УДК 517.51

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРАТНЫЙ БАЗИС ХААРА и m-ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ БЕСОВА. I

We describe the isotropic Besov spaces of functions of several variables in the terms of conditions imposed on the Fourier – Haar coefficients.

Описано ізотропні простори Бєсова функцій багатьох змінних у термінах умов на коефіцієнти Фур'є – Хаара цих функцій.

Введение. Работа состоит из двух взаимосвязанных частей, оформленных в виде отдельных статей с общим названием. Первая часть посвящена описанию изотропных пространств Бесова функций из $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$, в терминах условий на их коэффициенты Фурье по кратному базису Хаара.

В первом пункте приведены основные обозначения и определения. Во втором пункте определяются базисные системы функций H_0^d, $\mathbb{H}_0^d$ и базис Хаара – Шаудера H^d, а также кратная система функций Хаара $\mathcal{H}^d$. Здесь же проводится структурирование системы H_0^d по определенным свойствам ее элементов. В третьем пункте доказана теорема об эквивалентном представлении нормы (элементов f) изотропного пространства Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}$ посредством выражений от коэффициентов Фурье – Хаара функций f по системе H^d. При этом мы существенно используем результаты из [1] (см. также [2], § 3), касающиеся свойств системы H_0^d, равносильно — базиса H^d.

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ и $\mathfrak{A} = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — система элементов из $\mathscr{X}$ такая, что $\overline{\operatorname{span}\mathfrak{A}} = \mathscr{X}$. Здесь Ω — счетное множество индексов, в частности $\Omega = \mathbb{Z}^d$ — множество целочисленных точек (векторов) в $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$.

Величина наилучшего m-членного, $m \in \mathbb{N}$, приближения элемента $f \in \mathscr{X}$ по системе $\mathfrak{A}$ определяется следующим образом:

$$\sigma_m(f;\mathfrak{A};\mathscr{X}) := \inf_{\substack{\Lambda\subset\Omega\\ \sharp\Lambda=m}} \inf_{c_\alpha\in\mathbb{R}} \left\| f - \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha u_\alpha \right\|_{\mathscr{X}}.$$

Этой величиной устанавливается наименьшая погрешность аппроксимации f линейными комбинациями произвольных m элементов системы $\mathfrak{A}$. Полагаем также $\sigma_0(f;\mathfrak{A};\mathscr{X}) = \|f\|_{\mathscr{X}}$.

Если F — некоторое фиксированное подмножество в $\mathscr{X}$, то определяем

$$\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X}) := \sup_{f\in F} \sigma_m(f;\mathfrak{A};\mathscr{X}).$$

Одной из первостепенных в теории нелинейной аппроксимации является задача установления асимптотики (по крайней мере, слабой) величин $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$ для заданных $\mathscr{X}$, $\mathfrak{A}$ и F. Дополняющей и более важной, с точки зрения практических приложений, является задача о построении алгоритма, на основании которого определяется множество $\Lambda_f \subset \Omega$, $\sharp\Lambda_f = m$ для $f \in F$ и коэффициенты $c_\alpha(f)$, $\alpha \in \Lambda_f$, такие, что

$$\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X}) \asymp \sup_{f\in F}\left\| f-\sum_{\alpha\in\Lambda_f} c_\alpha(f)u_\alpha\right\|_{\mathscr{X}}.$$

В некоторых случаях решение этой задачи довольно простое. Например, если $\mathscr{X}=\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $\mathfrak{A}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$, то значение величины $\sigma_m(f;\mathfrak{A};\mathscr{H})$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$, индуцированной скалярным произведением в $\mathscr{H}$, реализуется при приближении так называемыми жадными аппроксимантами, а соответствующий алгоритм их построения называется чисто жадным алгоритмом и обозначается PGA.

В основе PGA (в упрощенном варианте) лежит выбор m наибольших по модулю коэффициентов Фурье $c_\alpha(f)$ элемента f по системе $\mathfrak{A}$ (и этим, как следствие, определяется соответствующее множество Λ_f). Понятно, что жадные аппроксиманты таким образом, вообще говоря, определяются неоднозначно, но все они дают одно и то же значение приближения элемента f в $\mathscr{H}$.

В общем случае использование PGA в качестве построения аппарата „хорошей" нелинейной аппроксимации элемента $f\in F$ обусловливается свойствами системы $\mathfrak{A}$. Например, если $\mathscr{X}= L_p(\mathbb{T}^d)$, $1\le p\le\infty$, $\mathbb{T}^d:=\prod_{i=1}^d[0;2\pi]$, $\mathcal{T}=\{e^{i(k,x)}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, то жадные аппроксиманты функции $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ имеют вид

$$G_m(f,x)=\sum_{j=1}^m \widehat{f}(k^j)e^{i(k^j,x)},$$

где $|\widehat{f}(k^1)|\ge|\widehat{f}(k^2)|\ge\ldots\ge|\widehat{f}(k^m)|\ge\ldots$ — упорядоченные по модулям коэффициенты Фурье функции f по системе $\mathcal{T}$.

