УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА С ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n-ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ (ψ, β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В L_2. I

For the generalized moduli of continuity, including the ordinary moduli of continuity and various their modifications, we establish the exact constants for Jackson-type inequalities in the classes of 2π-periodic functions in the space L_2 with (ψ, β)-derivatives, introduced by Stepanets. These results take into account the classification of (ψ, β)-derivatives and enable us to consider the major part of Jackson-type inequalities obtained earlier in the classes of differentiable functions L_2^r, $r \in \mathbb{N}$, from the common point of view.

На класах 2π-періодичних функцій, які мають уведені О. І. Степанцем (ψ, β)-похідні, у просторі L_2 отримано точні константи у нерівностях типу Джексона для узагальнених модулів неперервності, які включають в себе як звичайні модулі неперервності, так і різні їх модифікації. Дані результати, з огляду на класифікацію (ψ, β)-похідних, дозволяють з єдиних позицій розглядати більшість отриманих раніше нерівностей типу Джексона на класах диференційовних функцій L_2^r, $r \in \mathbb{N}$.

1. Введение. В 1911 г. Д. Джексон доказал [1], что для произвольной непрерывной 2π-периодической функции $f \in C := C([0, 2\pi])$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_C \leq k\omega_1 \left(f, \frac{1}{n} \right)_C, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

где k — константа, $E_{n-1}(f)_C$ — наилучшее приближение функции f в метрике пространства C подпространством $\mathfrak{N}_{2n-1}^{\top}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$, а $\omega_1(f,t)_C$ — модуль непрерывности функции f, определяемый формулой

$$\omega_1(f,t)_C := \sup \left\{ \|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_C : |\tau| \leq t \right\}, \qquad \|f\|_C := \max\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 2\pi\}.$$

С помощью предложенного линейного положительного метода приближения Д. Джексон показал, что в неравенстве (1.1) константа $k = 6$. Вторым неравенством Д. Джексона принято называть неравенство вида

$$E_{n-1}(f)_C \leq \widetilde{k}\omega_1 \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right)_C, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

в котором, как было показано в [2], $\widetilde{k} \leq k_r n^{-r}$, где константа k_r не зависит от f и n, $k_r \leq 6^r$. В соотношении (1.2) f принадлежит классу $C^r := C^r([0, 2\pi])$, состоящему из 2π-периодических r раз непрерывно дифференцируемых функций.

Отметим, что С. Б. Стечкин в работе [3] получил неравенство (1.1) для модулей непрерывности m-го порядка, где $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Поэтому указанный случай называют еще неравенством типа Джексона – Стечкина.

В последующем неравенства (1.1), (1.2) были перенесены на пространства $L_p := L_p([0, 2\pi])$, $1 \leq p < \infty$, состоящие из 2π-периодических измеримых суммируемых в p-й степени функций (см., например, монографию [4] и приведенную в ней библиографию). Благодаря усилиям многих математиков неравенства типа Д. Джексона были распространены на пространства функций многих переменных, заданных как на классических многообразиях, так и на многообразиях общей природы.

Много усилий было затрачено и на получение точной постоянной в неравенстве (1.1). Первое точное неравенство Д. Джексона в пространстве C было установлено Н. П. Корнейчуком [5] в 1962 г. Следующий шаг в 1967 г. сделал Н. И. Черных [6], получивший неравенство Д. Джексона с точной константой в пространстве L_2. Распространение указанного результата на многомерный случай было осуществлено В. А. Юдиным в работе [7]. Продолжая исследования [6], Н. И. Черных [8] доказал неравенство Д. Джексона с точной константой в пространстве L_p, $1 \leq p < 2$. Интерес к получению точных констант в неравенствах Д. Джексона объясняется тем, что каждый новый случай обычно связан с появлением нового подхода, в основе которого лежит некоторый принципиально новый факт, например новое точное неравенство, часто имеющее простой геометрический смысл. Следует отметить, что указанной тематике посвящен ряд работ, среди которых, в первую очередь, отметим результаты В. И. Бердышева, Л. В. Тайкова, А. А. Лигуна, В. В. Арестова, А. Г. Бабенко, В. И. Иванова, О. И. Смирнова и других (см., например, [10 – 27]). Указанный перечень работ не претендует на полноту, поскольку главной целью данной статьи является получение точных неравенств типа Д. Джексона для обобщенных модулей непрерывности в пространстве L_2 на классах 2π-периодических функций одной переменной, заданных обобщенными операторами дифференцирования. Также уделено внимание вычислению точных значений некоторых n-поперечников классов функций, определенных исходя из рассматриваемых характеристик гладкости и обобщенных операторов дифференцирования. Для характеристик гладкости, имеющих набор определенных свойств, в конце второй части статьи приведено несколько примеров применения изложенного подхода к получению неравенств типа Д. Джексона в пространстве L_2.

