УДК 512.53

Е. А. Тоичкина (Луган. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОТОПИЗМОВ ЭФФЕКТИВНЫХ СВЯЗНЫХ ОТНОШЕНИЙ

For binary relations satisfying the conditions of efficiency and connectedness, it is shown that the semigroup of all endotopisms of any effective and connected binary relation characterizes this relation to within an isotopism or an antiisotopism.

Для бінарних відношень, що задовольняють умови ефективності та зв'язності, доведено, що напівгрупа ендотопізмів будь-якого такого відношення характеризує це бінарне відношення з точністю до ізотопізму або антиізотопізму.

1. Введение. Исследованию связей любой алгебраической системы с производными структурами, такими как группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, решетка подсистем, решетка конгруэнций, посвящено большое количество работ (см., например, [1 – 3]). Одной из первых работ, в которой была рассмотрена связь бинарного отношения с соответствующей ему полугруппой эндоморфизмов, является статья Л. М. Глускина [4], где показано, что любое отношение квазипорядка определяется полугруппой эндоморфизмов этого отношения с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. В то же время Л. Б. Шнеперман в [5] показал, что результат Глускина невозможно перенести на класс всех рефлексивных бинарных отношений, при этом им были найдены абстрактные характеристики полугруппы всех эндоморфизмов квазиупорядоченного множества и квазиупорядоченной полугруппы всех эндоморфизмов отношения квазипорядка. Позже Б. В. Попов [6] из класса рефлексивных бинарных отношений выделил подкласс, на который распространил упомянутый выше результат Глускина.

Данная работа посвящена изучению эффективных бинарных отношений и связи этих отношений с их полугруппой эндотопизмов, которая с точностью до изоморфизма содержит в себе полугруппу эндоморфизмов. Понятие эндотопизма было введено Б. В. Поповым [7] как обобщение понятия эндоморфизма для случая μ-арных отношений. С помощью полугрупп эндотопизмов им были охарактеризованы с точностью до изотопизма определенные структуры этих отношений. Кроме того, оказывается, полугруппа эндотопизмов произвольного бинарного отношения, определенного на некотором множестве, является соответствием (в смысле А. Г. Куроша [8]) симметрической полугруппы на этом множестве. В частности, для любой эквивалентности полугруппа всех ее эндотопизмов является соответствием полугруппы эндоморфизмов той же эквивалентности [9]. Некоторые свойства полугруппы эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности изучались в [10].

Опишем кратко структуру работы. В п. 2 приведены необходимые определения и вспомогательные утверждения. В п. 3 на элементах минимального идеала полугруппы эндотопизмов бинарного отношения с помощью свойств только операции умножения построено новое отношение, изотопное данному бинарному отношению (лемма 4). Установлено, что если бинарное отношение удовлетворяет условию эффективности и связности, то полугруппа эндотопизмов определяет это бинарное отношение с точностью до так называемого изотопизма или антиизотопизма (теорема 1). Аналогичная характеристика также справедлива для полугруппы эндоморфизмов эффективных связных отношений (теорема 2). Все понятия, которые не определяются в работе, можно найти в [13, 14].

2. Основные понятия и вспомогательные леммы. ***2.1.*** Пусть $\rho \subseteq A \times B$ — произвольное бинарное отношение, где A и B — множества, содержащие не менее двух элементов. Здесь рассматриваются случаи, когда $A = B$ и $A \cap B = \varnothing$. Бинарное отношение ρ называется эффективным, если $\{x \in A | \exists y \in B\colon (x, y) \in \rho\} = A$ и $\{y \in B | \exists x \in A\colon (x, y) \in \rho\} = B$.

Бинарное отношение $\rho \subseteq A \times B$ называется связным [14], если не существуют непустые множества A_1, A_2, B_1 и B_2 такие, что $A_1 \cup A_2 = A$, $B_1 \cup B_2 = B$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и

$$\rho \subseteq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2).$$

В дальнейшем будем рассматривать только эффективные и связные бинарные отношения, при этом слова „эффективное” и „связное” будем опускать.

Бинарные отношения $\rho \subseteq A \times B$ и $\rho^{'} \subseteq A^{'} \times B^{'}$ называются изотопными [7], если существует такая упорядоченная пара (τ, σ) биективных отображений $\tau\colon A \to A^{'}$, $\sigma\colon B \to B^{'}$, что для всех $x \in A$, $y \in B$

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x\tau, y\sigma) \in \rho^{'}.$$

Эндотопизмом бинарного отношения ρ называется упорядоченная пара (φ_1, φ_2), где φ_1 — преобразование множества A, а φ_2 — преобразование множества B, такая, что для всех $x \in A$, $y \in B$

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (x\varphi_1, y\varphi_2) \in \rho.$$

Если преобразования φ_1 и φ_2 биективны и

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x\varphi_1, y\varphi_2) \in \rho,$$

то упорядоченная пара (φ_1, φ_2) называется автотопизмом отношения ρ.

Пусть $Et(\rho)$ — множество всех эндотопизмов бинарного отношения ρ. Легко видеть, что $Et(\rho)$ относительно операции покомпонентного умножения образует полугруппу. Очевидно, полугруппа $Et(\rho^{-1})$ бинарного отношения $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ изоморфна полугруппе $Et(\rho)$.