В [3] доказано, что для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\big\|f(\cdot)-G_m(f;\cdot)\big\|_p\le\big(1+3m^{|1/2-1/p|}\big)\sigma_m\big(f;\mathcal{T};L_p(\mathbb{T}^d)\big),\quad 1\le p\le\infty.$$

В [4] установлены оценки величины $\sigma_m(F;\mathcal{T};L_p(\mathbb{T}^d))$ для некоторых классов F гладких функций (в частности, классов типа Никольского – Бесова), которые в сочетании с оценками величин $\sup_{f\in F}\|f(\cdot)-G_m(f;\cdot)\|_p$, полученными в [3], показывают, что при определенных предположениях имеет место соотношение

$$\sup_{f\in F}\big\|f(\cdot)-G_m(f;\cdot)\big\|_p\asymp\sigma_m\big(F;\mathcal{T};L_p(\mathbb{T}^d)\big).$$

Определяющим условием в построении и использовании простых жадных аппроксимант для приближения в $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1<p<\infty$, является равномерная ограниченность базиса $\mathfrak{A}$, в частности базиса $\mathcal{T}$, участвующего в PGA, т. е.

$$\frac{1}{M}\le\|u_\alpha\|_1\le\|u_\alpha\|_p\le\|u_\alpha\|_\infty\le M.$$

Заметим, что это влечет равенство по порядку каждого слагаемого $\|\langle f;u_\alpha\rangle u_\alpha\|_p$ и модулей $|\langle f;u_\alpha\rangle|$ — коэффициентов Фурье $\langle f;u_\alpha\rangle$, $\alpha\in\Omega$, функции $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ по системе $\mathfrak{A}$.

Примером систем, не подчиняющихся условию равномерной ограниченности $\big($в функциональных пространствах $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<2\big)$, являются кратная базисная система Хаара $\mathcal{H}^d= \{\mathrm{H}_I\}_{I\in\mathbb{D}^d}$ (см. [5]) и система Хаара $\mathbb{H}_0^d=\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in\mathbb{Z}^d}$ функций от d переменных (определение этих систем в единых терминах дается в п. 2). Как показано в [2] (см. также [1]), система $\mathbb{H}_0^d$ после надлежащего упорядочивания является базисом в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$, который обозначается через H^d.

Отметим, что a priori в случае $d = 1$ обе системы совпадают, т. е. $\mathcal{H}^1 \equiv \mathbb{H}_0^1$, и являются базисной системой (базисом Хаара – Шаудера) в $L_p(\mathbb{I})$, $1 \le p < \infty$ [6] (гл. 3).

Поскольку $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис Шаудера в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$, то каждая функция $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ допускает представление (см. [2])

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, h_i) h_i(x) \tag{1}$$

(ряд сходится в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$), где $(f, h_i) = \displaystyle\int_{\mathbb{I}^d} f(x) h_i(x) dx$ — коэффициенты Фурье – Хаара функции f.

Известно, что даже в случае $d = 1$ при $1 \le p < 2$ для некоторой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, возможно, $\overline{\lim_{i\to\infty}} |(f, h_i)| = +\infty$. Поэтому практически осуществить построение простых жадных аппроксимант согласно PGA для каждой функции f из $L_p(\mathbb{I}^d)$ не представляется возможным. Однако из разложения (1) следует, что $\|(f, h_i) h_i\|_p \to 0$ при $i \to \infty$, поэтому можно определить аппарат нелинейного приближения f с помощью так называемого жадного алгоритма G^p, по-видимому, впервые примененного в [7] в случае $d = 1$ и в [5] в случае $d \ge 1$ при приближении аппаратами, построенными по кратной системе Хаара $\mathcal{H}^d$, — тензорного произведения известных одномерных систем Хаара $\mathbb{H}$. Отметим, что в упомянутых работах понятие „жадных аппроксимант” укладывается в термин „жадный алгоритм”.

Итак, для функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ и системы $\mathrm{H}^d \equiv \mathbb{H}_0^d$ полагаем

$$G_m^p(f; \mathrm{H}^d)(x) := \sum_{\overline{k} \in \Lambda_f^{\max}} (f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(x), \quad x \in \mathbb{I}^d,$$

где $\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d$ зависит от функции f и определяется так, что $\sharp \Lambda_f^{\max} = m$ и

$$\min\left\{\|(f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\|_p, \overline{k} \in \Lambda_f^{\max}\right\} \ge \max\left\{\|(f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\|_p, \overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d \backslash \Lambda_f^{\max}\right\}.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$, погрешность приближения жадными аппроксимантами $G_m^p(f; \mathrm{H}^d)$ измеряется величиной

$$g_m\big(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big) := \inf_{\substack{\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d \\ \sharp \Lambda_f^{\max} = m}} \big\| f - G_m^p(f; \mathrm{H}^d) \big\|_p.$$

При $m = 0$ полагаем $g_0\big(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big) := \|f\|_p$.