2. Некоторые предварительные сведения. ***2.1.*** Приведем необходимые понятия и определения, связанные с рассматриваемой тематикой. Под L_2 понимаем пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx \right),$$

где

$$a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos jx dx, \qquad b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin jx dx, \qquad j \in \mathbb{Z}_+,$$

— коэффициенты Фурье, величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathfrak{N}_{2n-1}^{\top}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathfrak{N}_{2n-1}^{\top}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Здесь $S_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $\rho_j^2(f) := a_j^2(f) + b_j^2(f)$. Отметим, что часто представляется удобным записывать ряд Фурье в так называемой комплексной форме

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) e^{ijx},$$

полагая

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

При этом

$$c_j(f) = \frac{a_j(f) - ib_j(f)}{2}, \qquad c_{-j}(f) = \frac{a_j(f) + ib_j(f)}{2}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Модуль непрерывности k-го порядка для $f \in L_2$ обозначим так:

$$\omega_k(f, t) := \sup\left\{\|\Delta_h^k(f)\| : 0 < h \le t\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$\Delta_h^k(f, x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh)$$

— конечная разность k-го порядка функции f в точке x с шагом h. Отметим, что

$$\omega_k(f, t) = \sup\left\{\left(2^k \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)(1 - \cos jh)^k\right)^{1/2} : 0 < h \le t\right\}. \tag{2.2}$$

В ряде работ (см., например, [25 – 28]) в качестве характеристики гладкости функции $f \in L_2$ использовались величины, содержащие в качестве оператора обобщенного сдвига функцию Стеклова

$$S_h(f, x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, \qquad h > 0.$$

Обобщенные конечные разности первого и высших порядков в данном случае определяются следующим образом:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f, x) := S_h(f, x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f, x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f, x) := \widetilde{\Delta}_h^1\left(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f), x\right) = (S_h - \mathbb{I})^k(f, x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} S_{h,j}(f,x), \qquad k = 2,3,\dots,$$

где $S_{h,j}(f) := S_h(S_{h,j-1}(f)),\ j \in \mathbb{N},\ S_{h,0}(f) := f,\ \mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве L_2. Тогда под обобщенным модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$ понимаем величину

$$\widetilde{\omega}_k(f,t) := \sup\left\{\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\| : 0 < h \le t\right\}. \tag{2.3}$$

Согласно работе [25] характеристику гладкости (2.3) можно представить в виде

$$\widetilde{\omega}_k(f,t) = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)(1 - \operatorname{sinc}(jh))^{2k}\right) : 0 < h \le t\right\}, \tag{2.4}$$

где $\operatorname{sinc} x := \{\sin(x)/x$, если $x \ne 0$, и 1, если $x = 0\}$.

В работах С. Н. Васильева [30], а также А. Н. Козко и А. В. Рождественского [31] было рассмотрено следующее обобщение модуля непрерывности k-го порядка (2.1), которое можно рассматривать как дальнейшее развитие идей Х. Шапиро и Дж. Бомана, посвященных данному вопросу (см., например, [32–34]). Пусть Φ — класс всех непрерывных 2π-периодических неотрицательных ненулевых функций φ таких, что $\varphi(0) = 0$. Тогда под модулем непрерывности ω_φ, где $\varphi \in \Phi$, понимаем величину

$$\omega_\varphi(f,t) := \sup\left\{\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j(f)|^2 \varphi(jh)\right)^{1/2} : 0 < h \le t\right\}, \qquad 0 < t \le 2\pi. \tag{2.5}$$

Учитывая равенства $|c_j(f)| = |c_{-j}(f)| = \rho_j(f)/2,\ j \in \mathbb{N}$, и полагая $\gamma(x) := (\varphi(x) + \varphi(-x))/4$ (γ — четная функция), записываем формулу (2.5) в виде

$$\omega_\gamma(f,t) := \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)\gamma(jh)\right)^{1/2} : 0 < h \le t\right\}. \tag{2.6}$$

Обозначим через G класс всех четных непрерывных ограниченных на всей вещественной оси неотрицательных функций γ, почти всюду отличных от нуля и таких, что $\gamma(0) = 0$. Тогда характеристику гладкости, определенную формулой (2.6), где $\gamma \in G$, можно, в частности, рассматривать как обобщение приведенных выше модулей непрерывности видов (2.1) и (2.3), поскольку, например, при $\gamma_{1,k}(x) := 2^k(1 - \cos x)^k$ получаем величину (2.2), а при $\gamma_{2,k}(x) := (1 - \operatorname{sinc} x)^{2k}$ — соответственно величину (2.4).

2.2. Классификация периодических функций на основе преобразований их рядов Фурье с помощью мультипликаторов и сдвигов по аргументу охватывает широкий спектр функций, включая функции с расходящимися рядами Фурье, гладкие, бесконечно дифференцируемые, в том числе аналитические и целые функции. Образующиеся в ходе этого классы при фиксированных определяющих их параметрах переходят в известные классы, которые вводятся операциями дифференцирования, тригонометрического сопряжения и сверток с суммируемыми или обобщенными функциями. Идея излагаемой классификации функций возникла под влиянием исследований Б. Надя, С. М. Никольского, В. К. Дзядыка, Н. П. Корнейчука, С. Б. Стечкина и других и была реализована А. И. Степанцом (см., например, [35, 36]). Приведем основные элементы указанной теории, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть f — суммируемая 2π-периодическая функция и $S(f)$ — ее ряд Фурье, т. е.