Всюду в статье для изоморфизма полугрупп и отношений будем использовать знак $\cong$, а для изотопизма отношений — знак $\simeq$.

2.2. Преобразование φ произвольного множества M такое, что $M\varphi = \{x\}$, условимся обозначать символом φ_x. Легко видеть, что пара (φ_a, φ_b) преобразований множеств A и B соответственно является эндотопизмом $\rho \subseteq A \times B$, если $(a, b) \in \rho$. Множество всех правых нулей полугруппы $Et(\rho)$ будем обозначать через L, т. е.

$$L = \{(\varphi_1, \varphi_2) | Et(\rho)(\varphi_1, \varphi_2) = \{(\varphi_1, \varphi_2)\}\}.$$

Можно показать, что L состоит из всевозможных эндотопизмов вида (φ_a, φ_b), где $(a, b) \in \rho$, и образует двусторонний идеал в полугруппе $Et(\rho)$.

Через φ_{xy} обозначим такое преобразование произвольного множества M, что $M\varphi = \{x, y\}$, где $x \neq y$. Заметим, что если $\varphi_x = \varphi_y \Leftrightarrow x = y$, то это несправедливо для преобразований вида φ_{xy}. Можно показать, что $(\varphi_{ab}, \varphi_c)$ — эндотопизм отношения ρ, если $(a, c), (b, c) \in \rho$, и, аналогично, $(\varphi_a, \varphi_{bc})$ — эндотопизм отношения ρ, если $(a, c), (a, b) \in \rho$. Пусть $Et_2(\rho)$ — множество всех эндотопизмов отношения $\rho \subseteq A \times B$ вида $(\varphi_{ab}, \varphi_c)$ или $(\varphi_a, \varphi_{bc})$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого $g \in Et(\rho)$ выполняется условие*

$$g \in Et_2(\rho) \Leftrightarrow |L \cdot g| = 2.$$

Доказательство. Пусть $g \in Et_2(\rho)$ — произвольный эндотопизм. Если $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$, то для любого эндотопизма $(\varphi_x, \varphi_y) \in L$ имеем

$$(\varphi_x, \varphi_y)(\varphi_{ab}, \varphi_c) = \begin{cases} (\varphi_a, \varphi_c), & \text{если} \quad x \in a\varphi_{ab}^{-1}, \\ (\varphi_b, \varphi_c), & \text{если} \quad x \in b\varphi_{ab}^{-1}. \end{cases}$$

Таким образом, $|L \cdot g| = 2$. Аналогично, если $g = (\varphi_a, \varphi_{bc})$, то также $|L \cdot g| = 2$.

Пусть теперь $|L \cdot g| = 2$ для некоторого $g = (\varphi_1, \varphi_2) \in Et(\rho)$. Заметим, что если ранг какого-либо из преобразований φ_1 или φ_2 не меньше 3, то $L \cdot g$ состоит не менее чем из 3 элементов. В самом деле, пусть $A\varphi_1 = \{a, b, c, \ldots\}$, где $a, b, c, \ldots$ — попарно различные элементы, и $x \in a\varphi_1^{-1}$. Поскольку ρ — эффективное бинарное отношение, то найдется такой элемент $y \in B$, что $(x, y) \in \rho$. Тогда $(\varphi_x, \varphi_y)(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_a, \varphi_z)$, где $z = y\varphi_2$. Таким образом, $(\varphi_a, \varphi_z) \in L \cdot g$. Аналогично, $(\varphi_b, \varphi_{z'}), (\varphi_c, \varphi_{z''}) \in L \cdot g$, и тогда $|L \cdot g| \geq 3$, в то время как $|L \cdot g| = 2$. Следовательно, преобразования φ_1 и φ_2 имеют ранг не больше чем 2, причем по крайней мере одно из этих преобразований имеет ранг 2.

Предположим, что для эндотопизма $g = (\varphi_1, \varphi_2)$ преобразования φ_1 и φ_2 имеют ранг 2. Пусть $A\varphi_1 = \{a, b\}$, а $B\varphi_2 = \{c, d\}$. Так же, как и выше, можно показать, что $(\varphi_a, \varphi_x), (\varphi_b, \varphi_y) \in$ $\in L \cdot g$, где $x, y \in \{c, d\}$. Допустим, что $x \neq y$. Тогда

$$L \cdot g = \{(\varphi_a, \varphi_c), (\varphi_b, \varphi_d)\} \quad \text{или} \quad L \cdot g = \{(\varphi_a, \varphi_d), (\varphi_b, \varphi_c)\}.$$

Если $L \cdot g = \{(\varphi_a, \varphi_c), (\varphi_b, \varphi_d)\}$, то для всех $(\varphi_u, \varphi_v) \in L$, т. е. для всех $(u, v) \in \rho$

$$u \in a\varphi_1^{-1} \Rightarrow v \in c\varphi_2^{-1} \quad \text{и} \quad u \in b\varphi_1^{-1} \Rightarrow v \in d\varphi_2^{-1}.$$

Следовательно,

$$\rho \cap (a\varphi_1^{-1} \times d\varphi_2^{-1}) = \varnothing \quad \text{и} \quad \rho \cap (b\varphi_1^{-1} \times c\varphi_2^{-1}) = \varnothing.$$