Если $F \subset L_p(\mathbb{I}^d)$, то определяем

$$g_m\big(F; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big) := \sup_{f \in F} g_m\big(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big).$$

В дальнейшем будем использовать аналогичные определения и для подсистем $\mathcal{K}$ в H^d, определяющихся сужением множества индексов $\mathbb{Z}_+^d$ на некоторое множество Ω, а также для других систем и с иной индексацией их элементов. Одним из основных, во всех случаях, является условие, чтобы количество слагаемых в приближающем агрегате равнялось m.

Отметим, что в случае $d > 1$ жадные аппроксиманты $G^p_m(f; \mathrm{H}^d)$ и $G^p_m(f; \mathcal{H}^d)$ имеют, вообще говоря, различные возможности при приближении индивидуальной функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq \leq p \leq \infty$, в сравнении с соответствующими наилучшими m-членными приближениями. Так, известно, что при $1 \leq p \leq \infty$ не для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ выполняется порядковое равенство

$$g_m\big(f; \mathcal{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big) \asymp \sigma_m\big(f; \mathcal{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big).$$

Подробнее об этом см. в [7].

В противоположность отмеченному базис H^d, $d > 1$, наследует многие структурные и аппроксимационные свойства одномерного базиса Хаара $\mathrm{H}^1 = \mathbb{H}$. Например, для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 < p < \infty$, имеет место соотношение (см. теорему 1)

$$g_m\big(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big) \asymp \sigma_m\big(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)\big),$$

которое в случае $d = 1$ установлено В. Н. Темляковым [7]. Этот факт позволил в полном объеме получить решение упомянутых в начале работы задач по отношению к величине $\sigma_m(F; \mathfrak{A}; \mathscr{X})$ в случаях, когда:

1) $F = SB^\alpha_{p,\theta}$, $1 \leq p,\ \theta < \infty$, $0 < \alpha < 1$, — единичный шар в изотропном пространстве Бесова функций из $L_p(\mathbb{I}^d)$ и/или $F = SB^\Lambda_\theta(L_p)$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, — единичный шар в пространстве типа Никольского – Бесова (точное определение см. ниже);

2) $\mathfrak{A} = \mathrm{H}^d$ — кратный базис Хаара в $L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq q < \infty$;

3) $\mathscr{X} = L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 < q < \infty$, — пространство Лебега функций d переменных.

Уточненные ограничения на параметры p, q, θ, α и Λ указаны в формулировках соответствующих теорем.

Что касается базиса Хаара H функций одной переменной, отметим следующее. Системное изучение рядов по системе H восходит к работе П. Л. Ульянова [8]. В статье Б. И. Голубова [9] получены фундаментальные результаты, характеризующие аппроксимативные свойства системы H по отношению к функциям из пространств $L_q([0,1])$, $1 \leq q < \infty$, и $C([0,1])$ в задачах линейной аппроксимации. Основное содержание этих результатов составляют прямые и обратные теоремы.

1. Основные обозначения и определения. Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества натуральных, вещественных, вещественных неотрицательных, целых, целых неотрицательных чисел; $\mathbb{I}$ — отрезок $[0,1]$; $A^d = \prod_{i=1}^d A$, $d \in \mathbb{N}$, — декартово произведение d множеств A, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ или отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$; $\bigotimes\limits_{i=1}^d \mathfrak{M}(i)$ — тензорное произведение некоторых множеств $\mathfrak{M}(i)$, $i = \overline{1,d}$, в частности функциональных; $\operatorname{card} A$ обозначает количество элементов произвольного конечного множества A, а $\sharp A$ — количество точек конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^d$; $|A|$ или vol A — объем (мера Лебега) множества $A \subset \mathbb{R}^d$; $\overline{B}$ — замыкание множества $B \subset \mathscr{X}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ банахова пространства $\mathscr{X}$; $\operatorname{span}\{\varphi_i, i \in A\}$ — линейная оболочка системы элементов $\{\varphi_i, i \in A\}$; $\gamma\mathscr{X} := \{f \in \mathscr{X} : \|f\|_{\mathscr{X}} \leq \gamma\}$, $\gamma > 0$, где $\mathscr{X}$ — банахово пространство; $S\mathscr{X} := 1\mathscr{X}$ — единичный шар в $\mathscr{X}$.

$\mathscr{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ означает, что для банаховых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathcal{Y}$ справедливо вложение $\mathscr{X} \subset \mathcal{Y}$ и $\|x\|_{\mathcal{Y}} \leq C\|x\|_{\mathscr{X}}$ $\forall x \in \mathscr{X}$, $C > 0$. Через $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ обозначается последовательность элементов некоторого пространства, а через $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — счетная (конечная) система элементов некоторого пространства.