$$S(f,x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(f)\cos jx + b_j(f)\sin jx)\,.$$

Пусть, далее, ψ — сужение на множество $\mathbb{N}$ произвольной вещественной функции, определенной на множестве $[1,\infty)$ и такой, что $\psi(j) \neq 0$, где $j \in \mathbb{N}$, а β — фиксированное действительное число, $\beta \in (-\infty, \infty)$. Если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(j)} (a_j(f)\cos(jx+\beta\pi/2) + b_j(f)\sin(jx+\beta\pi/2))$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой 2π-периодической функции, то, следуя А. И. Степанцу [35], эту функцию назовем (ψ,β)-производной функции f и обозначим символом f^{ψ}_{β}. Множество 2π-периодических суммируемых функций f, имеющих (ψ,β)-производные, обозначим через L^{ψ}_{β}. При этом коэффициенты Фурье функций f и f^{ψ}_{β} связаны соотношениями [35]

$$\begin{aligned} a_j(f) &= \psi(j)\left(a_j(f^{\psi}_{\beta})\cos\frac{\beta\pi}{2} - b_j(f^{\psi}_{\beta})\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \\ b_j(f) &= \psi(j)\left(a_j(f^{\psi}_{\beta})\sin\frac{\beta\pi}{2} + b_j(f^{\psi}_{\beta})\cos\frac{\beta\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отметим, что в случае $\psi(j) := j^{-r}$, где $r > 0$, а $\beta \in \mathbb{R}$, получаем (r,β)-производную в смысле Вейля – Надя, т. е. $f^{\psi}_{\beta} = f^{(r)}_{\beta}$. Если, кроме того, $\beta = r$, где $r \in \mathbb{N}$, то указанная производная является обычной производной r-го порядка функции f. Подмножество непрерывных функций $f \in L^{\psi}_{\beta}$ обозначают через C^{ψ}_{β}. Для $f \in L^{\psi}_{\beta}$ имеет место соотношение

$$S(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(j)}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\cos(jt-\beta\pi/2)dt. \tag{2.8}$$

В случае, когда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi(j)\cos(jx-\beta\pi/2) \tag{2.9}$$

является рядом Фурье некоторой функции $D_{\psi,\beta} \in L_1$, для элементов множества L^{ψ}_{β} почти в каждой точке x справедливо представление

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t) D_{\psi,\beta}(t)dt, \tag{2.10}$$

где φ почти всюду совпадает с f^{ψ}_{β}, т. е. элементы множества L^{ψ}_{β} отличаются лишь свободным членом от функций, представимых сверткой. Обозначим через F_1 множество функций ψ, монотонно стремящихся к нулю при $j \to \infty$, $j \in \mathbb{N}$, и удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi(j)/j < \infty.$$

Отметим, что для любой функции $\psi \in F_1$ и произвольного числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд (2.9) является рядом Фурье некоторой функции $D_{\psi,\beta}$ из L_1. Если $\psi(j) = j^{-r}$, где $r > 0$, и $\beta = r$ или $\beta = r + 1$, то функции $D_{\psi,\beta} := D_{\beta}^{r}$ называют иногда ядрами Бернулли.

Пусть функция ψ выбрана так, что для произвольного $r > 0$

$$\lim_{j\to\infty} j^r \psi(j) = 0, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Тогда ряд (2.8) можно дифференцировать любое число раз и в результате будем получать равномерно сходящиеся ряды. Это означает, что при выполнении условия (2.11) мы имеем дело с бесконечно дифференцируемой функцией (2.10). Примером функции, для которой (2.11) имеет место, может служить $\psi(j) = \exp(-\sigma j^{\lambda})$ при любых конечных положительных σ и λ.

Если функция $\psi(j)$ удовлетворяет условию [36]

$$|\psi(j)| \le K \exp(-\sigma j), \tag{2.12}$$

где $j \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0, \infty)$, K — положительная константа, то формула (2.10) определяет аналитическую функцию f, которая может быть регулярно продолжена в полосу $|y| < \sigma$. Примером функции ψ, удовлетворяющей условию (2.12), является $\psi(j) = \exp(-\sigma j)$ при $\sigma > 0$.

Если же функция ψ выбрана так, что

$$\varliminf_{j\to\infty} \ln |\psi(j)|^{-1/j} = \infty, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{2.13}$$

то формула (2.10) определяет целую функцию f. Условие (2.13) выполняется, например, для $\psi(j) = \exp(-\sigma j^{\lambda})$, где $\sigma > 0$ и $\lambda > 1$ — произвольные конечные числа.

Следует также отметить, что вопросам изучения и классификации бесконечно дифференцируемых периодических функций посвящены работы А. И. Степанца, А. С. Сердюка и А. Л. Шидлича [37, 38].

2.3. Если $f \in L_{\beta}^{\psi}$ и при этом $f_{\beta}^{\psi} \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — некоторое подмножество суммируемых 2π-периодических функций, то говорят, что f принадлежит классу $L_{\beta}^{\psi}\mathcal{M}$. В дальнейшем под $\mathcal{M}$ будем понимать пространство L_2 и вместо $L_{\beta}^{\psi}L_2$ будем записывать $L_{\beta,2}^{\psi}$.

