- 1\}$ такие, что

$$\max_{i \in M'} t_{i+1}^k - t_i^k \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{i\notin M'} t_{i+1}^k - t_i^k > 0.$$

Используя компактность оператора S, можно проверить, что

$$G\big(\Delta g(t_1^k), \ldots, \Delta g(t_{n-1}^k)\big) \sim G(\Delta g(t_i^k), i \notin M') \prod_{i\in M'} \Delta t_i^k, \quad k\to\infty. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует утверждение леммы.

Лемма 3.9 доказана.

Все приведенные условия для гауссовских процессов так или иначе связаны с существованием их локальных времен. Соответствующий результат был получен С. Берманом в [58] и имеет следующий вид.

Теорема 3.1 [58]. *Пусть центрированный гауссовский процесс $x(t)$, $t\in[0;T]$, имеет следующие свойства*:

1) $x(0)=0$ *почти наверное*;

2) x *является локально нондетерминированным на* $(0;T)$;

3) *существуют положительные действительные числа γ, δ и непрерывная четная функция $b(t)$ такая, что $b(0)=0$, $b(t)>0$, $t\in(0,T]$,*

$$\lim_{h\to 0} h^{-\gamma}\int_0^h [b(t)]^{-1-2\delta} dt = 0$$

и $M(x(t)-x(s))^2 \ge b^2(t-s)$ для всех $s,t\in[0;T]$.

Тогда существует модификация $l(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0;T]$, локального времени, непрерывного по паре переменных (x,t) почти наверное, которое удовлетворяет условию Гельдера по t равномерно по x, т. е. для каждого $\gamma'<\gamma$ существуют такие случайные величины η' и η, почти наверное положительные и конечные, что

$$\sup_x \big|l(x,t+h) - l(x,t)\big| \le \eta' |h|^{\gamma}$$

для всех $t, t+h\in[0;T]$ и $|h|<\eta$.

В теореме 3.1 приведены условия, гарантирующие существование локального времени гауссовского процесса, имеющего свойство локального нондетерминизма. Следует отметить, что в работе [79] приведены достаточные условия наличия различных модификаций свойства локального нондетерминизма у гауссовского поля. В качестве применения получен ряд результатов, касающихся асимптотического поведения локального времени поля (асимптотика малых шаров, большие уклонения). На примере процессов, полученных с помощью компактных возмущений винеровского, выясним как строится перенормированное локальное время самопересечений для строго локально нондетерминированных гауссовских процессов на плоскости.

4. Регуляризация локальных времен самопересечения для процессов, полученных с помощью компактных возмущений винеровского. Пусть x — процесс, полученный с помощью компактных возмущений винеровского на плоскости, т. е. гауссовский случайный процесс, заданный с помощью независимых гауссовских белых шумов ξ_1, ξ_2 в пространстве $L_2([0;1])$ следующим образом:

$$x(t) = \big(((I+S)1\!\!1_{[0;t]}, \xi_1),\ ((I+S)1\!\!1_{[0;t]}, \xi_2)\big), \quad t\in[0;1].$$

Здесь I, S — соответственно тождественный и компактный операторы в $L_2([0;1])$, $\|S\| < 1$. Далее, для простоты изложения, будем использовать обозначения

$$g^0(t) := 1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \qquad g(t) := (I+S)g^0(t).$$

В настоящем пункте строится регуляризация преобразования Фурье – Винера локального времени самопересечений процесса x. Как было отмечено в пункте 2, преобразование Фурье – Винера случайной величины

$$T_k^x = \int\limits_{\Delta_k} \prod_{i=1}^{k-1} \delta_0(x(t_{i+1}) - x(t_i))\, d\vec{t}$$

могло бы иметь вид

$$\mathcal{T}(T_k^x)(h_1,h_2) = \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{G(\Delta g(t_1)\ldots\Delta g(t_k))} e^{-\frac{1}{2}(\|P_{t_1,\ldots,t_k}h_1\|^2 + \|P_{t_1,\ldots,t_k}h_2\|^2)} d\vec{t}, \tag{4.1}$$

где, как и ранее, $G(\Delta g(t_1)\ldots\Delta g(t_k)$ — определитель Грама, построенный по $\Delta g(t_1),\ldots$ $\ldots,\Delta g(t_{k-1})$, а $P_{t_1,\ldots,t_k}$ — проектор на линейное подпространство, порожденное $\Delta g(t_1),\ldots$ $\ldots,\Delta g(t_{k-1})$. Однако интеграл (4.1) расходится на любой диагонали симплекса Δ_k. Поэтому построение перенормировки для локального времени самопересечений процесса x эквивалентно сейчас регуляризации расходящегося интеграла (4.1). Обозначим через $\widetilde{\Delta g}(t_1),\ldots,\widetilde{\Delta g}(t_{k-1})$ ортонормированную систему, полученную из $\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1})$ с помощью обычной процедуры ортогонализации. Поскольку элементы $\Delta g(t_1),\ldots,\Delta g(t_{k-1})$ линейно независимы, то элементы $\widetilde{\Delta g}(t_1),\ldots,\widetilde{\Delta g}(t_{k-1})$ не равны нулю [34]. Для $M \subset \{1,\ldots,k-1\}$ обозначим через P_M проектор на линейное подпространство, порожденное $\widetilde{\Delta g}(t_i)$, $i \in M$. Регуляризация расходящегося интеграла (4.1) описывается следующим утверждением.

Теорема 4.1. *Для произвольной функции $h \in L_2([0;1])$ интеграл*

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{G(\Delta g(t_1)\ldots\Delta g(t_k))} \sum_{M\subset 1,\ldots,k-1} (-1)^{|M|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|P_M h\|^2\right\} d\vec{t}$$

сходится.