Одной и той же буквой в разных шрифтах с определенными индексами и без них мы обозначаем различные системы функций Хаара.

Через $C(p,q)$, $C_1(p,q)$, $C_2(r,\theta,p)$ обозначаются величины, зависящие, возможно, только от указанных в скобках параметров, положительные при всех допустимых значениях этих параметров, а через C, C_1, $C_2, \ldots$ — абсолютные положительные постоянные, необязательно одинаковые в разных местах текста.

Далее $a \asymp b$ означает, что для неотрицательных величин a и b, определяемых некоторой совокупностью параметров, существует положительная величина C, не зависящая от одного, обозначенного контекстом параметра, такая, что $C^{-1}a \leq b \leq Ca$; если только $b \leq Ca$ $\big(b \geq \geq C^{-1}a\big)$, то пишем $b \ll a$ $(b \gg a)$.

Наконец, приведем определения и обозначения базовых объектов, используемых в работе.

$L_q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, — пространство функций $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, измеримых на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\varphi(x)|^q dx\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\varphi(x)|;$$

$L_q := L_q(\mathbb{I}^d)$, $\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{L_q(\mathbb{I}^d)}$, $1 \leq q \leq \infty$;

$B_p := \big\{f \in L_p(\mathbb{I}^d)\colon \|\varphi\|_p \leq 1\big\}$ — единичный шар в пространстве $L_p(\mathbb{I}^d)$;

$\omega(\varphi;t)_p := \sup_{\substack{0\leq\lambda_i<t\leq 1\\ i=\overline{1,d}}} \|\Delta_\lambda(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{I}^d_\lambda)}$ — модуль непрерывности $\big($$p$-интегральный при $1 \leq p < \infty$ $\big)$ функции $\varphi \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathbb{I}^d_\lambda := \prod_{i=1}^d [0; 1-\lambda_i]$ и $\Delta_\lambda(f;x) := := f(x+\lambda) - f(x)$ при $x, x+\lambda \in \mathbb{I}^d$;

l_p^m, $0 < p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, — пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, снабженное квазинормой (нормой при $1 \leq p \leq \infty$)

$$\|x\|_{l_p^m} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|x\|_{l_\infty^m} = \max\nolimits_{1\leq i\leq m} |x_i|, \quad p = \infty;$$

$B_p^m(r) := \{x \in l_p^m\colon \|x\|_{l_p^m} \leq r\}$, $r > 0$; $B_p^m \equiv B_p^m(1)$.

2. Определение функциональных систем $\mathbf{H_0^d}$, $\mathbb{H}_0^d$, $\mathbf{H^d}$ и $\mathcal{H}^d$. В 1909 г. А. Хааром [10] была построена ортонормированная на отрезке $[0,1]$ полная в пространстве $L_1([0,1])$ система функций $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, ряды Фурье по которой для непрерывных функций сходятся к ним равномерно на $[0,1]$. Напомним определение этой системы в обозначениях, дополняющих уже принятые.

Обозначим через $D_j,\ j=1,2,\ldots,$ множество двоичных интервалов j-го уровня отрезка $\mathbb{I}:=[0,1]$:

$$D_j=\left\{I_j^s\colon s=0,1,\ldots,2^{j-1}-1\right\},$$

где $I_j^s=(s2^{-j+1},(s+1)2^{-j+1})$. Положим также $I_0^0:=\mathbb{I}$ и $D_0=\{I_0^0\}$.

Определим функции Хаара, положив

$$\mathrm{H}_{I_0^0}(t)=1,\quad t\in\mathbb{I},$$

и для $j=1,2,\ldots,\ s=0,1,\ldots,2^{j-1}-1$

$$\mathrm{H}_{I_j^s}(t)=\begin{cases}|I_j^s|^{-1/2}, & t\in\left(s2^{-j+1},\left(s+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j+1}\right),\\ -|I_j^s|^{-1/2}, & t\in\left(\left(s+\dfrac{1}{2}\right)2^{-j+1},(s+1)2^{-j+1}\right),\\ 0, & t\in\mathbb{I}\setminus\overline{I_j^s},\end{cases}$$

где $|I_j^s|=2^{-j+1}$ — длина интервала I_j^s, а $\overline{I_j^s}$ — его замыкание.

Во всех внутренних (по отношению к отрезку $\mathbb{I}$) точках разрыва функции $\mathrm{H}_{I_j^s}(t)$ полагаются равными полусумме их пределов слева и справа, а в конечных точках отрезка $[0,1]$ — их предельным значениям изнутри отрезка.

Система $\mathbb{H}=\{\mathrm{H}_{I_0^0}\}\bigcup\{\mathrm{H}_{I_j^s}\}_{\substack{j=1,2,\ldots\\ s=0,1,\ldots,2^{j-1}-1}}$ называется базисной системой Хаара.