Поэтому $\rho \subseteq (a\varphi_1^{-1} \times c\varphi_2^{-1}) \cup (b\varphi_1^{-1} \times d\varphi_2^{-1})$ и, следовательно, ρ не связно (пп. 2.1), что противоречит связности отношения ρ. Аналогично можно показать, что в случае $L \cdot g =$ $= \{(\varphi_a, \varphi_d), (\varphi_b, \varphi_c)\}$ также возникает противоречие. Таким образом, $x = y$. Следовательно, $(\varphi_a, \varphi_d), (\varphi_b, \varphi_d) \in L \cdot g$ или $(\varphi_a, \varphi_c), (\varphi_b, \varphi_c) \in L \cdot g$. В первом случае, если учесть, что $A\varphi_1 = \{a, b\}$, для $v \in d\varphi_2^{-1}$ найдется такой элемент $u \in a\varphi_1^{-1}$ или $u \in b\varphi_1^{-1}$, что $(u, v) \in \rho$, поэтому $(\varphi_a, \varphi_d) \in L \cdot g$ или $(\varphi_b, \varphi_d) \in L \cdot g$, но тогда в любом случае $|L \cdot g| \geq 3$, что невозможно. Аналогично невозможен случай, когда $(\varphi_a, \varphi_c), (\varphi_b, \varphi_c) \in L \cdot g$. Таким образом, доказано, что преобразования φ_1 и φ_2 не могут одновременно иметь ранг 2. Следовательно, одно из преобразований φ_1, φ_2 имеет ранг 1, а другое — ранг 2. Поэтому $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$ или $g = (\varphi_a, \varphi_{cd})$, т. е. $g \in Et_2(\rho)$.

2.3. Пусть $g, g' \in Et_2(\rho)$, $g \neq g'$ и $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$, $g' = (\varphi_a, \varphi_{bc})$ — произвольные эндотопизмы отношения $\rho \subseteq A \times B$. Определим отношения эквивалентности ε_g и $\varepsilon_{g'}$ следующим образом:

$$(x, y) \in \varepsilon_g \Leftrightarrow x\varphi_{ab} = y\varphi_{ab} \quad \text{и} \quad \varepsilon_g \subseteq A \times A,$$

$$(x, y) \in \varepsilon_{g'} \Leftrightarrow x\varphi_{bc} = y\varphi_{bc} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{g'} \subseteq B \times B.$$

Для каждого $g, g' \in Et_2(\rho)$ положим

$$Et_g = g \cdot Et_2(\rho) \backslash L \quad \text{и} \quad Et_{g'} = g' \cdot Et_2(\rho) \backslash L.$$

Лемма 2. *Справедливы равносильности*

$$h \in Et_g \Leftrightarrow h = (\varphi_{xy}, \varphi_z) \,\&\varepsilon_h = \varepsilon_g,$$

$$h \in Et_{g'} \Leftrightarrow h = (\varphi_x, \varphi_{yz}) \,\&\varepsilon_h = \varepsilon_{g'}.$$

Доказательство. Пусть $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$ и $h \in Et_g$, тогда существует такой элемент $f \in \in Et_2(\rho)$, что $h = g \cdot f$ и $h \notin L$. Если $f = (\varphi_x, \varphi_{yz})$, то

$$h = (\varphi_{ab}, \varphi_c) \cdot (\varphi_x, \varphi_{yz}) = (\varphi_{ab}\varphi_x, \varphi_c\varphi_{yz}) = \begin{cases} (\varphi_x, \varphi_y) & \text{и} \quad (x, y) \in \rho, \quad \text{если} \quad c \in y\varphi_{yz}^{-1}, \\ (\varphi_x, \varphi_z) & \text{и} \quad (x, z) \in \rho, \quad \text{если} \quad c \in z\varphi_{yz}^{-1}, \end{cases}$$

т. е. $h \in L$, что противоречит условию $h \in Et_g$. Если $f = (\varphi_{xy}, \varphi_z)$, то $h = (\varphi_{ab}, \varphi_c) \cdot (\varphi_{xy}, \varphi_z) = = (\varphi_{ab}\varphi_{xy}, \varphi_z)$. Если $(a, b) \in \varepsilon_f$, то либо $h = (\varphi_x, \varphi_z)$, если $a \in x\varphi_{xy}^{-1}$, либо $h = (\varphi_y, \varphi_z)$, если $a \in y\varphi_{xy}^{-1}$, т. е. $h \in L$, что противоречит условию $h \in Et_g$. Поэтому $(a, b) \notin \varepsilon_f$ и тогда $h = (\varphi_{ab}\varphi_{xy}, \varphi_z) = (\varphi_{xy}, \varphi_z)$. Очевидно, что $\varepsilon_h = \varepsilon_g$.