Доказательство. Пусть $I_1,\ldots,I_n$ — непересекающиеся интервалы $(t_1^1,t_2^1),\ldots,(t_1^n,t_2^n)$ отрезка $[0;1]$. Положим $I_i g = g(t_2^i) - g(t_1^i)$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим определитель Грама $G(I_1 g,\ldots$ $\ldots,I_n g)$, построенный по $I_1 g,\ldots,I_n g$. Используя свойство строгого локального нондетерминизма, можно проверить, что

$$c_n = \inf \frac{G(I_1 g,\ldots,I_n g)}{\prod_{j=1}^n (t_2^j - t_1^j)} > 0,$$

где инфимум берется по всем непересекающимся интервалам $(t_1^1;t_2^1),\ldots,(t_1^n;t_2^n)$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{G(\Delta g(t_1)\ldots\Delta g(t_k))} \left(\sum_{M\subset 1,\ldots,k-1} (-1)^{|M|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|P_M h\|^2\right\}\right) d\vec{t}\right| \le$$

$$\leq c \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)} \left| \sum_{M \subset 1,\ldots,k-1} (-1)^{|M|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|P_M h\|^2\right\} \right| d\vec{t}.$$

Справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)} \left| \sum_{M \subset 1,\ldots,k-1} (-1)^{|M|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|P_M h\|^2\right\} \right| d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1-\exp\left\{-\frac{1}{2}(h, \Delta g(t_j))^2\right\}}{t_{j+1}-t_j} d\vec{t} \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\left(h, \widetilde{\Delta} g(t_j)\right)^2}{t_{j+1}-t_j} d\vec{t}.$$

Оценим интеграл $\int_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(h, \widetilde{\Delta} g(t_j))^2}{t_{j+1}-t_j} d\vec{t}$, сначала проинтегрировав по переменной t_k, затем по t_{k-1} и т. д.

Заметим, что

$$\widetilde{\Delta} g(t_{k-1}) = \frac{\Delta g(t_{k-1}) - P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1})}{\|\Delta g(t_{k-1}) - P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1})\|}.$$

Поскольку процесс x строго локально нондетерминированный, то

$$\left\|\Delta g(t_{k-1}) - P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1})\right\|^2 =$$

$$= \frac{\Gamma_{t_1\ldots t_k}}{\Gamma_{t_1\ldots t_{k-1}}} \sim \|\Delta g(t_{k-1})\|^2, \quad t_k - t_{k-1} \to 0.$$

Более того,

$$\left\|\Delta g(t_{k-1})\right\|^2 \sim t_k - t_{k-1}, \quad t_k - t_{k-1} \to 0,$$

поэтому

$$\frac{\|\Delta g(t_{k-1}) - P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1})\|^2}{t_k - t_{k-1}} \to 1, \quad t_k - t_{k-1} \to 0.$$

Следовательно, существует такая положительная константа c, что

$$\frac{\left\|\Delta g(t_{k-1}) - P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1})\right\|^2}{t_k - t_{k-1}} \geq c.$$

Поэтому

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} dt_k \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{\big(h, \Delta g(t_{k-1}) - P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1})\big)^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k \leq$$

$$\leq 2c \left[\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \Delta g(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k + \int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, P_{t_1\ldots t_k}\Delta g(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k \right].$$

Покажем, что существует такая положительная константа c, что

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \Delta g^0(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} dt_k \leq c\|h\|^2.$$

Действительно, нетрудно заметить, что

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \Delta g^0(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} dt \leq 2 \int\limits_{t_{k-1}}^{1} h(s_1) \int\limits_{s_1}^{1} \frac{h(s_2)}{s_2 - t_{k-1}} ds_2 ds_1.$$

Рассмотрим в $L_2([t_{k-1}; 1])$ интегральный оператор с ядром

$$k(s_1, s_2) = \frac{1}{s_2 - t_{k-1}} \mathbb{I}_{\{s_2 > s_1\}}.$$

Покажем, что k задает ограниченный оператор в $L_2([t_{k-1}; 1])$, использовав следующее утверждение, называемое тестом Шура [65].

Теорема 4.2 [65]. *Если существуют строго положительные функции* $p, q\colon [t_{k-1}; 1] \to \to (0; +\infty)$ *и* $\alpha, \beta > 0$ *такие, что*

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} k(s_1, s_2) q(s_2) ds_2 \leq \alpha p(s_1),$$

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} k(s_1, s_2) p(s_1) ds_1 \leq \beta q(s_2),$$

то k *соответствует ограниченному оператору в* $L_2([t_{k-1}, 1])$ *с нормой не больше чем* $\alpha\beta$.

Положим

$$p(s_1) = \frac{1}{\sqrt{s_1 - t_{k-1}}},$$

$$q(s_2) = \frac{1}{\sqrt{s_2 - t_{k-1}}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} k(s_1, s_2) q(s_2) ds_2 = \int\limits_{s_1}^{1} \frac{1}{(s_2 - t_{k-1})^{3/2}} ds_2 \leq \frac{2}{\sqrt{s_1 - t_{k-1}}},$$

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} k(s_1, s_2) p(s_1) ds_1 = \int\limits_{t_{k-1}}^{s_2} \frac{1}{s_1 - t_{k-1}} ds_1 \frac{1}{s_2 - t_{k-1}} = \frac{2}{\sqrt{s_2 - t_{k-1}}}.$$

Таким образом,

$$2 \int\limits_{t_{k-1}}^{1} h(s_1) \int\limits_{s_1}^{1} \frac{h(s_2)}{s_2 - t_{k-1}} ds_2 ds_1 \leq 8\|h\|^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \Delta g(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k =$$

$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{((I + S^*)h, \Delta g^0(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k \leq$$

$$\leq c\|(I + S^*)h\|^2 \leq c'\|h\|^2 \tag{4.2}$$

и

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, P_{t_1 \ldots t_k} \Delta g(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k =$$

$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{((I + S^*) P_{t_1 \ldots t_k} h, \Delta g^0(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} dt_k \leq$$

$$\leq c\|(I + S^*) P_{t_1 \ldots t_k} h\|^2 \leq$$

$$\leq c'\|h\|^2. \tag{4.3}$$

Из оценок (4.2), (4.3) следует, что

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \widetilde{\Delta} g(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} dt_k \leq c''\|h\|^2.$$

Возвращаясь к интегралу

$$\int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j} d\vec{t},$$

получаем соотношение

$$\int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_j))^2}{t_j - t_{j-1}} d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-2} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j} \int\limits_{t_{k-1}}^{1} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} dt_k dt_1 \ldots dt_{k-1} \leq$$

$$\leq c'' \|h\|^2 \int\limits_{\Delta_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-2} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j} d\vec{t}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(h, \widetilde{\Delta g}(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j} d\vec{t} \leq c''' \|h\|^{2(k-1)}.$$

Теорема 4.1 доказана.

В качестве приложения теоремы 4.1 рассмотрим следующий пример.

***Пример* 4.1.** Пусть

$$x(t) = \Big(((I - P_{\mathbb{I}_{[0;1]}}) g^0(t), \xi_1), ((I - P_{\mathbb{I}_{[0;1]}}) g^0(t), \xi_2) \Big), \quad t \in [0;1],$$

— броуновский мост на плоскости. Здесь $P_{\mathbb{I}_{[0;1]}}$ — проектор на $\mathbb{I}_{[0;1]}$.