Сформулируем для одномерного случая в удобном для нас виде один результат А. С. Романюка [39]:

если функция ψ натурального аргумента j такова, что величины

$$\sup \{|\psi(j)| : j \in \mathbb{N}\} \tag{2.14}$$

и

$$\sup \left\{ \sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |\psi(j+1) - \psi(j)| : \nu \in \mathbb{Z}_+ \right\} \tag{2.15}$$

конечны, то для любого числа $\beta \in \mathbb{R}$ справедливо включение $L_{\beta,2}^{\psi} \subset L_2$.

2.4. Согласно [36] (глава III, § 12, п. 12.1) символом $\mathfrak{M}$ обозначим класс непрерывных на множестве $[1,\infty)$ положительных и выпуклых вниз функций, стремящихся к 0 при $x\to\infty$, т. е.

$$\mathfrak{M} := \Big\{\psi \in C([1,\infty))\colon \psi(x)>0 \quad \forall x\in[1,\infty),$$

$$\psi(x_1)-2\psi((x_1+x_2)/2)+\psi(x_2)\geq 0 \quad \forall x_1,x_2\in[1,\infty), \quad \lim_{x\to\infty}\psi(x)=0\Big\}.$$

Всюду далее будем полагать, что последовательности $\{\psi(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, участвующие в определении (ψ,β)-производных, являются сужениями на множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ значений функций ψ из $\mathfrak{M}$. Несложно проверить, что в данном случае величины (2.14), (2.15) будут конечными и $L^{\psi}_{\beta,2}\subset L_2$.

Поскольку класс $\mathfrak{M}$ весьма неоднороден по скорости стремления к нулю его элементов при $x\to\infty$, возникает необходимость разбиения $\mathfrak{M}$ на подмножества, объединяющие функции, имеющие, в определенном смысле, одинаковый характер такого стремления. А. И. Степанец предложил использовать для этой цели пару функций $\eta(x)=\eta(\psi,x)$ и $\mu(x)=\mu(\psi,x)$. Через $\eta(x)=\eta(\psi,x)$ обозначим функцию, связанную с $\psi\in\mathfrak{M}$ равенством

$$\psi(\eta(x))=\frac{1}{2}\psi(x), \tag{2.16}$$

где $1\leq x<\infty$. Вследствие строгой монотонности функции ψ функция η определяется однозначно для всех $x\in[1,\infty)$ на основании формулы (2.16), т. е. $\eta(x)=\eta(\psi,x)=\psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\psi(x)\right)$. Функция μ определяется равенством $\mu(x)=\mu(\psi,x)=x/(\eta(x)-x)$. Из (2.16) следует, что $\eta(x)-x$ является длиной отрезка $[x,\eta(x)]$, на котором значение функции ψ уменьшается в два раза. Поэтому функцию μ называют *модулем полураспада* функции ψ. Некоторые примеры функций ψ и соответствующих им модулей полураспада μ приведены в монографии [36] (глава III, § 12, п. 12.1), где отмечается, что величина μ может быть ограничена сверху и снизу некоторыми положительными числами, или может стремиться к нулю при $x\to\infty$, или может быть неограниченной сверху. Исходя из этого в классе $\mathfrak{M}$ были выделены такие подмножества:

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi\in\mathfrak{M}\colon 0<\mu(\psi,x)\leq K_1 \quad \forall x\in[1,\infty)\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty := \{\psi\in\mathfrak{M}\colon 0<K_2\leq\mu(\psi,x)<\infty \quad \forall x\in[1,\infty)\},$$

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi\in\mathfrak{M}\colon 0<K_3\leq\mu(\psi,x)\leq K_4 \quad \forall\, x\in[1,\infty)\},$$

где K_i, $i=\overline{1,4}$, — некоторые положительные константы, не зависящие от x. Через $\mathfrak{M}_0^+$ обозначают подмножество функций $\psi\in\mathfrak{M}_0$, для которых величина $\mu(\psi,x)$ при $x\to\infty$ монотонно стремится к нулю, а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — подмножество функций $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, у которых $\mu(\psi,x)$ монотонно и неограниченно возрастает при $x\to\infty$.

Отметим, что функции $\psi_{1,r}(x):=x^{-r}$, $r\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, $\psi_{2,\varepsilon}(x):=\ln^{-\varepsilon}(x+e)$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, и $\psi_{3,\sigma,\lambda}(x):=\exp(-\sigma x^{\lambda})$, $\sigma,\lambda\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, являются примерами элементов из множеств $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0^+$ и $\mathfrak{M}_\infty^+$ соответственно. Здесь $\mathbb{R}_+:=\{x\colon 0\leq x<\infty\}$.

Полученное в [36] (глава III, § 12.2, п. 12.2) утверждение, сформулированное ниже в виде теоремы А, позволяет отнести функцию $\psi\in\mathfrak{M}$ к тому или иному из указанных выше подмножеств на основании исследования поведения специальным образом определенной функции a.

