УДК 517.5

В. В. Шкапа (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ І БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We establish the exact-order estimates for the best m-term trigonometric approximations of the classes $L^{\psi}_{\beta,1}$ in the space $L_q,\ 2 < q < \infty$. We also determine the exact orders of the best bilinear approximations for the classes of functions of two variables generated by functions of a single variable from the class $L^{\psi}_{\beta,p}$ by the shifts of the argument in the space L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1,\, q_2 \le \infty$.

Установлены точные по порядку оценки величин наилучших m-членных тригонометрических приближений классов $L^{\psi}_{\beta,1}$ в пространстве $L_q,\ 2 < q < \infty$. Найдены также точные порядки наилучших билинейных приближений классов функций двух переменных, порожденных из функций одной переменной класса $L^{\psi}_{\beta,p}$ сдвигами аргумента, в пространстве L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1,\, q_2 \le \infty$.

Вступ. У роботі встановлюються точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q для певних співвідношень між параметрами p та q. Крім цього, знайдено також порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних вигляду $g(x,y) = f(x-y)$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, що породжені із функцій $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, зсувами аргументу на всеможливі $y \in [-\pi, \pi]$. Більш детально про ці величини мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Нехай далі $\psi(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}$, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k}}{\psi(|k|)} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, т. I, с. 132]), назвемо (ψ, β)-похідною функції f і позначимо f_β^ψ. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L_β^ψ. Далі будемо вважати, що функція f належить класу $L_{\beta,p}^\psi$, якщо

$$f \in L_\beta^\psi \quad \text{i} \quad f_\beta^\psi \in U_p = \big\{\varphi\colon \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\big\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, класи $L_{\beta,p}^\psi$ збігаються з класами Вейля – Надя $W_{p,\beta}^r$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Позначимо через B множину функцій $\psi(t)$, $t \in \mathbb{N}$, що задовольняють такі умови:

1) ψ є додатними і незростаючими;

2) існує така стала $C > 0$, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq C \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\dfrac{1}{t^r}$, $r > 0$, $\dfrac{\ln^\gamma(t+1)}{t^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$ та ін.

Далі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують такі додатні сталі C_1 та C_2, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо тільки $B \leq C_2 A$ $(B \geq C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій вимірюється похибка наближення.

1. Найкращі тригонометричні наближення. В цьому пункті встановимо точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень функцій із класів $L_{\beta,1}^\psi$ у просторі L_q, $2 < q < \infty$. Спочатку дамо означення апроксимативної характеристики, яку будемо досліджувати.

Для $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m, \cdot)} \big\|f(\cdot) - T(\Theta_m, \cdot)\big\|_q, \tag{1}$$

де $T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^m c_k e^{in_k x}$, Θ_m — набір із m цілих чисел $n_1, \ldots, n_m$ та c_k — довільні комплексні числа.

Величину (1) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то позначаємо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q. \tag{2}$$

Дослідження апроксимативної характеристики (2) на тих або інших функціональних класах отримало потужний розвиток у роботах [3 – 6]. У цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією, що стосується відповідного напрямку досліджень.

Через $B_{q,\varepsilon}$, $2 < q < \infty$, будемо позначати множину функцій $\psi(t)$, $t \in \mathbb{N}$, які задовольняють такі умови:

1) $\psi \in B$;

2) існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(t)t^{1-\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, не спадає;

3) послідовність $\psi(t)t^{1-1/q}$, $t \in \mathbb{N}$, не зростає.

Наведемо допоміжні твердження, які будемо використовувати при подальшому викладі.

Лема А [4]. *Для довільного тригонометричного полінома*

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$$

і для довільного $n \le m$ *існує тригонометричний поліном* $T(\Theta_n, x)$, *який містить не більш ніж* n *гармонік і такий, що*

$$\big\|T(\Theta_m) - T(\Theta_n)\big\|_q \le C_3 \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \|T(\Theta_m)\|_2, \quad 2 < q < \infty,$$

причому має місце вкладення $\Theta_n \subset \Theta_m$.