Упорядочим систему $\mathbb{H}$ следующим образом. Положим $h_0(t)=1,\ t\in I_0^0$, и $h_{2^{j-1}+s}(t)=h_j^s(t)=\mathrm{H}_{I_j^s}(t)$ для $0\le s<2^{j-1},\ j=1,2,\ldots$. Полученную последовательность $h_n,\ n=0,1,\ldots,$ обозначим через H.

В 1928 г. Й. Шаудер [11] показал, что система $\mathrm{H}=(h_n)_{n=0}^{\infty}$ является базисом в пространствах Лебега $L_q\big([0,1]\big),\ 1\le q<\infty$.

Определим теперь кратную базисную систему Хаара H_0^d функций, заданных на единичном кубе $\mathbb{I}^d,\ d\ge 2$. Обозначим через $Q_j:=\bigotimes_{i=1}^d D_j,\ j=1,2,\ldots,$ множество кубов I двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$ объемом $|I|=2^{(-j+1)d}$, т. е.

$$Q_j=\left\{I_j^{\bar{l}}=\prod_{i=1}^d I_j^{l_i}\colon \bar{l}=(l_1,\ldots,l_d),0\le l_i<2^{j-1},i=\overline{1,d}\right\},$$

а через $Q:=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$ множество всех кубов двоичного разбиения $\mathbb{I}^d$. Положим

$$\mathrm{H}_0^d:=\{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\}\cup\{\mathrm{H}_I\}_{I\in Q},$$

где функция

$$\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}(x)=1,\quad x\in\mathbb{I}^d,$$

и для $j\in\mathbb{N}$ и $I\in Q_j$ $\left(\text{т. е. } I=\prod_{i=1}^d I_j^{s_i}\right)$

$$\mathrm{H}_I(x_1,\ldots,x_d)=\prod_{i\in E}\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)\times\prod_{i\in\mathbb{T}\setminus E}|\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)|. \tag{2}$$

Здесь E — произвольное непустое подмножество множества $\mathbb{T} := \{1, 2, \ldots, d\}$, в том числе допускается $E = \mathbb{T}$ и в этом случае множитель $\prod_{i \in \mathbb{T} \setminus E}$ заменяется единицей.

Заметим, что совокупностью всех подмножеств E с заданным числом $\operatorname{card} E \neq d$ и множеством $E = \mathbb{T}$ с помощью формулы (2) определяется $2^d - 1$ функция с носителями на фиксированном кубе $I \in Q_j$, а значит на каждом кубе $I_j^{\bar{l}} = \prod_{i=1}^d I_j^{l_i}$, $l = (l_1, \ldots, l_d)$, $0 \le l_i < 2^{j-1}$, $i = \overline{1, d}$. Соответствующие множества таких функций обозначим через $\mathrm{H}(j, \bar{l})$.

Теперь представим систему H_0^d, $d \geq 2$, другим способом, исходя из одномерного базиса Хаара H и используя при этом векторную нумерацию входящих в эту систему функций. С этой целью разобьем множество $\mathbb{Z}_+^d$ на непересекающиеся подмножества $Z_{0,d} := Y_{0,d}$ и $Z_{j,d} := Y_{j,d} \setminus Y_{j-1,d}$, $j = 1, 2, \ldots$, где

$$Y_{0,d} = \{\bar{0}\} = \{(0, 0, \ldots, 0)\} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

$$Y_{j,d} = \left\{ \bar{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d : 0 \le k_i < 2^j, i = \overline{1, d} \right\}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Понятно, что $\mathbb{Z}_+^d = \bigcup_{j=0}^{\infty} Z_{j,d}$. Отметим также, что $\sharp Y_{j,d} = 2^{jd}$ и $\sharp Z_{j,d} = (2^d - 1) 2^{(j-1)d} \asymp 2^{jd}$.

Итак, определим систему функций с d переменными

$$\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^d} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in Z_{j,d}},$$

положив

$$h_{\bar{0}} = \bigotimes_{i=1}^d h_0,$$

и для $\bar{k} \in Z_{j,d}$, $j = 1, 2, \ldots$,

$$h_{\bar{k}} = \bigotimes_{i \in E} h_{k_i} \otimes \bigotimes_{i \in \mathbb{T} \setminus E} |h_{2^{j-1} + k_i}|,$$

где $E = \left\{ i \in \mathbb{T} : 2^{j-1} \le k_i < 2^j \right\}$, причем если $E = \mathbb{T}$, то полагаем $h_{\bar{k}} = \bigotimes_{i \in \mathbb{T}} h_{k_i}$.