В силу теоремы 4.1 регуляризированное преобразование Фурье – Винера локального времени двойных самопересечений процесса x имеет вид

$$\mathcal{T}(\mathcal{T}_2^x)(h_1, h_2) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{\|\Delta g(t_1)\|^2} \left(1 - \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\|P_{t_1 t_2} h_1\|^2 + \|P_{t_1 t_2} h_2\|^2) \right\} \right) d\vec{t}, \tag{4.4}$$

где $\|\Delta g(t_1)\|^2 = t_2 - t_1 - (t_2 - t_1)^2$. Формально теорема 4.1 не может быть применена, так как $\|P_{\mathbb{I}_{[0;1]}}\| = 1$. Однако можно показать, что доказательство теоремы 4.1 справедливо и в этом случае. Найдем разложение Ито – Винера перенормированного локального времени двойного самопересечения процесса x, использовав (4.4). Заметим, что

$$\mathcal{T}(\mathcal{T}_2^x)(h_1, h_2) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \left(\frac{(h_1, \Delta g(t_1))^2}{\|\Delta g(t_1)\|^2} + \frac{(h_2, \Delta g(t_1))^2}{\|\Delta g(t_1)\|^2} \right)^k \frac{1}{\|\Delta g(t_1)\|^2} d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} \left(\frac{(h_1, \Delta g(t_1))^2}{\|\Delta g(t_1)\|^2} \right)^{2l} \left(\frac{(h_2, \Delta g(t_1))^2}{\|\Delta g(t_1)\|^2} \right)^{2k-2l} \frac{1}{\|\Delta g(t_1)\|^2} d\vec{t} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} \int\limits_0^1 \overset{2k}{\cdots} \int (\Delta g(t_1))^{\otimes 2l} h_1^{\otimes 2l} \times$$

$$\times (\Delta g(t_1))^{\otimes 2k-2l} h_2^{\otimes 2k-2l} \frac{1}{\|\Delta g(t_1)\|^{2k+2}} \, du \, dv \, d\vec{t}. \tag{4.5}$$

Здесь мы используем обозначение ab для

$$\int\limits_0^1 \overset{l}{\cdots} \int a(u_1, \ldots, u_l) b(u_1, \ldots, u_l) \, d\vec{u}, \quad a, b \in L_2([0;1])^{\otimes l}.$$

Из (4.5) следует, что формальное разложение Ито – Винера для $\mathcal{T}_2^x$ имеет вид

$$\mathcal{T}_2^x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \overset{2k}{\cdots} \int \int\limits_{\Delta_2} (\mathbb{1}_{[t_1;t_2]} - (t_2 - t_1) \mathbb{1}_{[0;1]})^{\otimes 2l} (\mathbb{1}_{[t_1;t_2]} - (t_2 - t_1) \mathbb{1}_{[0;1]})^{\otimes 2k-2l} \times$$

$$\times \frac{1}{(t_2 - t_1 - (t_2 - t_1)^2)^{k+1}} \, d\vec{t} \, dw_1^1 \ldots dw_{2l}^1 \, dw_{2l+1}^2 \ldots dw_{2k}^2.$$

5. Локальные времена самопересечения для диффузионных процессов. В настоящем пункте исследуются локальные времена самопересечения для двумерных диффузионных процессов, описанных посредством стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &dy(s) = a(y(s))ds + B(y(s))dw(s), \\ &y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Коэффициенты $a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ удовлетворяют условию Липшица и существуют такие положительные константы m_1, m_2, что

$$m_1 \le B^* B \le m_2. \tag{5.2}$$

Мотивировкой к исследованию локальных времен самопересечения диффузионного процесса (5.1) является следующее утверждение.

Теорема 5.1 [34]. *С положительной вероятностью траектория двумерного диффузионного процесса y имеет точки самопересечения.*

Доказательство. Обозначим через $C_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$ и $C'_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$ пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций соответственно из $[0;1]$ в $\mathbb{R}^2$, равных y_0 в точке нуль. Пусть μ_y — распределение процесса y в пространстве $C_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$. Согласно теореме Струка – Варадана [23], носитель меры μ_y в $C_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$ равен замыканию множества

$$\left\{ f : \exists h \in L_2([0;1],\mathbb{R}^2) : f(t) = y_0 + \int\limits_0^t a(f(s))ds + \int\limits_0^t B(f(s))h(s)\,ds \right\}.$$

Заметим, что для $g \in C^1_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$, в силу обратимости D, существует такое h, что

$$g(t) - y_0 - \int\limits_0^t a(g(s))ds = \int\limits_0^t B(g(s))h(s)ds.$$

Следовательно, все функции класса $C^1_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$ принадлежат $\operatorname{supp}\mu_y$. Выберем функцию $f \in C^1_{y_0}([0;1],\mathbb{R}^2)$ так, чтобы для любого $t \in [0;1]$ выполнялось следующее:

$$f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 \neq 0$$

и чтобы кривая, заданная параметрически,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_1(t), \\ x_2(t) &= f_2(t), \end{aligned} \qquad t \in [0;1],$$

имела точки самопересечения. Выберем ε так, чтобы для произвольной функции $g \in C_{y_0}([0;1])$, удовлетворяющей условию $\max_{[0;1]}|f_i - g_i| < \varepsilon$, $i = 1,2$, кривая, заданная параметрически,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= g_1(t), \\ x_2(t) &= g_2(t), \end{aligned} \qquad t \in [0;1],$$

имела точки самопересечения. Поскольку для решения y стохастического дифференциального уравнения

$$P\left\{ \max_{[0;1]}|f_i - g_i| < \varepsilon,\ i = 1,2 \right\} > 0,$$

то вероятность того, что траектория y на $[0;1]$ имеет точки самопересечения, положительна.

Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.1 дает основание для исследования локальных времен самопересечения диффузионного процесса (5.1). Пусть, как и ранее,

$$T^y_{\varepsilon,2} = \int\limits_{\Delta_2} f_\varepsilon(y(s_2) - y(s_1))d\vec{t}.$$

Теорема 5.2 [34, 66].

$$MT^y_{\varepsilon,2} \sim \frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon| M\int\limits_0^1 \frac{1}{\det B(y(s))}ds, \quad \varepsilon\to 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{E}_y(s,x_1,x_2)$ переходную плотность данного диффузионного процесса. Справедлива следующая оценка [67]:

$$\frac{c_1}{s}e^{-\frac{c_2\|x_1-x_2\|^2}{s}} \le \mathcal{E}_y(s,x_1,x_2) \le \frac{c_3}{s}e^{-\frac{c_4\|x_1-x_2\|^2}{s}}. \tag{5.3}$$

Из оценки (5.3) следует, что для любого $t\in(0;1)$

$$\sup_{\varepsilon>0} M\int\limits_t^1\int\limits_0^t f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))ds_1ds_2 < +\infty. \tag{5.4}$$

Для некоторого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим разбиение симплекса

$$\Delta_2 = \bigcup_{k=0}^{n-1}\Delta_2\left(\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right)\cup\bigcup_{k=0}^{n-2}R_2^k,$$

где

$$\Delta_2\left(\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right) := \left\{\frac{k}{n}\le s_1\le s_2\le\frac{k+1}{n}\right\},$$

$$R_2^k := \left\{\frac{k}{n}\le s_1\le\frac{k+1}{n},\ \frac{k+1}{n}\le s_2\le 1\right\}.$$

Обозначим

$$P_n := \bigcup_{k=0}^{n-2}R_2^k, \qquad \Delta_2^n := \bigcup_{k=0}^{n-1}\Delta_2\left(\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right).$$

В силу оценки (5.4)

$$\sup_{\varepsilon>0}\int\limits_{P_n} f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))d\vec{s} \le c(n),$$

где $c(n)$ — положительная константа, зависящая от n.

Исследуем асимптотическое поведение

$$M\int\limits_{\Delta_2^n} f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))d\vec{s}$$

при $\varepsilon\to 0$. Заметим, что

$$M\int\limits_{\Delta_2^n} f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))d\vec{s} = M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})} f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))d\vec{s} =$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})} MM(f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))/\mathcal{F}_{k/n})d\vec{s} =$$

$$= M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} f_\varepsilon(x_2-x_1)\times$$

$$\times\mathcal{E}_y\left(s_1-\frac{k}{n},\, y\left(\frac{k}{n}\right),\, x_1\right)\mathcal{E}_y(s_2-s_1,x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\,d\vec{s},$$

где $\mathcal{F}_t=\sigma(w(r), r\le t)$. Согласно методу параметрикса [68], предыдущее выражение равно

$$M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} f_\varepsilon(x_2-x_1)\left(\mathcal{E}_x\left(s_1-\frac{k}{n},y\left(\frac{k}{n}\right),x_1\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{k/n}^{s_1}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Phi\left(s_3-\frac{k}{n},y\left(\frac{k}{n}\right),x_3\right)\mathcal{E}_x\left(s_1-s_3,x_3,x_1\right)dx_3ds_3\right)\times$$

$$\times\left(\mathcal{E}_{\widetilde{x}}(s_2-s_1,x_1,x_2)+\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Phi(s_3-s_1,x_1,x_3)\,\mathcal{E}_{\widetilde{x}}(s_2-s_3,x_3,x_2)dx_3ds_3\right)dx_1\,dx_2\,d\vec{s},$$

где процессы x на $\left[\frac{k}{n};s_1\right]$ и $\widetilde{x}$ на $[s_1;s_2]$ удовлетворяют уравнениям

$$dx(s)=a\left(y\left(\frac{k}{n}\right)\right)ds+B\left(y\left(\frac{k}{n}\right)\right)dw(s),$$

$$x\left(\frac{k}{n}\right)=y\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$d\widetilde{x}(s)=a(x(s_1))ds+B(x(s_1))dw(s),$$

$$\widetilde{x}(s_1)=x(s_1),$$

а для функции Φ справедлива оценка [68]

$$\left|\Phi(s_3-s_1,x_1,x_2)\right|\le\frac{c_3}{(s_3-s_1)^{3/2}}e^{-\frac{c_4\|x_3-x_1\|^2}{(s_3-s_1)}}. \tag{5.5}$$

Таким образом,

$$M\int\limits_{\Delta_2^n} f_\varepsilon(y(s_2)-y(s_1))d\vec{s}=$$

$$=M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} f_\varepsilon(x_2-x_1)\,\mathcal{E}_x\left(s_1-\frac{k}{n},y\left(\frac{k}{n}\right),x_1\right)\mathcal{E}_{\widetilde{x}}\,(s_2-s_1,x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\,d\vec{s}+$$

$$+I_1(k,n,\varepsilon)+I_2(k,n,\varepsilon)+I_3(k,n,\varepsilon),$$

где

$$I_1(k,n,\varepsilon)=M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} f_\varepsilon(x_2-x_1)\mathcal{E}_{\widetilde{x}}(s_2-s_1,x_1,x_2)\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{k}{n}}^{s_1}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Phi\left(s_3-\frac{k}{n},y\left(\frac{k}{n}\right),x_3\right)\mathcal{E}_x(s_1-s_3,x_3,x_1)dx_3ds_3dx_1dx_2d\vec{s},$$

$$I_2(k,n,\varepsilon)=M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} f_\varepsilon(x_2-x_1)\mathcal{E}_x\left(s_1-\frac{k}{n},y\left(\frac{k}{n}\right),x_1\right)\times$$

$$\times\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Phi(s_3-s_1,x_1,x_3)\mathcal{E}_{\widetilde{x}}(s_2-s_3,x_3,x_2)\,dx_3\,ds_3\,dx_1\,dx_2\,d\vec{s},$$

$$I_3(k,n,\varepsilon)=M\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_2(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} f_\varepsilon(x_2-x_1)\times$$

$$\times\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_{\frac{k}{n}}^{s_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\Phi\left(s_3-\frac{k}{n},y\left(\frac{k}{n}\right),x_3\right)\Phi(s_4-s_1,x_1,x_4)\mathcal{E}_x(s_1-s_3,x_3,x_1)\times$$

$$\times\mathcal{E}_{\widetilde{x}}(s_2-s_4,x_4,x_2)dx_3dx_4ds_3ds_4dx_1dx_2d\vec{s}.$$

Используя оценки переходной плотности диффузионного процесса (5.3) и функции Φ (5.5), можно установить соотношение

$$MT^y_{\varepsilon,2}\leq\frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|\det B(y(\frac{k}{n}))|}\frac{1}{n}+o(|\ln\varepsilon|)+c(n).$$

Как следствие

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{MT^y_{\varepsilon,2}}{\frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|} \le M\int\limits_0^1 \frac{1}{|\det B(y(s))|}ds. \tag{5.6}$$

Используя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{MT^y_{\varepsilon,2}}{\frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|} \ge M\int\limits_0^1 \frac{1}{|\det B(y(s))|}ds. \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что

$$MT^y_{\varepsilon,2} \sim \frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon| M\int\limits_0^1 \frac{1}{|\det B(y(s))|}ds, \quad \varepsilon\to 0.$$

Теорема 5.2 доказана.