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{k \in \mathbb{Z} \colon 2^{s-1} \le |k| < 2^s\right\}$$

і покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема А (Літтлвуда – Пелі) (див., наприклад, [7, т. II], гл. XV). *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* $C_4(q)$, $C_5(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_4(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_5(q)\|f\|_q.$$

Теорема Б [8]. *Нехай* $1 < q \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B \cap \Psi_{q'}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, *де* $\Psi_{q'}$ — *множина монотонно незростаючих функцій* $\psi(t)$, *для яких існує стала* $\alpha > \frac{1}{q'}$ *така, що функція* $t^{\alpha}\psi(t)$ *майже спадає*[1], *і виконується одна з умов*

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\psi(k)} \right) \ge 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

або

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\psi(k)} \right) \le 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

де

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\psi(k)} \right) = \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)}.$$

Тоді справедливим є наступне співвідношення:

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \left\| f(x) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_q \asymp \psi(m) m^{1/q'}.$$

[1] Функція $t^{\alpha}\psi(t)$ майже спадає, якщо знайдеться така додатна стала K, що $t_1^{\alpha}\psi(t_1) \le K t_2^{\alpha}\psi(t_2)$ для будь-яких $t_1 > t_2 \ge 1$.

Твердження А [2, т. II, с.119]. *Нехай $\psi(k)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов* (3) *або* (4) *і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{m-1}\psi(m)\big(k\psi(k)\big)^{-1}=O(1), \tag{5}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по m. Тоді для довільного тригонометричного полінома t_m порядку m виконується нерівність

$$\left\|(t_m)_\beta^\psi(\cdot)\right\|_1\le O(1)(\psi(m))^{-1}\|t_m(\cdot)\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ рівномірно обмежена по m і t_m.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $2<q<\infty$, $\psi(t)\in B_{q,\varepsilon}$, $t\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathbb{R}$ і виконується одна з умов* (3) *або* (4). *Тоді справджується порядкова оцінка*

$$e_m(L_{\beta,1}^\psi)_q\asymp\psi(m^{q/2})m^{\frac{q}{2}(1-1/q)}.$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху. Запишемо ряд Фур'є функції $f\in L_{\beta,1}^\psi$ у термінах $\delta_s(f,x)$ і за заданим m виберемо $l\in\mathbb{N}$ з умови $2^l<m\le 2^{l+1}$. Розглянемо поліном, що наближає функцію f, у вигляді

$$P(\Theta_{2^l},x)=\sum_{s=0}^{l-1}\delta_s(f,x)+\sum_{l\le s<\gamma l}P(\Theta_{k_s},x),$$

де поліноми $P(\Theta_{k_s},x)$ побудовано таким чином, щоб для $s\in[l;\gamma l)$ виконувалась порядкова оцінка

$$\left\|\delta_s(f)-P(\Theta_{k_s})\right\|_q\ll\left(\frac{2^s}{k_s}\right)^{1/2}\left\|\delta_s(f)\right\|_2,\quad 2<q<\infty.$$

Зазначимо, що це можливо зробити згідно з лемою А, і при цьому індекси Θ_{k_s} містяться у множині номерів гармонік, які входять у поліном $\delta_s(f,x)$. Згідно з теоремою А при деякому $\gamma>1$ (ці числа будуть підібрані нижче) і k_s таких, що $\sum_{l\le s<\gamma l}k_s\ll 2^l$, маємо

$$\left\|f-P(\Theta_{2^l})\right\|_q=\left\|\sum_{s\in\mathbb{N}}\delta_s(f)-\sum_{s=0}^{l-1}\delta_s(f)-\sum_{l\le s<\gamma l}P(\Theta_{k_s})\right\|_q\ll$$

$$\ll\left\|\left(\sum_{l\le s<\gamma l}|\delta_s(f)-P(\Theta_{k_s})|^2\right)^{1/2}\right\|_q+\left\|\sum_{s\ge\gamma l}\delta_s(f)\right\|_q=I_1+I_2. \tag{6}$$

Проведемо оцінювання одержаних величин I_1 та I_2, починаючи з I_2. Згідно з теоремою Б можемо записати

$$I_2=\left\|\sum_{s\ge\gamma l}\delta_s(f)\right\|_q=\left\|f-\sum_{1\le s<\gamma l}\delta_s(f)\right\|_q\ll\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-1/q)}. \tag{7}$$