Пусть теперь $h = (\varphi_{xy}, \varphi_z)$, $\varepsilon_h = \varepsilon_g$. Покажем, что $h \in Et_g$. Пусть $h' = (\psi_{xy}, \psi_z)$, где $\psi_{xy} = \begin{pmatrix} a & A \backslash \{a\} \\ x & y \end{pmatrix}$, тогда $h = g \cdot h'$, следовательно, $h \in Et_g$. Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

2.4. На множестве L зададим отношения эквивалентности ε_1 и ε_2, положив

$$((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow u = p \quad \text{и} \quad ((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow v = q.$$

Пусть $g, g' \in Et_2(\rho)$, $g \neq g'$ и $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$, $g' = (\varphi_a, \varphi_{bc})$ — произвольные эндотопизмы. С помощью эндотопизмов g и g' определим такие бинарные отношения η_g и $\eta_{g'}$ на L, что для любых (φ_u, φ_v), $(\varphi_p, \varphi_q) \in L$

$$((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \eta_g \Leftrightarrow \exists_{f \in Et_g} (L \cdot f = \{(\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)\}),$$

$$((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \eta_{g'} \Leftrightarrow \exists_{f' \in Et_{g'}} \left(L \cdot f' = \{(\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)\}\right).$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $g, g' \in Et_2(\rho)$, $g \neq g'$ и $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$, $g' = (\varphi_a, \varphi_{bc})$. Тогда $\eta_g = \varepsilon_2$, $\eta_{g'} = \varepsilon_1$.*

Доказательство. Пусть $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$ и $((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \eta_g$, тогда существует такой элемент $f \in Et_g$, что $L \cdot f = \{(\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)\}$. Поскольку $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$, то, согласно лемме 2, $f = (\varphi_{a'b'}, \varphi_{c'})$ и для любого $(\varphi_x, \varphi_y) \in L$

$$(\varphi_x, \varphi_y)(\varphi_{a'b'}, \varphi_{c'}) = \begin{cases} (\varphi_{a'}, \varphi_{c'}), & \text{если} \quad x \in a'\varphi_{a'b'}^{-1}, \\ (\varphi_{b'}, \varphi_{c'}), & \text{если} \quad x \in b'\varphi_{a'b'}^{-1}. \end{cases}$$

В силу произвольности $(\varphi_x, \varphi_y) \in L$ имеем $L \cdot f = \{(\varphi_{a'}, \varphi_{c'}), (\varphi_{b'}, \varphi_{c'})\}$. Таким образом,

$$\{(\varphi_{a'}, \varphi_{c'}), (\varphi_{b'}, \varphi_{c'})\} = \{(\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\varphi_{a'}, \varphi_{c'}) = (\varphi_u, \varphi_v) \,\&\, (\varphi_{b'}, \varphi_{c'}) = (\varphi_p, \varphi_q) \\ (\varphi_{a'}, \varphi_{c'}) = (\varphi_p, \varphi_q) \,\&\, (\varphi_{b'}, \varphi_{c'}) = (\varphi_u, \varphi_v) \end{array} \right. \Rightarrow v = q.$$

Итак, $((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \varepsilon_2$ и, следовательно, $\eta_g \subseteq \varepsilon_2$.

Пусть теперь $((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \varepsilon_2$, где $v = q$. Поскольку $(p, v) = (p, q)$, то $(p, v), (u, v) \in \in \rho$. Так как $g = (\varphi_{ab}, \varphi_c)$, то $f = (\varphi_{up}, \varphi_v)$ — эндотопизм и $f \in Et_g$. Аналогично предыдущему имеем $L \cdot f = \{(\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_v)\}$. Учитывая, что $v = q$, имеем $\{(\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)\} = L \cdot \cdot f$. Но тогда $((\varphi_u, \varphi_v), (\varphi_p, \varphi_q)) \in \eta_g$. Следовательно, $\varepsilon_2 \subseteq \eta_g$. Аналогично можно доказать справедливость второго утверждения в случае, когда $g' = (\varphi_a, \varphi_{bc})$.

Очевидно, что если $g, h \in Et_2(\rho)$ и $\eta_g \neq \eta_h$, то или $\eta_g = \varepsilon_1$ и $\eta_h = \varepsilon_2$, или $\eta_g = \varepsilon_2$ и $\eta_h = \varepsilon_1$.

3. Характеризуемость бинарного отношения полугруппой эндотопизмов. ***3.1.*** Рассмотрим фактор-множества $L_1 = L/\varepsilon_1$ и $L_2 = L/\varepsilon_2$. Определим такое бинарное отношение $\rho^* \subseteq \subseteq L_1 \times L_2$, что $\rho^* = \left\{ \left(\bar{g}^1, \bar{g}^2\right) \middle| \, g \in L \right\}$, где $\bar{g}^1$ и $\bar{g}^2$ — классы эквивалентных элементов соответственно по ε_1 и ε_2, содержащие элемент g в качестве представителя.

Лемма 4. *Бинарное отношение ρ^* изотопно отношению ρ.*

Доказательство. Определим отображения $f_1 \colon L_1 \to A$ и $f_2 \colon L_2 \to B$, положив для произвольного элемента $g \in L$, где $g = (\varphi_x, \varphi_y)$, $\bar{g}^1 f_1 = x$ и $\bar{g}^2 f_2 = y$. Убедимся, что $\bar{g}^1 f_1$ не зависит от выбора представителя в классе $\bar{g}^1$. Пусть $\bar{g}^1 = \bar{h}^1$. Тогда $(g, h) \in \varepsilon_1$, где $g = (\varphi_x, \varphi_y)$, а $h = \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)$. Согласно определению эквивалентности ε_1, имеет место равенство $x = x'$. Поэтому $\bar{g}^1 f_1 = \bar{h}^1 f_1 = x$. Аналогично, $\bar{g}^2 f_2$ не зависит от выбора представителя в классе $\bar{g}^2$. Можно показать, если учесть эффективность ρ, что отображения f_1 и f_2 биективны. Теперь для любых $\bar{g}_1^1 \in L_1$ и $\bar{g}_2^2 \in L_2$ имеем