6. О непрерывной зависимости локального времени от оператора, порождающего интегратор. Понятие локального времени для одномерного винеровского процесса появилось в работах П. Леви 1939 г. Свойства введенного объекта были описаны в работах [74, 75], которые положили начало теории локальных времен для случайных процессов. Обзор результатов теории локальных времен для винеровского процесса изложен в работе А. Н. Бородина [76]. Начиная с работ С. Бермана [58 – 60], которые обсуждались в пункте 3, локальные времена изучены для широкого класса гауссовских процессов. С. Берман ввел понятие локального нондетерминизма, которое, в некотором смысле, означает почти независимость приращений процесса на малых интервалах времени. При некоторых технических условиях это свойство обеспечивает существование и регулярность локального времени как функции пространственной и временной координат. Различные версии локального нондетерминизма для гауссовских процессов были предложены в работах [77 – 79]. Более того, в этих работах авторы не только доказали существование локального времени для локально нондетерминированного гауссовского процесса, а и исследовали его асимптотические свойства, такие как закон повторного логарифма, асимптотика малых шаров. Наличие „хороших” свойств у локально нондетерминированного гауссовского процесса наталкивает на мысль найти класс гауссовских процессов, имеющих некоторый аналог свойства локального нондетерминизма. Возникает гипотеза, что для такого класса процессов результаты, касающиеся существования и перенормировок для локальных времен и локальных времен самопересечения винеровского процесса, будут иметь место. Такой класс процессов был введен в работах А. А. Дороговцева [80, 81] в связи с потребностями стохастического интегрирования.

Определение 6.1 [80]. *Центрированный гауссовский процесс* $x(t)$, $t\in[0;1]$, *называется интегратором, если существует положительная константа c такая, что для произвольных разбиения* $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ *и действительных чисел* $a_0,\ldots,a_{n-1}$ *выполняется следующее соотношение*:

$$M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x(t_{k+1})-x(t_k))\right)^2 \le c\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2\Delta t_k. \tag{6.1}$$

Неравенство (6.1) означает, что для любой функции из пространства $L_2([0;1])$ определен стохастический интеграл по x. Соответствующее стохастическое исчисление, включая формулу Ито, изложено в [80]. Следующее утверждение описывает структуру интеграторов.

Лемма 6.1 [80]. *Центрированный гауссовский процесс $x(t)$, $t \in [0;1]$, является интегратором тогда и только тогда, когда существуют гауссовский белый шум ξ* [38–48, 52] *в $L_2([0;1])$ и линейный непрерывный оператор A в этом же пространстве такой, что x имеет представление*

$$x(t) = (A1\!\!1_{[0;t]}, \xi), \quad t \in [0;1]. \tag{6.2}$$

Заметим, что если A — тождественный оператор, то x в (6.2) является винеровским процессом. Операторы $A = I + S$, где I, S — соответственно тождественный и компактный операторы в пространстве $L_2([0;1])$, порождают класс процессов, полученных с помощью компактных возмущений винеровского процесса, который был определен в пункте 3. В случае, когда оператор A является непрерывно обратимым, в этом же пункте было проверено, что гауссовский процесс x является локально нондетерминированным. В случае непрерывно обратимого оператора $I+S$ в пункте 4 была построена регуляризация преобразования Фурье–Винера для k-кратных локальных времен самопересечения процесса, полученного с помощью компактных возмущений винеровского процесса на плоскости. Это наталкивает на мысль, что если оператор A непрерывно обратим, то x имеет свойства, сходные со свойствами винеровского процесса. Далее мы увидим, что у процесса x, порожденного непрерывно обратимым оператором A, как и у винеровского процесса, существует локальное время в точке, а также установим непрерывную зависимость локального времени от оператора, порождающего интегратор.

Теорема 6.1 [82]. *Пусть оператор A в представлении* (6.2) *процесса x непрерывно обратим. Тогда существует модификация $l(u,t), u \in \mathbb{R}$, $t \in [0;1]$, локального времени, непрерывного по паре переменных (u,t) почти наверное, которое удовлетворяет условию Гельдера по t равномерно по u, т. е. для любой $\gamma < \dfrac{1}{2}$ существуют положительные конечные случайные величины η и η_1 такие, что*

$$\sup_u |l(u,t+h) - l(u,t)| \leq \eta_1 |h|^\gamma$$

для всех $t, t+h \in [0;1]$ и $|h| < \eta$.

Теорема 6.1 была доказана в [82]. Здесь мы кратко напомним основные шаги доказательства.

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что x удовлетворяет условиям 1–3 теоремы 3.1. Очевидно, что $x(0) = 0$ почти наверное. Из леммы 3.4 следует, что x имеет свойство локального нондетерминизма. Покажем, что процесс x удовлетворяет условию 3 теоремы 3.1. Пусть $b(t) = c\sqrt{t}$, $c > 0$. Выберем $\delta < \dfrac{1}{2}$ и γ так, что $\gamma < \dfrac{1}{2} - \delta$. Нетрудно заметить, что

$$\lim_{h\to 0} h^{-\gamma} \int\limits_0^h t^{-1/2-\delta} dt = \frac{2}{1-2\delta} \lim_{h \to 0} h^{1/2-\delta-\gamma} = 0.$$

Проверим теперь, что локальное время непрерывно зависит от оператора A. Предположим, что A_n, A — непрерывно обратимые операторы в $L_2([0;1])$, которые порождают интеграторы x_n, x соответственно, т. е.

$$x_n(t) = (A_n 1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \xi),$$

$$x(t) = (A 1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \xi), \quad t \in [0;1].$$

Из теоремы 6.1 следует, что существуют случайные величины

$$l_n(u) := l_n(u,1) = \int\limits_0^1 \delta_u(x_n(t))dt,$$

$$l(u) := l(u,1) = \int\limits_0^1 \delta_u(x(t))dt, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Теорема 6.2 [83]. *Пусть* A_n, A — *непрерывно обратимые операторы в* $L_2([0;1])$ *такие, что*:

1) *для любого* $y \in L_2([0;1])$

$$\|A_n y - Ay\| \to 0, \quad n \to \infty;$$

2) $\sup_{n\ge 1} \|A_n^{-1}\| < +\infty$.