Перейдемо до оцінювання I_1. Застосувавши послідовно нерівність Мінковського та лему А, будемо мати

$$I_1 = \left\| \left(\sum_{l \le s < \gamma l} |\delta_s(f) - P(\Theta_{k_s})|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \|\delta_s(f) - P(\Theta_{k_s})\|_q^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \|\delta_s(f)\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \|f - S_{2^{s-1}}(f) - f + S_{2^s}(f)\|_2^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \Big(\|f - S_{2^{s-1}}(f)\|_2 + \|f - S_{2^s}(f)\|_2 \Big)^2 \right)^{1/2}, \tag{8}$$

де $S_{2^s}(f, x) = \sum_{k=-2^s}^{2^s} \hat{f}(k) e^{ikx}$. Далі, скориставшись теоремою Б при $q = 2$, продовжимо оцінку (8):

$$I_1 \ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \psi^2(2^s) 2^s \right)^{1/2} = \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^{2s}}{k_s} \psi^2(2^s) \right)^{1/2}. \tag{9}$$

Тепер покладемо

$$k_s = \left[\frac{2^s \psi(2^s) 2^l}{\psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l}} \right] + 1, \qquad s = l, \ldots, \gamma l, \quad \gamma = \frac{q}{2},$$

і покажемо, що кількість гармонік у сукупності поліномів $P(\Theta_{k_s})$ при $l \le s < \gamma l$, $s \in \mathbb{N}$, не перевищує за порядком 2^l. Дійсно, оскільки за умовою теореми існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(t) t^{1-\varepsilon}$ не спадає, то можемо записати

$$\sum_{l \le s < \gamma l} k_s = \sum_{l \le s < \gamma l} \left(\left[\frac{2^s \psi(2^s) 2^l}{\psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l}} \right] + 1 \right) \le \frac{2^l}{2^{\gamma l} \psi(2^{\gamma l})} \sum_{l \le s < \gamma l} 2^s \psi(2^s) + 2\gamma l =$$

$$= \frac{2^l}{2^{\gamma l} \psi(2^{\gamma l})} \sum_{l \le s < \gamma l} 2^s \psi(2^s) 2^{s\varepsilon} 2^{-s\varepsilon} + 2\gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\gamma l} \psi(2^{\gamma l})} \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1-\varepsilon)} \sum_{l \le s < \gamma l} 2^{s\varepsilon} + 2\gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\gamma l} \psi(2^{\gamma l})} \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1-\varepsilon)} 2^{\gamma l \varepsilon} + 2\gamma l \ll 2^l.$$

Таким чином, підставивши у (9) значення k_s та врахувавши, що послідовність $\psi(t) t^{1-\varepsilon}$ не спадає і $\gamma = \frac{q}{2}$, отримаємо

$$I_1 \ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^{2s}\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}}{2^s \psi(2^s) 2^l} \psi^2(2^s) \right)^{1/2} \ll \left(\psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l} 2^{-l} \sum_{l \le s < \gamma l} \psi(2^s) 2^s \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l} 2^{-l} \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1-\varepsilon)} 2^{\gamma l \varepsilon} \right)^{1/2} = \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l} 2^{-\frac{l}{2}} = \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1-1/q)}. \tag{10}$$

Співставивши (6), (7) і (10), одержимо шукану оцінку зверху величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Відповідні міркування будуть базуватися на використанні співвідношення двоїстості (див., наприклад, [9, с. 25]): для будь-якої функції $f \in L_q$

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m)} \left\| f - P(\Theta_m) \right\|_q = \inf_{\Theta_m} \sup_{g \in L^{\perp}(\Theta_m), \|g\|_{q'} \le 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx, \tag{11}$$

де $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, які ортогональні підпростору тригонометричних поліномів з номерами гармонік із множини Θ_m.

За заданим m виберемо l з умови $2^l \asymp m^{q/2}$ і розглянемо функцію

$$f(x) = C_6 \psi(2^l) \big(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x) \big), \quad C_6 > 0,$$

де $V_m(x)$ — ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kx.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_6 > 0$ функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$, і з цією метою скористаємось твердженням А.