$$\left(\bar{g}_1^1, \bar{g}_2^2\right) \in \rho^* \Leftrightarrow \exists_{g \in L} \left(\bar{g}_1^1 = \bar{g}^1 \& \bar{g}_2^2 = \bar{g}^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{(x,y) \in \rho} \left(g = (\varphi_x, \varphi_y) \& g_1 = \left(\varphi_x, \varphi_{y'}\right) \& g_2 = (\varphi_{x'}, \varphi_y)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{(x,y) \in \rho} \left(g = (\varphi_x, \varphi_y) \& \bar{g}_1^1 f_1 = x \& \bar{g}_2^2 f_2 = y\right) \Leftrightarrow \left(\bar{g}_1^1 f_1, \bar{g}_2^2 f_2\right) \in \rho.$$

3.2. Пусть $h, h' \in Et_2(\rho)$ и $\eta_h \neq \eta_{h'}$. Положим $L'_1 = L/\eta_h$, а $L'_2 = L/\eta_{h'}$. Определим такое бинарное отношение $\rho' \subseteq L'_1 \times L'_2$, что $\rho' = \left\{ \left(\bar{g}^1, \bar{g}^2\right) \middle| \, g \in L \right\}$, где $\bar{g}^1$ и $\bar{g}^2$ — классы эквивалентных элементов соответственно по η_h и $\eta_{h'}$, содержащие элемент g в качестве представителя. Из пп. 2.4, 3.1 следует, что ρ изотопно ρ' или ρ'^{-1}. Таким образом, используя только операцию умножения, в полугруппе $Et(\rho)$ можно восстановить отношение ρ с точностью до изотопизма, что фактически означает справедливость приведенной ниже теоремы, для которой в пп. 3.3 дается прямое доказательство.

Теорема 1. *Пусть $\rho \subseteq A \times B$ и $\rho' \subseteq A' \times B'$ — произвольные эффективные связные отношения. Если полугруппы $Et(\rho)$ и $Et(\rho')$ изоморфны, то бинарные отношения ρ и ρ' или ρ и ρ'^{-1} изотопны.*

3.3. Доказательство. Пусть отображение $\theta \colon Et(\rho) \to Et(\rho')$ — изоморфизм полугруппы $Et(\rho)$ в $Et(\rho')$. Поэтому (пп. 2.2) $L\theta = L'$ и $Et_2(\rho)\theta = Et_2(\rho')$. Пусть $g = (\varphi_x, \varphi_{yz})$ и $h = (\varphi_{uv}, \varphi_w)$ — произвольные элементы множества $Et_2(\rho)$. Тогда $Et_g\theta = (g \cdot Et_2(\rho) \backslash L)\theta = g\theta \cdot Et_2(\rho') \backslash L' = Et_{g\theta}$ и, аналогично, $Et_h\theta = Et_{h\theta}$. Поскольку $g\theta \neq h\theta$, то в полугруппе $Et(\rho')$ (пп. 2.4)

$$\eta_{g\theta} = \varepsilon'_1, \quad \text{а} \quad \eta_{h\theta} = \varepsilon'_2,$$

или

$$\eta_{g\theta} = \varepsilon'_2, \quad \text{а} \quad \eta_{h\theta} = \varepsilon'_1.$$

Допустим, что $\eta_{g\theta} = \varepsilon'_1$ и $\eta_{h\theta} = \varepsilon'_2$. Докажем, что ρ и ρ' изотопны. Определим упорядоченную пару отображений (π_1, π_2), где $\pi_1 : A \to A'$, а $\pi_2 : B \to B'$. Пусть $x \in A$ — произвольный элемент. В силу эффективности ρ найдется такой элемент $y \in B$, что $(x, y) \in \rho$. Так как $(x, y) \in \rho$, то $(\varphi_x, \varphi_y) \in L$. Пусть $(\varphi_x, \varphi_y)\theta = (\varphi_{x'}, \varphi_{y'})$, где $(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}) \in L'$. Положим $x\pi_1 = x'$. Убедимся, что $x\pi_1$ не зависит от выбора элемента y. Пусть $z \in B$ — такой любой другой элемент, что $(x, z) \in \rho$. Тогда $(\varphi_x, \varphi_z) \in L$ и $((\varphi_x, \varphi_y), (\varphi_x, \varphi_z)) \in \varepsilon_1$, а $\varepsilon_1 = \eta_g$. Поэтому $\left((\varphi_{x'}, \varphi_{y'}), (\varphi_{x''}, \varphi_{z'})\right) \in \eta_{g\theta}$, где $(\varphi_{x''}, \varphi_{z'}) = (\varphi_x, \varphi_z)\,\theta$. Поскольку $\eta_{g\theta} = \varepsilon'_1$, то $x' = x''$. Отображение π_1 биективно. Действительно, для любого $x' \in A'$ в силу эффективности ρ' найдется такой элемент $y' \in B'$, что $(x', y') \in \rho'$. Пусть $\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)\theta^{-1} = (\varphi_x, \varphi_y)$. Тогда $x\pi_1 = x'$ и сюръективность отображения π_1 доказана. Пусть $x\pi_1 = z\pi_1 = x'$. Следовательно, найдутся такие $(\varphi_x, \varphi_y), (\varphi_z, \varphi_{y_1}) \in L$, что $(\varphi_x, \varphi_y)\,\theta = \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)$ и $(\varphi_z, \varphi_{y_1})\,\theta = \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y''}\right)$. Так как $\left(\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right), \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y''}\right)\right) \in \varepsilon'_1$, а $\varepsilon'_1 = \eta_{g\theta}$, то $(\varphi_x, \varphi_y), \left(\varphi_z, \varphi_{y''}\right) \in \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \eta_g$. Поэтому $x = z$ и биективность отображения π_1 доказана. Аналогично определяется биективное отображение $\pi_2 : B \to B'$. Если $(\varphi_x, \varphi_y)\,\theta = \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)$, где $\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right) \in L'$, то полагаем $y\pi_2 = y'$. Элемент $y' \in B$ не зависит от выбора такого элемента $x \in A$, что $(x, y) \in \rho$. Таким образом,