Понятно, что $\mathbb{H}_0^d = \mathrm{H}_0^d$, т. е. множества $\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$ и H_0^d совпадают. Более того, между индексацией двоичными кубами из Q_j функций множества H_0^d и индексацией векторами из $Z_{j,d}$ функций множества $\mathbb{H}_0^d$ устанавливается взаимно однозначное соответствие так, что $\{h_I\}_{I \in Q_j} = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in Z_{j,d}}$, $j = 1, 2, \ldots$. Множество индексов $\bar{k} \in Z_{j,d}$ функций $h_{\bar{k}} \in \mathrm{H}(j, \bar{l})$ обозначим через $Z_{j,d}(\bar{l})$.

Упорядочим векторы $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ множества $\mathbb{Z}_+^d$, расположив их в виде последовательности $\bar{k}^{(1)}, \bar{k}^{(2)}, \ldots, \bar{k}^{(m)}, \ldots$ так, что $\bar{k}^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$ и для $i = 2, 3, \ldots$

$$\max \left\{ \bar{k}_j^{(i)} : j = \overline{1, d} \right\} \le \max \left\{ \bar{k}_j^{(i+1)} : j = \overline{1, d} \right\}.$$

Соответствующую такому упорядочиванию последовательность $\left(h_{\bar{k}^{(i)}}\right)_{i=1}^{\infty}$ функций системы $\mathbb{H}_0^d$ обозначим через H^d.

Заметим, что в таком случае, если для некоторого номера i выполняется неравенство $\sharp Z_{j-1,d} < i \le \sharp Z_{j,d}$ с $j \in \mathbb{N}$, то $\overline{k}^{(i)} = \overline{k}$ для некоторого $\overline{k} \in Z_{j,d}$, а если $\overline{k} \in Y_{n,d}$, то при некотором $1 \le i \le \sharp Y_{n,d}$ будет $\overline{k} = \overline{k}^{(i)}$ и $\overline{k}^{(i)} \in Y_{n,d}$.

Теперь, занумеровав функции системы H^d согласно соответствию $\overline{k}^{(i)} \to i$, будем писать $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$.

В заключение этого пункта определим кратную систему функций Хаара $\mathcal{H}^d$ как тензорное произведение базисных систем Хаара $\mathbb{H}$ функций одной переменной с соответствующей индексацией функций параллелепипедами множества $\mathbb{D}^d$ двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$:

$$\mathcal{H}^d = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathbb{H} = \{\mathrm{H}_I\}_{I \in \mathbb{D}^d}.$$

Таким образом, для заданных $j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_k = 0, \ldots, 2^{j_k - 1} - 1$, $k = \overline{1, d}$, а также $I = \prod_{k=1}^{d} I_{j_k}^{s_k}$ $\left(I_{j_k}^{s_k} \in D_{j_k},\, k = \overline{1, d}\right)$ полагаем

$$\mathrm{H}_I(x_1, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \mathrm{H}_{I_{j_k}^{s_k}}(x_k).$$

Из относительно краткого списка работ, в которых при $d \ge 2$ изучены свойства системы $\mathcal{H}^d$, в том числе аппроксимационные свойства, кроме упомянутой работы [5] выделим также работу [12], близкую по постановке задач к настоящей. В этой работе решены задачи о линейном и нелинейном приближении полиномами по системе $\mathcal{H}^d$ функций из единичных шаров неизотропных пространств Никольского H_p^r, $0 < r < 1$, определяемых по типу пространств Бесова $B_{p,\theta}^{\alpha}$ при $\theta = \infty$ условиями на смешанный p-модуль гладкости порядка k (предполагается также, что функции представимы в виде ряда Фурье–Хаара по системе $\mathcal{H}^d$, сходящегося в $L_q(\mathbb{I}^d)$). В частности, найдены порядковые оценки величин $\sigma_m(H_p^r; \mathcal{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d))$ при различных значениях тройки параметров p, q, r : $1 \le p, q < \infty$, $r > \dfrac{1}{p}$. Эти результаты получили развитие в виде их распространения, с одной стороны, на более широкую шкалу пространств H_p^{Ω} [13], а с другой — на шкалу пространств типа Бесова $\mathbf{MB}_{p,\theta}^r$ [14, 15], содержащую и пространства H_p^r.

3. Об эквивалентном представлении нормы в пространстве $\boldsymbol{B_{p,\theta}^{\alpha}}$. Приведем вначале определение известных пространств Бесова $B_{p,\theta}^{\alpha}$ функций, определенных на $\mathbb{I}^d$ (см. [16]).