Зауважимо, що умова (5) виконується, оскільки існує таке число $\alpha > 1 - \dfrac{1}{q}$, що послідовність $\varphi(m) = m^{\alpha}\psi(m)$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi(m) k^{\alpha}}{m^{\alpha} \varphi(k) k} \le \frac{1}{m^{\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{\alpha}}{k} \le 1.$$

Таким чином, оскільки f — тригонометричний поліном порядку 2^{l+2}, на підставі твердження А отримаємо

$$\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 = C_6 \psi(2^l) \big\| (V_{2^{l+1}} - V_{2^l})^{\psi}_{\beta} \big\|_1 \ll \frac{\psi(2^l)}{\psi(2^{l+2})} \|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_1.$$

Далі, врахувавши відоме співвідношення (див., наприклад, [10, с. 28])

$$\|V_{2^l}\|_q \asymp 2^{l(1-1/q)}, \quad 1 \le q \le \infty, \tag{12}$$

з останньої нерівності одержимо, що $\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$, а отже, $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_6.

Тепер перейдемо до вибору функції g, яка б задовольняла умови $g \in L^{\perp}(\Theta_m)$ і $\|g\|_{q'} \le 1$. Покладемо

$$v_1(x) = V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)$$

і розглянемо поліном

$$t_1(x) = v_1(x) - v_1^*(x),$$

де $v_1^*(x)$ — функція, яка містить лише ті гармоніки $v_1(x)$, які мають номери із Θ_m.

Оцінимо $\|t_1\|_{q'}$. Згідно з (12) та рівністю Парсеваля можемо записати

$$\|t_1\|_{q'} \leq \|v_1\|_{q'} + \|v_1^*\|_2 \ll 2^{l(1-1/q')} + m^{1/2} \ll m^{1/2}.$$

Таким чином, функція $g(x) = C_7 m^{-1/2} t_1(x)$ при певному виборі сталої $C_7 > 0$ задовольняє вимогу $\|g\|_{q'} \leq 1$. Крім цього, легко бачити, що $g \in L^{\perp}(\Theta_m)$. Тому, підставивши f і g у співвідношення (11), одержимо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \geq e_m(f)_q =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \gg m^{-1/2}\psi(2^l)\big(\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_2^2 - m\big) \gg m^{-1/2}\psi(2^l)2^l. \tag{13}$$

Врахувавши, що $2^l \asymp m^{q/2}$, завершимо оцінку (13):

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \gg \psi\big(m^{q/2}\big) m^{\frac{q}{2}(1-1/q)}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Зазначимо, що даний результат доповнює оцінку величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, яку було встановлено у роботі [11].

Порівняємо теорему 1 з результатом, отриманим у роботі [12] при дослідженні величини $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$, яка означається згідно з формулою

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} e^{\perp}_m(f)_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \inf_{\Theta_m} \big\|f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot)\big\|_q,$$

де $S_{\Theta_m}(f,x) = \sum_{j=1}^{m} \hat{f}(n_j)e^{in_jx}$. Нагадаємо, що величина $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ називається найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q. Таким чином, співставляючи оцінку з теореми 1 з оцінкою величини $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ [12]

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-1/q},$$

бачимо, що при виконанні умов теореми 1 ці величини мають різні порядки.

Зазначимо також, що у випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $1 - \dfrac{1}{q} < r < 1$, оцінку величини $e_m(W^r_{1,\beta})_q$ одержано у роботі [4].

2. Найкращі білінійні наближення. Нехай L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1,\ q_2 \leq \infty$, — множина функцій $f(x,y)$, $x,y \in [-\pi,\pi]$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \Big\|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\Big\|_{q_2},$$

причому норма обчислюється спочатку у просторі L_{q_1} за змінною $x \in [-\pi, \pi]$, а потім від результату за змінною $y \in [-\pi, \pi]$ у просторі L_{q_2}. Для $f(x-y) \in L_{q_1,q_2}$ покладемо

$$\tau_m\big(f(x-y)\big)_{q_1,q_2} = \inf_{u_j(x), v_j(y)} \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}$, $v_j \in L_{q_2}$.