2.5. **Теорема А.** *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$ *и*

$$a(x) = a(\psi, x) = \frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|}, \qquad \psi'(x) := \psi'(x+0). \tag{2.17}$$

Функция ψ *принадлежит подмножеству*:

$\mathfrak{M}_0$ *тогда и только тогда, когда* $0 < K_1 \leq a(x) \quad \forall x \in [1, \infty)$;

$\mathfrak{M}_\infty$ *тогда и только тогда, когда* $a(x) \leq K_2 \quad \forall x \in [1, \infty)$;

$\mathfrak{M}_C$ *тогда и только тогда, когда* $0 < K_3 \leq a(x) \leq K_4 \quad \forall x \in [1, \infty)$,

где K_i, $i = \overline{1, 4}$, *— некоторые положительные константы, не зависящие от* x.

Если функция a *не убывает и* $\lim_{x\to\infty} a(x) = \infty$, *то* $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$.

Если же a *не возрастает и* $\lim_{x\to\infty} a(x) = 0$, *то* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Используя формулу (2.17), для функций $\psi_{1,r}$, $\psi_{2,\varepsilon}$ и $\psi_{3,\sigma,\lambda}$ имеем

$$a(\psi_{1,r}; x) = \frac{1}{r},$$
$$a(\psi_{2,\varepsilon}; x) = \frac{1}{\varepsilon}(x+e)\ln(x+e), \tag{2.18}$$
$$a(\psi_{3,\sigma,\lambda}; x) = \frac{1}{\sigma\lambda x^\lambda},$$

где $1 \leq x < \infty$. Приведем пример еще одной функции, принадлежащей подмножеству $\mathfrak{M}_C$:

$$\psi_{4,r,\varepsilon}(x) := x^{-r}\ln^\varepsilon(x+e), \qquad 0 < \varepsilon < r < \infty,$$

и запишем для нее величину

$$a(\psi_{4,r,\varepsilon}; x) = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r(r(1+e/x)\ln(x+e) - \varepsilon)}, \qquad 1 \leq x < \infty. \tag{2.19}$$

3. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и обобщенными модулями непрерывности. ***3.1.*** В силу четности функций $\gamma \in G$, участвующих в определении (2.6) обобщенных модулей непрерывности ω_γ, достаточно рассмотреть их поведение на множестве $\mathbb{R}_+$. Пусть

$$\gamma(t_*) := \sup\{\gamma(x) \colon x \in \mathbb{R}_+\}, \qquad t_* \in (0, \infty). \tag{3.1}$$

Очевидно, что значение t_* зависит от функции γ. Если верхняя грань (3.1) достигается в конечном или бесконечном множестве точек, то в качестве t_* берем точку, имеющую наименьшую абсциссу.

Полагаем, что функция $\gamma \in G$ удовлетворяет свойству А, если на отрезке $[0, t_*]$ она монотонно возрастает. Отметим, что данному свойству удовлетворяют рассмотренные в пункте 2 функции $\gamma := \gamma_{1,k}$, где $t_* = \pi$, и $\gamma := \gamma_{2,k}$, где t_* — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$ $(4,49 < t_* < 4,51)$ [26]. Для произвольной функции $\gamma \in G$, имеющей свойство А, полагаем

$$\gamma_*(x) := \{\gamma(x), \text{ если } 0 \leq x \leq t_*, \text{ и } \gamma(t_*), \text{ если } t_* \leq x < \infty\}. \tag{3.2}$$

Пусть

$$\gamma(\widetilde{t}_*) := \inf\{\gamma(x) \colon t_* < x < \infty\}, \tag{3.3}$$

где величина t_* определяется формулой (3.1) и $\widetilde{t}_* \in (t_*, \infty)$. Если нижняя грань (3.3) достигается в конечном или бесконечном множестве точек, то в качестве $\widetilde{t}_*$ фиксируем точку с наименьшей абсциссой в интервале (t_*, ∞).

Будем говорить, что функция $\gamma \in G$ удовлетворяет свойству B, если для нее $\gamma(\widetilde{t}_*) > 0$. Этому свойству удовлетворяет, например, функция $\gamma := \gamma_{2,k}$, для которой $\widetilde{t}_*$ — первый по величине положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$, больший t_*.

3.2. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основных результатов данного пункта, напомним, что вопросы обобщения некоторых неравенств типа Джексона в пространстве L_2 в смысле использования (ψ,β)-производных f^{ψ}_{β} ранее рассматривались в работах В. Г. Доронина и Л. М. Божухи [40], а также А. С. Сердюка [41] для обычных модулей непрерывности k-порядка (2.1).