Тогда

$$M\int\limits_{\mathbb{R}} (l_n(u) - l(u))^2 du \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$M\int\limits_{\mathbb{R}} l_n^2(u)du \to M\int\limits_{\mathbb{R}} l^2(u)du, \quad n \to \infty,$$

и

$$M\int\limits_{\mathbb{R}} l_n(u)l(u)du \to M\int\limits_{\mathbb{R}} l^2(u)du, \quad n \to \infty.$$

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 6.3 [83]. *Пусть* $f_1, \ldots, f_n$ — *линейно независимые элементы в пространстве* $L_2([0;1])$. *Тогда справедливо равенство обобщенных гауссовских функционалов*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \delta_0((f_k, \xi) - u)du = \prod_{k=1}^{n-1} \delta_0((f_{k+1} - f_k, \xi)). \tag{6.3}$$

Доказательство. Найдем преобразование Фурье – Винера левой и правой частей равенства (6.3). Обозначим через $\mathcal{T}(\alpha)(h)$ преобразование Фурье – Винера случайной величины α. Можно показать, что

$$\mathcal{T}\left(\prod_{j=1}^{n-1} \delta_0((r_j, \xi))\right)(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{G(r_1, \ldots, r_{n-1})}} e^{-\frac{1}{2}\|P_{r_1,\ldots,r_{n-1}} h\|^2} \tag{6.4}$$

(см. [34, 64]). Найдем преобразование Фурье – Винера $\int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \delta_0((f_k, \xi) - u)du$:

$$\mathcal{T}\left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \delta_0((f_k, \xi) - u)du\right)(h) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{G(f_1, \ldots, f_n)}} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}(f_1,\ldots,f_n)(u\vec{e}-\vec{a}), u\vec{e}-\vec{a})} du, \tag{6.5}$$

где

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} (f_1, h) \\ \vdots \\ (f_n, h) \end{pmatrix}.$$

Интегрируя (6.5) по u, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{G(f_1, \ldots, f_n)}\sqrt{B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)e, e}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)a, a) - \frac{(B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)a, e)^2}{(B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)e, e)}\right\}. \tag{6.6}$$

Нетрудно показать, что

$$(B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)a, a) = \|P_{f_1,\ldots,f_n} h\|^2.$$

Рассмотрим $f \in$ ЛО$\{f_1, \ldots, f_n\}$ такую, что $(f, f_k) = 1$, $k = \overline{1, n}$. Здесь через ЛО$\{f_1, \ldots, f_n\}$ обозначена линейная оболочка, порожденная элементами $f_1, \ldots, f_n$. Тогда

$$(B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)\vec{e}, \vec{e}) = \|P_{f_1,\ldots,f_n} f\|^2 = \|f\|^2,$$

$$(B^{-1}(f_1, \ldots, f_n)\vec{a}, \vec{e}) = (P_{f_1,\ldots,f_n} h, f).$$

Таким образом, (6.6) равно

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{G(f_1, \ldots, f_n)}\|f\|} e^{-\frac{1}{2}(\|P_{f_1,\ldots,f_n} h\|^2 - \|P_f P_{f_1,\ldots,f_n} h\|^2)}.$$

Обозначим

$$f^{\perp} = \{v \in \text{ЛО}\{f_1, \ldots, f_n\} : (v, f) = 0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{T}\left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \delta_0((f_k, \xi) - u)du\right)(h) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{G(f_1, \ldots, f_n)}} \|f\| e^{-\frac{1}{2}\|P_{f^{\perp}} h\|}. \tag{6.7}$$

Сравнивая (6.4) и (6.7), получаем следующий набор условий на элементы r_k, $k = \overline{1, n-1}$:

1) ЛО$\{r_1, \ldots, r_{n-1}\} = f^{\perp}$;

2) $G(r_1, \ldots, r_{n-1}) = G(f_1, \ldots, f_n)\|f\|^2$.

Заметим, что $r_j := f_{j+1} - f_j$ удовлетворяют условиям 1, 2.

Обозначим

$$L = \text{ЛО}\{f_2 - f_1, \ldots, f_n - f_{n-1}\}.$$

Тогда $f \perp L$. Если r — расстояние от f_1 до L, то

$$G(f_1, \ldots, f_n) = G(f_1, f_2 - f_1, \ldots, f_n - f_{n-1}) = r^2 G(f_2 - f_1, \ldots, f_n - f_{n-1}).$$

Поскольку

$$\left(f_1, \frac{f}{\|f\|}\right) = \|f_1\| \cos\alpha = r,$$

то $r = \dfrac{1}{\|f\|}$. Следовательно,

$$\|f\|^2 G(f_1, \ldots, f_{n-1}) = G(f_2 - f_1, \ldots, f_n - f_{n-1}).$$

Теорема 6.3 доказана.

Из теоремы 6.3 следует, что

$$M \int_{\mathbb{R}} l_n(u) l_n(u) du = M \int_0^1 \int_0^1 \delta_0(x_n(t) - x_n(s)) ds dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} M \int_0^1 \int_0^1 f_\varepsilon(x_n(t) - x_n(s)) ds dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta_2} \frac{ds dt}{\|A_n 1\!\!1_{[s;t]}\|}.$$

Из непрерывной обратимости операторов A_n и условия 2 теоремы 6.2 следует, что

$$\frac{1}{\|A_n 1\!\!1_{[s;t]}\|} \leq \sup_{n \geq 1} \|A_n^{-1}\| \frac{1}{\sqrt{t-s}} < \frac{c}{\sqrt{t-s}}, \quad c > 0.$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$M \int_{\mathbb{R}} l_n^2(u) du \to M \int_{\mathbb{R}} l^2(u) du, \quad n \to \infty.$$

Покажем, что

$$M \int_{\mathbb{R}} l_n(u) l(u) du \to M \int_{\mathbb{R}} l^2(u) du, \quad n \to \infty.$$

Снова, согласно теореме 6.3, справедливо представление

$$M\int_{\mathbb{R}} l_n(u)l(u)du = M\int_0^1\int_0^1 \delta_0(x_n(t)-x(s))dsdt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Delta_2}\frac{dsdt}{\|A_n 1\!\!1_{[0;t]} - A1\!\!1_{[0;s]}\|} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Delta_2}\frac{dsdt}{\|A_n(1\!\!1_{[0;t]} - A_n^{-1}A1\!\!1_{[0;s]})\|} \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sup_{n\ge 1}\|A_n^{-1}\|\int_{\Delta_2}\frac{dsdt}{\|1\!\!1_{[0;t]} - \varkappa_n(s)\|},$$

где $\varkappa_n(s) = A_n^{-1}A1\!\!1_{[0;s]}$.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.2 [83]. *Для любого* $0 \le \alpha < 1$

$$\sup_{y\in L_2([0;1])}\int_0^1 \frac{1}{\|1\!\!1_{[0;t]} - y\|^{1+\alpha}}dt < +\infty.$$