Определение 1. *Для заданных параметров α, p, θ, $0 < \alpha < 1$ и $1 \le p, \theta < \infty$, нормированное пространство $B_{p,\theta}^{\alpha}$ — это множество функций φ, удовлетворяющих условиям*

$$\varphi \in L_p(\mathbb{I}^d),$$

$$\|\varphi\|_{p,\theta}^{(\alpha)} := \|\varphi\|_p + |\varphi|_{p,\theta}^{(\alpha)} < \infty,$$

где полунорма $|\varphi|_{p,\theta}^{\alpha}$ определяется соотношением

$$|\varphi|_{p,\theta}^{(\alpha)} := \left[\int_0^1 \left(\frac{\omega(\varphi; t)_p}{t^{\alpha}} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right]^{1/\theta}.$$

$B^{\alpha}_{p,\theta}$ — сепарабельное банахово пространство для любой тройки параметров α, p, $\theta\colon 0 < \alpha < 1$, $1 \le p, \theta < \infty$. Заметим, что при $\alpha > \dfrac{d}{p}$ пространство $B^{\alpha}_{p,\theta}$ является подпространством банахова пространства $C(\mathbb{I}^d)$ функций, непрерывных на $\mathbb{I}^d$ с равномерной метрикой.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p, \theta < \infty$ *и* $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$. *Тогда для* $f \in B^{\alpha}_{p,\theta}$, $f \ne \mathrm{const}$,

$$|f|^{(\alpha)}_{p,\theta} \asymp \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left[2^{j\left(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2}\right)}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|b_{\overline{k}}|^p\right)^{1/p}\right]^{\theta}\right)^{1/\theta}, \tag{3}$$

где $b_{\overline{k}} = (f, h_{\overline{k}}) := \int_{\mathbb{I}^d} f(x)h_{\overline{k}}(x)\,dx$, $\overline{k}\in\mathbb{Z}^d_+$, *— коэффициенты Фурье–Хаара функции* f.

Доказательство. Заметим вначале, что для $f \in B^{\alpha}_{p,\theta}$

$$\int\limits_0^1\left(\frac{\omega(f;t)_p}{t^{\alpha}}\right)^{\theta}\frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\left(\frac{\omega(f;t)_p}{t^{\alpha}}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}. \tag{4}$$

Положим $a(t) := t^{-\alpha}\omega(f;t)_p$. Поскольку для p-модуля непрерывности $\omega(f;t)_p$ выполняется неравенство $\omega(f;\lambda t)_p \le (\lambda+1)\omega(f;t)_p$, $\lambda > 0$, и $\omega(f;t)_p$ не убывает на $[0;\infty)$, то для любых $1 \le p < \infty$ и $t \in [2^{-k-1}; 2^{-k}]$, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\frac{1}{2}a(2^{-k}) \le a(t) \le 2^{\alpha}a(2^{-k}).$$

Значит,

$$\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}(a(t))^{\theta}\frac{dt}{t} \asymp \left(a(2^{-k})\right)^{\theta} = \left(2^{k\alpha}\omega(f;2^{-k})_p\right)^{\theta}$$

и, как следствие,

$$|f|^{(\alpha)}_{p,\theta} \asymp \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}\omega(f;2^{-k})_p\right)^{\theta}\right]^{1/\theta}. \tag{5}$$

В дальнейшем, в процессе приведения соотношения (5) к виду (3), потребуется использовать дискретное неравенство Харди (см. [17], гл. 2, § 3, лемма 3.4): если для двух последовательностей $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ и $b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ неотрицательных действительных чисел при некоторых $C_0 > 0$ и $\mu > 0$ выполняется одно из двух условий

(a) $b_k \le C_0\left(\sum_{j=k}^{\infty}a_j^{\mu}\right)^{1/\mu}$,

(b) $b_k \le C_0 2^{-k\lambda}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}(2^{j\lambda}a_j)^{\mu}\right)^{1/\mu}$, $\lambda > 0$, то выполняется неравенство (для любого $\theta > 0$)

$$\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k\alpha}b_k)^\theta\right]^{1/\theta} \le CC_0\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k\alpha}a_k)^\theta\right]^{1/\theta}, \quad C = C(\alpha,\theta), \tag{6}$$

при $0 < \alpha < \infty$ в случае (a) и при $0 < \alpha < \lambda$ в случае (b).

Итак, продолжим эквивалентные (в смысле отношения $\asymp$) преобразования правой части соотношения (5). Будем следовать схеме, предложенной в работе [18].

Для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ и $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ (см. п. 2) положим

$$P_n f(x) = \sum_{\bar{k}\in Y_{n,d}}(f,h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(x), \qquad R_k f(x) = \sum_{\bar{k}\in Z_{k,d}}(f,h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(x).$$

Пусть $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Исходя из равенства $f = f - P_n f + \sum_{k=0}^n R_k f$, согласно лемме 2 из [1] и с учетом неравенства $\omega(\varphi;\delta)_p \le 2\|\varphi\|_p$, $\delta > 0$, при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\omega(f;2^{-n})_p \le \omega(f - P_n f;2^{-n})_p + \sum_{k=0}^n \omega(R_k f;2^{-n})_p \le$$

$$\le 2\left(\|f - P_n f\|_p + 2^{-n/p}\sum_{k=1}^n 2^{k/p}\|R_k f\|_p\right) \tag{7}$$

(здесь учтено, что $\omega(R_0 f;2^{-n})_p = 0$).