$$(\varphi_x, \varphi_y)\theta = (\varphi_{x\pi_1}, \varphi_{y\pi_2})$$

для любых $(x, y) \in \rho$. Теперь для любых $x \in A$ и $y \in B$ имеем

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (\varphi_x, \varphi_y) \in L \Leftrightarrow (\varphi_{x\pi_1}, \varphi_{y\pi_2}) \in L' \Leftrightarrow (x\pi_1, y\pi_2) \in \rho',$$

т. е. бинарное отношение ρ изотопно отношению ρ'.

Пусть теперь $\eta_{g\theta} = \varepsilon'_2$, $\eta_{h\theta} = \varepsilon'_1$. Покажем, что ρ и ρ'^{-1} изотопны. Определим упорядоченную пару отображений (π_1, π_2), где $\pi_1 : A \to B'$, $\pi_2 : B \to A'$. Пусть $x \in A$ — произвольный элемент. В силу эффективности ρ найдется такой элемент $y \in B$, что $(x, y) \in \rho$. Так как $(x, y) \in \rho$, то $(\varphi_x, \varphi_y) \in L$. Пусть $(\varphi_x, \varphi_y)\theta = (\varphi_{x'}, \varphi_{y'})$, где $(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}) \in L'$. Положим $x\pi_1 = y'$. Убедимся, что $x\pi_1$ не зависит от выбора элемента y. Пусть $z \in B$ — такой любой другой элемент, что $(x, z) \in \rho$. Тогда $(\varphi_x, \varphi_z) \in L$ и $((\varphi_x, \varphi_y), (\varphi_x, \varphi_z)) \in \varepsilon_1$, а $\varepsilon_1 = \eta_g$. Тогда $\left((\varphi_{x'}, \varphi_{y'}), (\varphi_{x''}, \varphi_{z'})\right) \in \eta_{g\theta}$, где $(\varphi_{x''}, \varphi_{z'}) = (\varphi_x, \varphi_z)\,\theta$. Поскольку $\eta_{g\theta} = \varepsilon'_2$, то $y' = z'$. И в этом случае $x\pi_1 = z' = y'$. Покажем, что отображение π_1 биективно. Действительно, для любого $y' \in B'$ в силу эффективности ρ' найдется такой элемент $x' \in A'$, что $(x', y') \in \rho'$. Тогда $\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right) \in L'$. Пусть $\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)\theta^{-1} = \left(\varphi_{x''}, \varphi_{y''}\right)$, тогда $\left(\varphi_{x''}, \varphi_{y''}\right) \in L$. Поэтому $x''\pi_1 = y'$. Таким образом, отображение π_1 сюръективно. Пусть теперь $x\pi_1 = z\pi = y'$. Это значит, что найдутся такие $(\varphi_x, \varphi_y), \left(\varphi_z, \varphi_{y''}\right) \in L$, что $(\varphi_x, \varphi_y)\,\theta = \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)$ и $\left(\varphi_z, \varphi_{y''}\right)\theta = \left(\varphi_{z'}, \varphi_{y'}\right)$. Так как $\left(\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right), \left(\varphi_{z'}, \varphi_{y'}\right)\right) \in \varepsilon'_2$, а $\varepsilon'_2 = \eta_{g\theta}$, то $\left((\varphi_x, \varphi_y), \left(\varphi_z, \varphi_{y''}\right)\right) \in \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \eta_g$. Поэтому $x = z$ и биективность отображения π_1 установлена. Аналогично определяется биективное отображение $\pi_2 : B \to A'$. Если $(\varphi_x, \varphi_y)\,\theta = \left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right)$, где $\left(\varphi_{x'}, \varphi_{y'}\right) \in L'$, то полагаем $y\pi_2 = x'$. Тогда для всех $x \in A$ и $y \in B$ таких, что $(x, y) \in \rho$,

$$(\varphi_x, \varphi_y)\,\theta = (\varphi_{y\pi_2}\varphi_{x\pi_1}).$$

Теперь для любых $x \in A$ и $y \in B$ имеем

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (\varphi_x, \varphi_y) \in L \Leftrightarrow (\varphi_{y\pi_2}, \varphi_{x\pi_1}) \in L' \Leftrightarrow (y\pi_2, x\pi_1) \in \rho' \Leftrightarrow (x\pi_1, y\pi_2) \in \rho'^{-1},$$

т. е. бинарное отношение ρ изотопно отношению ρ'^{-1}.