Теорема 1. *Пусть функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и функция γ, принадлежащая классу G, удовлетворяет свойствам A и B, а точка $\bar{t} \in (0, t_*)$ определяется следующим образом*:

$$\gamma(\bar{t}) = \gamma(\widetilde{t}_*). \tag{3.4}$$

Тогда для любого $\tau \in (0, \bar{t}]$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\,\omega_\gamma\left(f^{\psi}_{\beta}, \tau/n\right)} = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tau)}}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная тождественно не равная константе функция из класса $L^{\psi}_{\beta,2}$. Из формул (2.7) для нее получаем

$$\begin{aligned} a_j(f^{\psi}_{\beta}) &= \frac{1}{\psi(j)}\left(a_j(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_j(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \\ b_j(f^{\psi}_{\beta}) &= \frac{1}{\psi(j)}\left(-a_j(f)\sin\frac{\beta\pi}{2} + b_j(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $j \in \mathbb{N}$. Поскольку функция $\gamma \in G$ удовлетворяет свойствам A и B, в силу соотношения (3.4) для любого $t \in (0, \bar{t}/n]$ имеем

$$\gamma(jt) \geq \gamma(nt), \tag{3.7}$$

где j — произвольное натуральное число, большее или равное n. Отметим также, что из (3.6) следует равенство

$$\rho_j(f^{\psi}_{\beta}) = \frac{1}{\psi(j)}\rho_j(f), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Учитывая формулы (2.6) и (3.7), (3.8), получаем

$$\omega^2_\gamma(f^{\psi}_{\beta}, t) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \rho^2_j(f^{\psi}_{\beta})\gamma(jt) \geq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{\psi^2(j)}\rho^2_j(f)\gamma(jt) \geq \frac{\gamma(nt)}{\psi^2(n)}E^2_{n-1}(f), \qquad 0 < t \leq \bar{t}/n.$$

Отсюда, полагая $\tau := nt$, где $0 < \tau \leq \bar{t}$, имеем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\,\omega_\gamma\left(f^{\psi}_{\beta},\tau/n\right)} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tau)}}. \tag{3.9}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $\widetilde{f}(x) := \sin nx$, принадлежащую классу $L^{\psi}_{\beta,2}$. Для нее $\widetilde{f}^{\psi}_{\beta}(x) = \dfrac{1}{\psi(n)}\sin nx,\ E_{n-1}(\widetilde{f}) = 1$ и, согласно формулам (2.6) и (3.8),

$$\omega_\gamma(\widetilde{f}^{\psi}_{\beta},\tau/n) = \frac{1}{\psi(n)}\sup\{\sqrt{\gamma(nh)}\colon 0<h\le\tau/n\} = \frac{1}{\psi(n)}\sqrt{\gamma(\tau)}, \qquad 0<\tau\le t_*.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\,\omega_\gamma\left(f^{\psi}_{\beta},\tau/n\right)} \ge \frac{E_{n-1}(\widetilde{f})}{\psi(n)\,\omega_\gamma\left(\widetilde{f}^{\psi}_{\beta},\tau/n\right)} = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tau)}}. \tag{3.10}$$

Сопоставляя оценки сверху (3.9) и снизу (3.10), получаем требуемое равенство (3.5) при $0<\tau\le\bar{t}$.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что в случае $\psi := \psi_{1,r}$, $r=\beta\in\mathbb{N}$, и $\gamma := \gamma_{2,k}$, $k\in\mathbb{N}$, когда $\omega_{\gamma_{2,k}}\equiv\widetilde{\omega}_k$, из формулы (3.5) получаем один из результатов работы [29]:

$$\sup_{\substack{f\in L^{r}_{2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\omega}_k(f^{(r)},\tau/n)} = \frac{1}{(1-\operatorname{sinc}\tau)^k}, \qquad 0<\tau\le\bar{t}.$$

В случае, когда, например, $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$ и $\beta\in\mathbb{R}$, из (3.5) при $0<\tau\le\bar{t}$ имеем

$$\sup_{\substack{f\,\in\, L^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{\exp(\sigma n^{\lambda})E_{n-1}(f)}{\widetilde{\omega}_k(f^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}_{\beta},\tau/n)} = \frac{1}{(1-\operatorname{sinc}\tau)^k}.$$

3.3. Обозначим

$$\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau) := \frac{1}{\psi(j)}\left\{\int\limits_0^{\tau}\gamma^{p/2}(jt)\xi(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{3.11}$$

Теорема 2. *Пусть функция γ принадлежит классу G и удовлетворяет свойству A, функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $\tau\in(0,t_*/n]$, ξ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда выполняется двойное неравенство*

$$\frac{1}{\alpha_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)} \le \sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\omega^p_\gamma(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \le$$

$$\le \frac{1}{\inf\{\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\colon n\le j<\infty\}}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из класса $L^{\psi}_{\beta,2}$, тождественно не равная нулю. Согласно формулам (2.6) и (3.8) имеем

$$\omega_{\gamma}(f^{\psi}_{\beta},t)=\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2(f^{\psi}_{\beta})\gamma(jh)\right)^{1/2}:0<h\le t\right\}=$$

$$=\sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\psi^2(j)}\rho_j^2(f)\gamma(jh)\right)^{1/2}:0<h\le t\right\}. \tag{3.13}$$