Якщо F — деякий клас функцій $f(x)$, то величина

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f \in F} \tau_m\big(f(x-y)\big)_{q_1,q_2} \tag{14}$$

називається найкращим білінійним наближенням. Класичний результат стосовно білінійних наближень функцій двох змінних у просторі $L_{2,2}$ належить Е. Шмідту [13]. Згодом дослідження величин (14) для деяких функціональних класів проводилися в роботах [14–21]. У цих роботах можна ознайомитися з детальнішою інформацією, а також відповідною бібліографією.

У цьому пункті будуть встановлені точні за порядком оцінки величин $\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2}$ для різних співвідношень між параметрами p, q_1, q_2. Перш ніж перейти до формулювання і доведення одержаних результатів, наведемо необхідні допоміжні твердження.

Теорема В [1, с. 215]. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t) t^{1/p - 1/q + \varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедливою є порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{1/p-1/q}.$$

Лема Б [3, с.107]. *Нехай задано деяке число $m \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якої функції*

$$g(x) = \sum_{|k| \le 2m} \widehat{g}(k) e^{ikx}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| \le 1$ і $|\widehat{g}(k)| = 1$ при $|k| \le m$, виконується співвідношення

$$\tau_m\big(g(x-y)\big)_{2,1} \gg m^{1/2}.$$

Нехай $C(2^l)$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — множина цілих чисел, що задовольняє умову $|k| \le 2^l$, і $T(C(2^l))$ — множина тригонометричних поліномів з номерами гармонік із $C(2^l)$.

Має місце наступне твердження.

Теорема Г [22]. *Нехай $t \in T(C(2^l))$. Тоді при $1 \le q \le p \le \infty$ має місце нерівність*

$$\|t\|_p \le 2 \cdot 2^{l(1/q-1/p)} \|t\|_q. \tag{15}$$

Нерівність (15) називають нерівністю різних метрик.

Теорема Д [23]. *Нехай $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Тоді для довільного полінома $t \in T(C(2^l))$ справедливою є оцінка*

$$\|t^{\psi}_{\beta}(\cdot)\|_p \ll \psi^{-1}(2^l) \|t(\cdot)\|_p.$$

Теорема Е [23]. *Нехай* $2 \le p \le q \le \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1/2+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливою є порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Зауважимо, що у випадку $2 \le p \le q < \infty$ теорему Е було встановлено у роботі [24], а у випадку $p = q = \infty$ — у роботі [25].

Теорема Є. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{a+\varepsilon}, a = \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливою є порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(m)m^{(1/p-1/2)_+},$$

де $b_+ = \max\{b; 0\}$.

Теорема Ж [24]. *Нехай* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1/p+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливою є порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{1/p-1/2}.$$

Теорема З [27]. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (3) *або* (4) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливою є порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1/2}.$$

Тепер перейдемо до формулювання і доведення отриманих результатів.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < q_1 \le 2$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi(t) \in B$, $t \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(t)t^{1/p-1/q_1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справджується порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q_1}. \tag{16}$$

Доведення. Покажемо, що оцінка зверху в (16) випливає з оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$:

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1} \ll \psi(m)m^{1/p-1/q_1}, \quad 1 < p < q_1 \le 2, \tag{17}$$

яка, в свою чергу, є наслідком оцінки наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ їх сумами Фур'є (теорема В).

Дійсно, з одного боку, згідно з оцінкою (17) для довільної функції $f(x)$ із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ і певної послідовності $\{n_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{Z}$ маємо

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} \right\|_{q_1} \ll \psi(m)m^{1/p-1/q_1}. \tag{18}$$

З іншого боку, для лівої частини (18) можемо записати

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} \right\|_{q_1} = \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j (x-y)} \right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} e^{-in_j y} \right\|_{q_1,\infty}. \tag{19}$$

Співставивши (18) і (19), одержимо

$$\left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} e^{-in_j y} \right\|_{q_1,\infty} \ll \psi(m) m^{1/p-1/q_1}, \tag{20}$$

і, поклавши в (20) $e^{in_j x} = u_j(x)$ і $e^{-in_j y} = v_j(y)$, прийдемо до шуканої оцінки зверху.

Встановимо в (16) оцінку знизу. По заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-1} \leq$ $\leq m < 2^l$ і розглянемо білінійне наближення функції $V_{2^{l+2}}(x-y)$.