3.4. Пусть $\rho \subseteq C \times C$ — произвольное отношение на множестве C. Полугруппу всех эндоморфизмов отношения ρ будем обозначать $\mathrm{End}\,(\rho)$. Таким образом, для любого $\varphi \in \mathrm{End}\,(\rho)$ и любых $x, y \in C$

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho.$$

Пусть $\rho \subseteq A \times B$ — эффективное отношение, причем $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = C$. Тогда можно считать, что $\rho \subseteq C \times C$, и рассматривать полугруппу $\mathrm{End}\,(\rho)$.

Лемма 5. *Пусть $\rho \subseteq A \times B$ — эффективное бинарное отношение и $A \cap B = \varnothing$. Тогда полугруппы $Et(\rho)$ и $\mathrm{End}\,(\rho)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $(\varphi_1, \varphi_2) \in Et(\rho)$ — произвольный эндотопизм. С учетом того, что $A \cap B = \varnothing$, определим преобразование φ множества $C = A \cup B$, положив $x\varphi = x\varphi_1$, если $x \in A$, и $x\varphi = x\varphi_2$, если $x \in B$. Тогда

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (x\varphi_1, y\varphi_2) \in \rho \Rightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho,$$

т. е. $\varphi \in \mathrm{End}\,(\rho)$. Определим отображение $\theta \colon Et(\rho) \to \mathrm{End}\,(\rho)$, положив $(\varphi_1, \varphi_2)\theta = \varphi$. Легко проверить, что отображение θ биективно. Для завершения доказательства осталось показать, что θ является гомоморфизмом. Действительно, пусть $(\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2) \in Et(\rho)$ — произвольные эндотопизмы, $(\varphi_1, \varphi_2)\theta = \varphi$, $(\psi_1, \psi_2)\theta = \psi$. Пусть, далее, $\varphi|_A$, $(\psi\varphi)|_A$ — ограничения преобразований φ и $\psi\varphi$ на множестве A, а $\varphi|_B$, $(\psi\varphi)|_B$ — ограничения преобразований φ и $\psi\varphi$ на множестве B. Тогда для любого $x \in A$ имеем

$$x\; \psi|_A\; \varphi|_A = (x\; \psi|_A)\; \varphi|_A = (x\; \psi|_A)\, \varphi = x(\psi\varphi) = x\; (\psi\varphi)|_A\,.$$

Аналогично, для любого $y \in B$

$$y\; \psi|_B\; \varphi|_B = (y\; \psi|_B)\; \varphi|_B = (y\; \psi|_B)\, \varphi = y(\psi\varphi) = y\; (\psi\varphi)|_B\,.$$

Таким образом, $(\psi\varphi)|_A = \psi|_A\, \varphi|_A$ и $(\psi\varphi)|_B = \psi|_B\, \varphi|_B$. Тогда

$$((\psi|_A, \psi|_B) \cdot (\varphi|_A, \varphi|_B))\, \theta = (\psi|_A\, \varphi|_A, \psi|_B\, \varphi|_B)\, \theta =$$

$$= ((\psi\varphi)|_A, (\psi\varphi)|_B)\, \theta = \psi\varphi = (\psi|_A, \psi|_B)\, \theta\, (\varphi|_A, \varphi|_B)\, \theta.$$

3.5. **Теорема 2.** *Пусть $\rho \subseteq A \times B$ и $\rho' \subseteq A' \times B'$ — произвольные эффективные и связные бинарные отношения, где $A \cap B = \varnothing$, $A' \cap B' = \varnothing$, и пусть $A \cup B = C$ и $A' \cup B' = C'$. Если полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(\rho)$ и $\mathrm{End}\,(\rho')$ изоморфны, то бинарные отношения $\rho \subseteq C \times C$ и $\rho' \subseteq C' \times C'$ изоморфны или антиизоморфны.*

Доказательство. Докажем вначале, что из изоморфизма бинарных отношений $\rho \subseteq C \times C$ и $\rho' \subseteq C' \times C'$ следует их изотопизм. В самом деле, пусть отображение φ — изоморфизм бинарных отношений $\rho \subseteq C \times C$ и $\rho' \subseteq C' \times C'$. Покажем, что $A\varphi = A'$. Для любого $x \in A$ в силу эффективности ρ найдется такой элемент $y \in B$, что $(x, y) \in \rho$. Тогда $(x\varphi, y\varphi) \in \rho'$. Поэтому $x\varphi \in A'$, т. е. $A\varphi \subseteq A'$. Так как φ^{-1} — изоморфизм бинарных отношений ρ' и ρ, то в свою очередь имеем $A'\varphi^{-1} \subseteq A$. Тогда $A' \subseteq A\varphi$ и, следовательно, $A\varphi = A'$. Аналогично $B\varphi = B'$. Пусть $\varphi|_A$ и $\varphi|_B$ — ограничения отображения φ соответственно на множествах A и B. Тогда $\varphi|_A : A \to A'$ и $\varphi|_B : B \to B'$ — биективные отображения и

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho' \Leftrightarrow (x\; \varphi|_A, y\; \varphi|_B) \in \rho',$$

т. е. $(\varphi|_A, \varphi|_B)$ — изотопизм отношений ρ и ρ'.