Доказательство. Обозначим $g_0(t) := 1\!\!1_{[0;t]}$. Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{1}{\|g_0(t)-y\|^{1+\alpha}}dt = \int_0^{+\infty}\lambda\big\{t\colon \|g_0(t)-y\|^{-(1+\alpha)} \ge z\big\}dz,$$

где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Тогда для доказательства леммы достаточно показать, что для $b > 0$

$$\sup_{y\in L_2([0;1])}\int_b^{+\infty}\lambda\big\{t\colon \|g_0(t)-y\|^{-(1+\alpha)} \ge z\big\}dz < +\infty.$$

Для любых $g_0(t_0)$, $g_0(t_1)$ из замкнутого шара $\overline{B}\left(y, \dfrac{1}{z^{1/(1+\alpha)}}\right)$ имеет место соотношение

$$|t_0 - t_1| = \|g_0(t_0) - g_0(t_1)\|^2 \le \frac{4}{z^{2/(1+\alpha)}}. \tag{6.8}$$

Из (6.8) следует, что

$$\left\{t\colon \|g_0(t)-y\| \le \frac{1}{z^{1/(1+\alpha)}}\right\} \subset \left[t_0 - \frac{4}{z^{2/(1+\alpha)}}; t_0 + \frac{4}{z^{2/(1+\alpha)}}\right] \tag{6.9}$$

для некоторого t_0 такого, что

$$\|g_0(t_0) - y\| \le \frac{1}{z^{1/(1+\alpha)}}.$$

Из (6.9) следует, что для $0 \le \alpha < 1$

$$\int_{b}^{+\infty} \lambda \left\{ t \colon \|g_0(t) - y\| \le \frac{1}{z^{1/(1+\alpha)}} \right\} dz \le 4 \int_{b}^{+\infty} \frac{dz}{z^{2/(1+\alpha)}} < +\infty.$$

Лемма 6.2 доказана.

Из леммы 6.2 следует, что последовательность

$$\left\{ \frac{1}{\|\mathbb{1}_{[0;t]} - \varkappa_n(s)\|} \right\}_{n \ge 1}$$

равномерно интегрируема. Следовательно,

$$M \int_{\mathbb{R}} l_n(u) l(u) du \to M \int_{\mathbb{R}} l^2(u) du, \quad n \to \infty.$$

Теорема 6.3 доказана.

Литература

1. *Den Hollander F.* Random polymers. – Springer, 2009. – 257 p.
2. *Bolthausen E.* Large deviation and interacting random walks // Lect. Probab. Theory and Statistics. – 2002. – P. 1 – 124.
3. *Dolan A. K., Edwards S. F.* The effect of excluded volume on polymer dispersant action // Proc. Roy. Soc. London A. – 1975. – **343**, № 1635. – P. 427 – 442.
4. *Westwater J.* On Edward's model for polymer chains. II. Self-consistent potential // Communs Math. Phys. – 1981. – **79**, № 1. – P. 53 – 73.
5. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. – М.: Наука, 1966. – 416 с.
6. *Грей А.* Трубки. Формула Вейля и ее обобщения. – М.: Мир, 1993. – 300 с.
7. *Dvoretzky A., Erdös P., Kakutani S.* Multiple points of paths of Brownian motion in the plane// Bull. Res. Counc. Isr. – 1954. – **F3**. – P. 364 – 371.
8. *Taylor S. J.* Multiple points for the sample paths of the symmetric stable processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1966. – **5**. – S. 247 – 264.
9. *Shieh N.-R.* Multiple points of sample paths of Markov processes // Ann. Probab. – 1992. – **20**, № 2. – P. 553 – 562.
10. *Rogers L. C. G.* Multiple points of Markov processes in a complete metric space // Sem. Probab. XX. – 1989. – **23**. – P. 186 – 197.
11. *Dynkin E. B.* Regularized self-intersection local times of planar Brownian motion // Ann. Probab. – 1988. – **16**, № 1. – P. 58 – 74.
12. *Rosen J.* Joint continuity of renormalized intersection local times // Ann. Inst. H. Poincaré B. – 1996. – **32**, № 6. – P. 671 – 700.
13. *Rosen J.* Self-intersections of stavle processes in the plane local times and limit theorems // Progr. Probab. – 1991. – **24**. – P. 285 – 320.
14. *Chen X.* Random walk intersections: large deviations and some related topics. – Amer. Math. Soc., 2010. – 332 p.
15. *Rudenko A.* Local time as an element of the Sobolev space // Theory Stochast. Process. – 2007. – **13**, № 29. – P. 65 – 79.
16. *Le Gall J.-F., Rosen J., Shieh N.-R.* Multiple points of Levy processes // Ann. Probab. – 1989. – **17**, № 2. – P. 503 – 515.
17. *Khoshnevisan D.* Intersections of Brownian motions // Expo. Math. – 2003. – **21**. – P. 97 – 114.
18. *Саймон Б.* Модель $P)(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. – М.: Мир, 1976. – 358 с.
19. *Хепп К.* Теория перенормировок. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
20. *Symanzik K.* Euclidean quantum field theory. I. Equations for a scalar model // J. Math. Phys. – 1966. – **7**. – P. 510 – 525.