Нехай системи функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^m$ і $\{v_j(y)\}_{j=1}^m$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, такі, що

$$\left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,1} \leq 2\tau_m \big(V_{2^{l+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}.$$

Оскільки для оператора Валле Пуссена $\mathbf{V}_n$, який діє за формулою $\mathbf{V}_n[f] = f * V_n$ (де $*$ — операція згортки), має місце рівність

$$\left\| \mathbf{V}_{2^{l+3}} \left[V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right] \right\|_{q_1,1} =$$

$$= \left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{V}_{2^{l+3}} \big[u_j(x) v_j(y) \big] \right\|_{q_1,1}$$

і для $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, виконується нерівність (див., наприклад, [10, с. 91])

$$\big\| \mathbf{V}_n[f] \big\|_q \leq 3 \|f\|_q,$$

то можна вважати, що функції $u_j(x)$ і $v_j(y)$ є тригонометричними поліномами з номерами гармонік із множини $C(2^{l+3})$, і при цьому справджується оцінка

$$\left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_m \big(V_{2^{l+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}. \tag{21}$$

Таким чином, згідно з (21) і (15) можемо записати

$$\left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right\|_{2,1} \ll$$

$$\ll 2^{l(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x)v_j(y) \right\|_{q_1,1} \ll$$

$$\ll 2^{l(1/q_1-1/2)} \tau_m \big(V_{2^{l+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}. \tag{22}$$

Далі, беручи до уваги співвідношення між числами m і l і використовуючи лему Б, із (22) знаходимо

$$\tau_m \big(V_{2^{l+2}}(x-y)\big)_{q_1,1} \gg 2^{-l(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x)v_j(y) \right\|_{2,1} \gg$$

$$\gg 2^{-l(1/q_1-1/2)} m^{1/2} \asymp 2^{-l(1/q_1-1)}. \tag{23}$$

Тепер розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_8 \psi(2^l) 2^{-l(1-1/p)} V_{2^{l+2}}(x), \quad C_8 > 0,$$

і покажемо, що при певному виборі сталої $C_8 > 0$ вона належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_1)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll 1$. З цією метою скориставшись теоремою Д і співвідношенням (12), одержимо

$$\|(f_1)^{\psi}_{\beta}\|_p \asymp \psi(2^l) 2^{-l(1-1/p)} \big\|(V_{2^{l+2}})^{\psi}_{\beta}\big\|_p \ll \psi(2^l) 2^{-l(1-1/p)} \psi^{-1}(2^{l+2}) \|V_{2^{l+2}}\|_p \ll 1.$$

Звідси робимо висновок, що $f_1 \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Насамкінець, скориставшись оцінкою (23), можемо записати

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \gg \tau_m(f_1(x-y))_{q_1,1} \asymp \psi(m) 2^{-l(1-1/p)} \tau_m \big(V_{2^{l+2}}(x-y)\big)_{q_1,1} \gg$$

$$\gg \psi(m) 2^{-l(1-1/p)} \cdot 2^{-l(1/q_1-1)} = \psi(m) 2^{l(1/p-1/q_1)} \asymp \psi(m) m^{1/p-1/q_1}. \tag{24}$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Наступне твердження є наслідком теореми 2, а також відомих оцінок величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$.

Теорема 3. *Нехай* $1 < p \le 2 < q_1 \le \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi(t) \in B$, $t \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(t)t^{1/p+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справджується порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m) m^{1/p-1/2}. \tag{25}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$, $1 < p \le 2 < q_1 \le \infty$ (теореми Є і Ж).

Відповідна оцінка знизу в (25) випливає з (16) при $q_1 = 2$ внаслідок нерівності $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_{q_1}$, $q_1 \ge 2$.

Теорема 4. *Нехай* $2 \le p \le q_1 \le \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi(t) \in B$, $t \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(t)t^{1/2+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справджується порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m). \tag{26}$$

Доведення. Оцінка зверху в (26) випливає з відповідних оцінок величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$, $2 \leq \leq p \leq q_1 \leq \infty$, із теорем Е та Є.