Обозначим $d_n(f)_p := \|f - P_n f\|_p$. Тогда, поскольку $R_k f = (f - P_{k-1}f) - (f - P_k f)$, $k \in$ $\in Z_+$, $P_{-1}f := 0$ и

$$\|R_k f\|_p \le d_{k-1}(f)_p + d_k(f)_p, \tag{8}$$

следствием неравенства (7) является неравенство

$$\omega(f;2^{-n})_p \le C_0 2^{-n/p}\sum_{k=0}^n 2^{k/p}d_k(f)_p, \tag{9}$$

где $C_0 > 0$ — некоторая постоянная (можно выбрать ее не зависящей от p).

Из условия (9) (ср. с условием (b) при $\mu = 1$, положив $b_n = \omega(f;2^{-n})_p$, $a_n = d_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $b_n = a_n = 0$ при $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+$), в силу дискретного неравенства Харди (6), приходим к неравенству

$$\left(\sum_{k=0}^\infty\left(2^{k\alpha}\omega(f;2^{-k})_p\right)^\theta\right)^{1/\theta} \le C_0 C\left(\sum_{k=0}^\infty\left(2^{k\alpha}d_k(f)_p\right)^\theta\right)^{1/\theta}, \tag{10}$$

которое выполняется при $1 \le \theta < \infty$ и $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$.

Сопоставляя (10) и (5), получаем неравенство

$$|f|_{p,\theta}^{(\alpha)} \ll \left(\sum_{k=0}^\infty\left(2^{k\alpha}d_k(f)_p\right)^\theta\right)^{1/\theta} \tag{11}$$

при $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$.

Далее, для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливо разложение $f = P_n f + \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k f$ со сходимостью правой части к f по норме пространства $L_p(\mathbb{I}^d)$. Поэтому

$$d_n(f)_p = \|f - P_n f\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|R_{k+1} f\|_p. \tag{12}$$

Неравенство (12) также влечет выполнение дискретного неравенства Харди, т. е. при $1 \leq \leq \theta < \infty$ и $\alpha > 0$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} d_k(f)_p \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} \|R_k f\|_p \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}. \tag{13}$$

Сопоставляя (13) с (11), получаем, что при $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$ справедливо соотношение

$$|f|_{p,\theta}^{(\alpha)} \ll \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} \|R_k f\|_p \right)^{\theta} \right]^{1/\theta}. \tag{14}$$

С другой стороны, на основании (8) и леммы 2 из [1]

$$\|R_k f\|_p \leq C(d,p)\omega(f; 2^{-k})_p,$$

что в сочетании с соотношением (5) влечет неравенство

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} \|R_k f\|_p \right)^{\theta} \right]^{1/\theta} \ll |f|_{p,\theta}^{(\alpha)}. \tag{15}$$

Наконец, эквивалентность (3) является следствием соотношений (14) и (15) в сочетании с леммой 1 из [1] и справедлива при любых $1 \leq \theta < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Романюк В. С.* Кратный базис Хаара и его свойства // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С 1253 – 1264.
2. *Романюк В. С.* Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах. – Киев, 2012. – 44 с. – (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 2012.2).
3. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**, № 4. – P. 569 – 587.
4. *De Vore R., Temlyakov V.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
5. *Temlyakov V. N.* Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system // E. J. Appoxim. – 1998. – **4**, № 1. – P. 87 – 106.
6. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
7. *Temlyakov V. N.* The best m-term approximation and greedy algorithms // Adv. Comput. Math. – 1998. – **8**, № 3. – P. 249 – 265.
8. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Мат. сб. – 1964. – **63**, № 3. – С 357 – 391.

9. *Голубов Б. И.* Наилучшие приближения функций в метрике L_q полиномами Хаара и Уолша // Мат. сб. – 1972. – **87**, № 2. – С. 254 – 274.
10. *Haar A.* Zur Theorie der ortohogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. – 1910. – **69**. – P. 331 – 371.
11. *Chauder I. S.* Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems // Math. Z. – 1928. – **28**. – S. 317 – 320.
12. *Андрианов А. В.* Приближение функций из классов MH_q^r полиномами Хаара // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 3. – С. 323 – 335.
13. *Стасюк С. А.* Приближение функций многих переменных классов H_p^Ω полиномами по системе Хаара // Anal. Math. – 2009. – **35**, № 4. – P. 257 – 271.
14. *Стасюк С. А.* Наилучшее m-членное приближение классов $B^r_{\infty,\theta}$ функций многих переменных полиномами по системе Хаара // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 4. – С. 549 – 555.
15. *Стасюк С. А.* Приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара // Укр. мат. вісн. – 2015. – **12**, № 1. – С. 97 – 109.
16. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
17. *De Vore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – New York: Springer-Verlag, 1994. – 449 p.
18. *Ciesielski Z.* Constructive function theory and spline systems // Stud. Math. – 1975. – **53**, № 2. – P. 277 – 302.

Получено 10.07.15