21. *Rosen J.* A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion // Sem. Probab. XX. – 1986. – **1204**. – P. 515 – 531.
22. *Varadhan S.* Appendix to: Euclidean quantum field theory, by K. Symanzik. – New York: Acad. Press, 1969. – 225 p.
23. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
24. *Rosen J.* A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space // Communs Math. Phys. – 1983. – **88**. – P. 327 – 338.
25. *Donsker M., Varadhan S.* Asymptotic for the Wiener sausage // Communs Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**, № 4. – P. 525 – 565.
26. *Kac M., Luttinger J.* Bose – Einstein consideration in the presence of impurities // J. Math. Phys. – 1974. – **15**, № 2. – P. 183 – 186.
27. *Eisele T., Lang R.* Asymptotics for the Wiener sausage with drift // Probab. Theory Relat. Fields. – 1987. – 74. – P. 125 – 140.
28. *Le Gall J.-F.* Fluctuation results for the Wiener sausage //Ann. Probab. – 1988. – **16**, № 3. – P. 991 – 1018.
29. *Le Gall J.-F.* Wiener sausage and self-intersection local times // J. Funct. Anal. – 1990. – **88**, № 2. – P. 299 – 341.
30. *Spitzer F.* Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1964. – **3**. – S. 110 – 121.
31. *Van den Berg M., Toth B.* Exponentional estimates for the Wiener sausage // Probab. Theory Relat. Fields. – 1991. – **88**, № 2. – P. 249 – 259.
32. *Rataj J., Schmidt V., Spodarev E.* On the expected surface area of the Wiener sausage // Math. Nachr. – 2009. – **282**, № 4. – P. 591 – 603.
33. *Yor M.* Renormalisation et convergence en loi pour temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$ // Sem. Probab. XIX. Lect. Notes Math. – 1985. – **19**. – P. 350 – 365.
34. *Дороговцев А. А., Изюмцева О. Л.* Локальные времена самопересечения для гауссовских процессов. – Германия: LAP Lambert Acad. Publ., 2011. – 152 с.
35. *Изюмцева О. Л.* О локальном времени самопересечения для винеровского процесса, построенного по сингулярной мере // Мат. вестн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 47 – 60.
36. *Bouleu N., Hirsch F.* Dirichlet forms and analysis on Wiener space. – Berlin; New York: Walter de Cruyter, 1991. – 365 p.
37. *Cameron R. N., Martin W. T.* The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier – Hermite functions // Ann. Math. – 1947. – **48**, № 2. – P. 385 – 392.
38. *Дороговцев А. А.* Элементы стохастического дифференциального исчисления // Математика сегодня. – Киев: Вища шк., 1994. – С. 105 – 131.
39. *Watanabe S.* Stochastic differential equation and Malliavin calculus. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1984. – 112 p.
40. *Kuo H.-H.* Lecturs on white analysis // Soochow Math. J. – 1992. – **18**. – P. 229 – 300.
41. *Kuo H.-H.* Introduction to stochastic integration. – Springer, 2006. – 279 p.
42. *Zakai M.* The Malliavin calculus // Acta Appl. Math. – 1985. – **3**. – P. 175 – 207.
43. *Üstunel A. S.* An introduction to analysis on Wiener space // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 185 p.
44. *Obata N.* White noise calculus and Fock space // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – **1577**. – 181 p.
45. *Malliavin P.* Stochastic analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 343 p.
46. *Дороговцев А. А.* Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве. – Киев: Наук. думка, 1992. – 120 с.
47. *Watanabe S.* Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its application to heat kernels // Ann. Probab. – 1987. – **75**, № 1. – P. 1 – 39.
48. *Janson S.* Gaussian Hilbert spaces. – Cambridge Univ. Press, 1997. – 340 p.
49. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
50. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 1. – 472 с.
51. *Cameron R. H., Martin W. T.* Fourier – Wiener transforms of functionals belonging to L_2 over the space C // Duke Math. J. – 1947. – **14**. – P. 99 – 107.
52. *Хида Т.* Броуновское движение. – М.: Мир, 1989. – 300 с.

53. *Imkeller P., Perez-Abrew V., Vives J.* Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization // Stochast. Process. and Appl. – 1995. – **56**, № 1. – P. 1 – 34.
54. *Дороговцев А. А., Бакун В. В.* Случайные отображения и обобщенные аддитивные функционалы от винеровского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 2003. – **48**, № 1. – С. 43 – 61.
55. *Nualart D., Vives J.* Chaos expansions and local times // Publ. Math. – 1992. – **36**, № 2. – P. 827 – 836.
56. *Hu Y.* On the self-intersection locval time of Brownian motion via chaos expansion // Publ. Math. – 1996. – **40**. – P. 337 – 350.
57. *Hu Y.* Self-intersection local time of fractional Brownian motion via chaos // J. Math. Kyoto Univ. – 2001. – **41**, № 2. – P. 233 – 250.
58. *Berman S.* Local nondeterminism and local times of Gaussian processes // Indiana Univ. Math. J. – 1973. – **23**. – P. 69 – 94.
59. *Berman S.* Self-intersections and local nondeteerminism of Gaussian processes // Ann. Probab. – 1991. – **19**, № 1. – P. 160 – 191.
60. *Berman S.* Local nondeterminism and local times of general stochastic processes // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1983. – **19**, № 2. – P. 189 – 207.
61. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВиМС, 1995. – 246 с.
62. *Дуб Д.* Вероятностные процессы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 606 с.
63. *Розанов Ю. А.* Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. – М.: Физматгиз, 1995. – 256 с.
64. *Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L.* On regularization of the formal Fourier – Wiener transform of the self-intersection local time of a planar Gaussian process // Theory Stochast. Process. – 2011. – **17**, № 1. – P. 28 – 38.
65. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
66. *Izyumtseva O. L.* The constant of renormalization for self-intersection local time of diffusion process in the plane // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 11. – P. 1489 – 1498.
67. *Aronson D. G.* Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – P. 890 – 896.
68. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
69. *Marcus M., Rosen J.* Markov processes, Gaussian processes and local times. – Cambridge Univ. Press, 2006. – 620 p.
70. *Marcus M., Rosen J.* Renormalized self-intersection local times and Wick power chaos processes // Mem. AMS. – 1999. – 675 p.
71. *Morters P., Peres Y.* Brownian motion. – Cambridge Univ. Press, 2010. – 416 p.
72. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
73. *Port S. C., Stone G. S.* Brownian motion and classical potential theory. – New York: Acad. Press, 1978. – 236 p.
74. *Levy P.* Sur certains processes stochastiques homogeneous // Compos. Math. – 1940. – **7**. – P. 283 – 339.
75. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. – 376 с.
76. *Бородин А. Н.* Броуновское локальное время // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 2 (266). – С. 7 – 44.
77. *Cuzick J.* Local nondeterminism and zeros of Gaussian processes // Ann. Probab. – 1978. – **6**, № 1. – P. 72 – 84.
78. *Cuzick J., DuPreez J.* Joint continuity of Gaussian local times // Ann. Probab. – 1982. – **10**, № 3. – P. 810 – 817.
79. *Xiao Y.* Strong local nondeterminism and sample path properties of Gaussian random fields // Theory Probab. and Statistics with Appl. – 2008. – **2**. – P. 136 – 176.
80. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic integration and one class of Gaussian random processes // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 4. – P. 495 – 505.
81. *Dorogovtsev A. A.* Smoothing problem in anticipating scenario // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 9. – P. 1424 – 1441.
82. *Izyumtseva O. L.* On the local times for Gaussian integrators // Theory Stochast. Process. – 2014. – **19**, № 35. – P. 11 – 25.
83. *Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L.* Properties of Gaussian local times // Lith. Math. J. – 2015. – **55**, № 4. – P. 489 – 505.

Получено 03.11.15