Встановимо оцінку знизу. По заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-2} \leq m < < 2^{l-1}$ і розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_9 \psi(2^l) 2^{-l/2} R_l(x), \quad C_9 > 0,$$

де $R_l(x) = \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \varepsilon_j e^{ijx}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, — поліноми Рудіна–Шапіро, для яких (див., наприклад, [28, с. 155]) має місце порядкова оцінка

$$\|R_l\|_\infty \ll 2^{l/2}. \tag{27}$$

Легко переконатися, що $f_2 \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Дійсно, згідно з теоремою Д та співвідношенням (27) можемо записати

$$\left\|(f_2)^{\psi}_{\beta}\right\|_p \asymp \psi^{-1}(2^l)\|f_2\|_p \ll 2^{-l/2}\|R_l\|_\infty \ll 2^{-l/2}2^{l/2} = 1.$$

Звідси випливає, що при належному виборі сталої $C_9 > 0$ функція f_2 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Тепер, беручи до уваги, що поліноми R_l задовольняють умови леми Б і для них виконується оцінка

$$\tau_m(R_l(x-y))_{2,1} \gg m^{1/2},$$

отримуємо

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \gg \tau_m(f_2(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg \psi(2^l)2^{-l/2}\tau_m(R_l(x-y))_{2,1} \gg \psi(2^l)2^{-l/2}m^{1/2} \asymp \psi(m).$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

На завершення роботи одержимо результат, який доповнює оцінку з теореми 3 у випадку $p = 1$. Але тут, у порівнянні з умовами теореми 3, нам довелося накласти додаткові обмеження на поведінку функції ψ. Необхідність цих обмежень була викликана використанням відповідних допоміжних тверджень.

Теорема 5. *Нехай* $2 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $\psi(t) \in B$, $t \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (3) *або* (4) *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справджується порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{1/2}. \tag{28}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 3.

Перейдемо до встановлення в (28) оцінки знизу і зауважимо, що при цьому достатньо розглянути випадок $q_1 = 2$.

За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ з умови $2^{l-1} \leq m < 2^l$ і розглянемо функцію

$$f_3(x) = C_{10}\psi(2^l)V_{2^{l+2}}(x), \quad C_{10} > 0.$$

Скориставшись твердженням A та співвідношенням (12), можемо записати

$$\left\|(f_3)^{\psi}_{\beta}\right\|_1 \ll \psi(2^l)\psi^{-1}(2^l) \ll 1.$$

Звідси робимо висновок, що $f_3 \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{10}.

Таким чином, врахувавши (23) та співвідношення між числами m і l, одержимо

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{2,q_2} \gg \tau_m(f_3(x-y))_{2,1} \asymp \psi(2^l)\tau_m(V_{2^{l+2}}(x-y))_{2,1} \gg \psi(2^l)2^{l/2} \asymp \psi(m)m^{1/2}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Зауваження. Для класів $W^r_{p,\beta}$ відповідні до теорем 2 – 5 твердження (як частковий випадок) встановив В. М. Темляков (див., наприклад, [3, с. 101]).

Література

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 2002. – **40**. – Т. I. – 427 с.; Т. II. – 468 с.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
4. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
5. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
6. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближение классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **82**, № 2. – С. 247 – 261.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. I. — 615 с.; Т. II. – 537 с.
8. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур’є класів (ψ,β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186 – 1197.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
10. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
11. *Федоренко А. С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения классов (ψ,β)-дифференцируемых функций одной переменной // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 850 – 855.
12. *Шкапа В. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 315 – 329.
13. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integraldeichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 433 – 476.
14. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1987. – **134**, № 1. – С. 93 – 107.
15. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 191 – 215.
16. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. гос. ун-т, 1987. – С. 16 – 33.
17. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535 – 1547.
18. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1411 – 1423.
19. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
20. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.

21. *Соліч К. В.* Оцінки білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1106 – 1120.
22. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
23. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ,β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
24. *Федоренко А. С.* О наилучших m-членных тригонометрических приближениях классов (ψ,β)-дифференцируемых функций одной переменной // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – 1998. – Вип. 3. – С. 250 – 258.
25. *Шкапа В. В.* Найкращі наближення аналогів ядер Бернуллі та класів (ψ,β)-диференційовних періодичних функцій // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 4. – С. 413 – 424.
26. *Шкапа В. В.* Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 305 – 317.
27. *Шкапа В. В.* Апроксимативні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 8. – С. 1139 – 1150.
28. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

Одержано 22.06.15