С другой стороны, пусть (φ_1, φ_2) — изотопизм бинарных отношений ρ и ρ'. Определим отображение $\varphi\colon C \to C'$ следующим образом: для любого $x \in C$ полагаем $x\varphi = x\,\varphi|_A$, если $x \in A$, и $x\varphi = x\,\varphi|_B$, если $x \in B$. Поскольку отображения $\varphi|_A$ и $\varphi|_B$ биективны, то отображение φ также будет биективным и

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x\,\varphi|_A, y\,\varphi|_B) \in \rho' \Leftrightarrow (x\varphi, y\varphi) \in \rho',$$

т. е. φ — изоморфизм отношений ρ и ρ'.

Аналогично можно показать, что из антиизоморфизма бинарных отношений $\rho \subseteq C \times C$ и $\rho' \subseteq C' \times C'$ следует их антиизотопизм, и наоборот.

Таким образом, бинарные отношения $\rho \subseteq C \times C$ и $\rho' \subseteq C \times C'$ изоморфны или антиизоморфны тогда и только тогда, когда они соответственно изотопны или антиизотопны. Теперь в силу теоремы 1 и леммы 5 имеем

$$\mathrm{End}\,(\rho) \cong \mathrm{End}\,(\rho') \Leftrightarrow Et(\rho) \cong Et(\rho') \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \rho \simeq \rho', \\ \rho \simeq \rho'^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \rho \cong \rho', \\ \rho \cong \rho'^{-1}. \end{array}\right.$$

Пример. Пусть $\alpha = \{(1,3),(2,4)\}$ — бинарное отношение на множествах $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$, а $\beta = \{(a,d),(b,d)\}$ — на множествах $C = \{a,b,c\}$ и $D = \{d\}$.

Тогда $Et(\alpha) = \{\varphi_i | 1 \le i \le 12\}$, где

$$\varphi_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_5 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi_6 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_7 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi_8 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_9 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi_{10} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right),$$

$$\varphi_{11} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\right), \quad \varphi_{12} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right).$$

$$Et(\beta) = \{\psi_i | 1 \le i \le 12\},$$

где

$$\psi_1 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right), \quad \psi_2 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}\right),$$

$$\psi_3 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right), \quad \psi_4 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right),$$

$$\psi_5 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right), \quad \psi_6 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right),$$

$$\psi_7 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right), \quad \psi_8 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right),$$

$$\psi_9 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right), \quad \psi_{10} = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right),$$

$$\psi_{11} = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right), \quad \psi_{12} = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \right).$$

Отображение $\theta\colon \varphi_i \mapsto \psi_i$ — изоморфизм полугрупп $Et(\alpha)$ и $Et(\beta)$, при этом сами отношения α и β не изотопны и не антиизотопны. Заметим, что теорема 1 не выполняется, так как бинарные отношения α и β не являются эффективными.

Пусть теперь $\alpha = \{(1,2)(1,3)\}$ — бинарное отношение на множествах $A = \{1\}$ и $B = \{2,3\}$, $\beta = \{(a,b),(c,d)\}$ — на множествах $C = \{a,c\}$ и $D = \{b,d\}$. Легко убедиться, что полугруппы $Et(\alpha)$ и $Et(\beta)$ изоморфны, но бинарные отношения α и β не изотопны и не антиизотопны. Здесь отношения α и β эффективны, но теорема 1 не выполняется, так как отношение β не связно.

Литература

1. *Судзуки М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 158 с.
2. *Шеврин Л. Н., Овсянников А. Я.* Полугруппы и их подполугрупповые решетки. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1990. – Т. 1. – 238 с.
3. *Kozhukhov I. B.* On semigroups with maximal or minimal condition on left congruences // Semigroup Forum. – 1980. – **31**. – P. 337 – 350.
4. *Глускин Л. М.* Полугруппа изотопных преобразований // Успехи мат. наук. – 1961. – № 5. – С. 157 – 162.
5. *Шнеперман Л. Б.* Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1962. – **238**. – С. 21 – 37.
6. *Попов Б. В.* Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений // Учен. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1967. – **302**. – С. 116 – 123.
7. *Попов Б. В.* Полугруппы эндотопизмов μ-арных отношений // Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1965. – **274**. – С. 184 – 201.
8. *Курош А. Г.* Общая алгебра (лекции 1969/70 учеб. года). – М.: Наука, 1974. – 160 с.
9. *Жучок Ю. В., Тоичкина Е. А.* Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 217 – 230.
10. *Жучок Ю. В., Тоичкина Е. А.* Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 5. – С. 37 – 54.
11. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
12. *Биркгоф О Г.* Теория структур. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 408 с.
13. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 285 с.
14. *Riguet J.* Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois // Bull. Soc. Math. France. – 1948. – **76**. – P. 114 – 155.

Получено 28.03.15,
после доработки — 12.08.15