Воспользуемся следующим вариантом неравенства Минковского, приведенным в [42] (глава 4, п. 4.3):

$$\left\{\int\limits_0^{\tau}\left(\sum_{j=n}^{\infty}|\overline{g}_j(t)|^2\right)^{p/2}dt\right\}^{1/p}\ge\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\tau}|\overline{g}_j(t)|^p dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2},\qquad 0<p\le 2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, полагая $\overline{g}_j:=g_j\xi^{1/p}$, получаем

$$\left\{\int\limits_0^{\tau}\left(\sum_{j=n}^{\infty}|g_j(t)|^2\right)^{p/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p}\ge\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\tau}|g_j(t)|^p\xi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}. \tag{3.14}$$

Используя соотношения (3.13), (3.14), имеем

$$\left\{\int\limits_0^{\tau}\omega_{\gamma}^p(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/2}\ge\left\{\int\limits_0^{\tau}\left(\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{\psi^2(j)}\rho_j^2(f)\gamma(jt)\right)^{p/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p}\ge$$

$$\ge\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\left(\frac{1}{\psi^p(j)}\int\limits_0^{\tau}\gamma^{p/2}(jt)\xi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\alpha^2_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\right\}^{1/2}\ge E_{n-1}(f)\inf\{\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\colon n\le j<\infty\}. \tag{3.15}$$

Из формулы (3.15) получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\omega_{\gamma}^p(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}}\le\frac{1}{\inf\{\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\colon n\le j<\infty\}}. \tag{3.16}$$

Для получения оценки снизу величины, содержащейся в левой части неравенства (3.16), рассмотрим функцию $\widehat{f}(x):=\cos nx$, которая принадлежит классу $L^{\psi}_{\beta,2}$. Для нее имеем

$\widehat{f}_\beta^\psi(x) = \frac{1}{\psi(n)}\cos nx,\ E_{n-1}(\widehat{f}) = 1$ и, в силу формулы (2.6), $\omega_\gamma(\widehat{f}_\beta^\psi, t) = \frac{1}{\psi(n)}\sqrt{\gamma(nt)}$ при $0 \le t \le t_*/n$. Тогда, используя соотношение (3.11), находим

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \omega_\gamma^p(f_\beta^\psi, t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \ge \frac{E_{n-1}(\widehat{f})}{\left\{\int_0^\tau \omega_\gamma^p(\widehat{f}_\beta^\psi, t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\alpha_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)}. \tag{3.17}$$

Неравенство (3.12) получаем, сопоставляя оценки сверху (3.16) и снизу (3.17).

Теорема 2 доказана.

Полагая, например, $\psi := \psi_{1,r}$, где $r = \beta \in \mathbb{N}$, и рассматривая $\gamma := \gamma_{1,k}$ при $\omega_{\gamma_{1,k}} \equiv \omega_k$, из формулы (3.12) получаем один из результатов работы М. Ш. Шабозова и Г. А. Юсупова [24]:

$$\frac{1}{\alpha_{n;\gamma_{1,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau)} \le \sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \omega_k^p(f^{(r)}, t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \le$$

$$\le \frac{1}{\inf\{\alpha_{j;\gamma_{1,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau)\colon n\le j<\infty\}}.$$

Здесь $0 < p \le 2,\ 0 < \tau \le \pi/n,\ n \in \mathbb{N}$ и

$$\alpha_{j;\gamma_{1,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau) = 2^{k/2}\left\{ j^{rp}\int\limits_0^\tau (1-\cos jt)^{kp/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{3.18}$$

Отметим, что при $p = 2$ отсюда следует основной результат работы А. А. Лигуна [12].

Пусть $\psi := \psi_{1,r}$, где $r = \beta \in \mathbb{N}$, $\gamma := \gamma_{2,k}$ при $\omega_{\gamma_{2,k}} \equiv \widetilde{\omega}_k$ и $0 < \tau \le t_*/n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из формулы (3.12) получаем один из результатов работы С. Б. Вакарчука и В. И. Забутной [28]:

$$\frac{1}{\alpha_{n;\gamma_{2,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau)} \le \sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \widetilde{\omega}_k^p(f^{(r)}, t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \le$$

$$\le \frac{1}{\inf\{\alpha_{j;\gamma_{2,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau)\colon n\le j<\infty\}}.$$

Здесь

$$\alpha_{j;\gamma_{2,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau) = \left\{ j^{rp}\int\limits_0^\tau (1-\mathrm{sinc}\,(jt))^{kp}\xi(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{3.19}$$

При $p = 2$ и $\gamma := \gamma_{1,k}$ из (3.12) следует результат работы В. Г. Доронина и Л. М. Божухи [40], который обобщает результаты аналогичного характера, полученные в [12, 24] (только случай $p = 2$) для характеристики гладкости (2.1).

4. Некоторые следствия из теоремы 2.

***4.1. Следствие* 1.** *Пусть функция γ, принадлежащая классу G, удовлетворяет свойствам A и B, $\bar{t} \in (0, t_*)$ — точка, определяемая формулой* (3.4), *функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \tau \le \bar{t}/n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, ξ — некоторая неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\omega_{\gamma}^{p}(f_{\beta}^{\psi},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\alpha_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть $0 \le y \le \overline{t},\ x,\ z \ge 1,\ \nu,\ \mu > 0$ — произвольные числа. Исходя из свойств A и B, которым удовлетворяет функция γ, а также учитывая соотношения (3.1), (3.3) и (3.4), записываем неравенство

$$x^{\nu}\gamma^{\mu}(zy) \ge \gamma^{\mu}(y), \tag{4.2}$$

которое следует из чисто геометрических соображений. Полагая $z := j/n$, где $j \ge n,\ j,n \in \mathbb{N}$, $y := nt$, где $0 < t \le \overline{t}/n,\ \nu := p,\ \mu := p/2;\ x := \psi(n)/\psi(j)$, из формулы (4.2) имеем

$$\frac{1}{\psi^{p}(j)}\,\gamma^{p/2}(jt) \ge \frac{1}{\psi^{p}(n)}\,\gamma^{p/2}(nt). \tag{4.3}$$

Умножая обе части неравенства (4.3) на функцию $\xi(t)$ и интегрируя их по переменной t в пределах от 0 до τ, получаем

$$\frac{1}{\psi^{p}(j)}\int\limits_0^{\tau}\gamma^{p/2}(jt)\xi(t)dt \ge \frac{1}{\psi^{p}(n)}\int\limits_0^{\tau}\gamma^{p/2}(nt)\xi(t)dt,$$

т. е.

$$\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau) \ge \alpha_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau), \qquad j\in\mathbb{N}, \quad j \ge n, \quad 0<\tau\le\overline{t}/n.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\inf\{\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\colon n \le j < \infty\} = \alpha_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)$, в силу формулы (3.12) имеем равенство (4.1), что и завершает доказательство следствия 1.

Отметим, что при $\gamma := \gamma_{2,k},\ \psi := \psi_{1,r}$, где $r = \beta \in \mathbb{N},\ 0 < \tau \le \overline{t}/n,\ 0 < p \le 2$, из формулы (4.1) следует один из результатов работы [28]:

$$\sup_{\substack{f\in L^{r}_{2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\widetilde{\omega}_{k}^{p}(f^{(r)},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\alpha_{n,\gamma_{2,k},\psi_{1,r},p}(\xi,\tau)},$$

где величина $\alpha_{n;\gamma_{2,k};\psi_{1,r};p}(\xi,\tau)$ определяется формулой (3.19) при $j = n$.

Также отметим, что, например, при $\xi(t) := t$ и $p := 1/k$ из последнего равенства получаем соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L^{r}_{2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^{r-2k}E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\pi/n} t\widetilde{\omega}_{k}^{1/k}(f^{(r)},t)dt\right\}^{k}} = \left(\frac{2}{\pi^2-4}\right)^{k},$$

приведенное ранее В. А. Абиловым и Ф. В. Абиловой в работе [25].

4.2. Следствие 2. *Пусть функция* γ, *принадлежащая классу* G, *удовлетворяет свойству A и дифференцируема почти всюду на множестве* $\mathbb{R}$, *функция* ψ *является элементом множества* $\mathfrak{M}$ *и дифференцируема на множестве* $[1,\infty)$ $(\psi'(1) := \psi'(1+0))$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \tau \le t_*/n$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — *неотрицательная и дифференцируемая почти всюду на отрезке* $[0,\tau]$ *функция* $(\xi'(0) := \xi'(0+0),\ \xi'(\tau) := \xi'(\tau-0))$, *которая не эквивалентна нулю,* $\sup\{a(\psi,x)\colon 1 \le x < \infty\} \le 2$, *где функция* $a(\psi)$ *определяется формулой* (2.17). *Если при некотором* $\widetilde{p}$, *удовлетворяющем неравенству*

$$\sup\{a(\psi,x)\colon 1 \le x < \infty\} \le \widetilde{p} \le 2, \tag{4.4}$$

и для почти всех $t \in [0, \tau]$ *и любых* $x \in [1, \infty)$ *справедливо соотношение*

$$\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi, x)} - 1\right)\xi(t) - t\xi'(t) \geq 0, \tag{4.5}$$

то для указанного $\widetilde{p}$ *имеет место равенство* (4.1).

Доказательство. Исходя из формулы (3.11), рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_{\tau,\widetilde{p}}(x) := \frac{1}{\psi^{\widetilde{p}}(x)} \int\limits_0^\tau \gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\xi(t)dt, \qquad 1 \leq x < \infty.$$

Очевидно, что

$$F_{\tau,\widetilde{p}}^{1/\widetilde{p}}(j) = \alpha_{j,\gamma,\psi,\widetilde{p}}(\xi, \tau), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Вычислим производную первого порядка функции $F_{\tau,\widetilde{p}}$:

$$F_{\tau,\widetilde{p}}'(x) = -\widetilde{p}\frac{\psi'(x)}{\psi^{\widetilde{p}+1}(x)} \int\limits_0^\tau \gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\xi(t)dt + \frac{1}{\psi^{\widetilde{p}}(x)} \int\limits_0^\tau \xi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\right)dt. \tag{4.7}$$

Поскольку почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\right) = \frac{\widetilde{p}}{2}\gamma^{\widetilde{p}/2-1}(xt)\gamma'(xt)t,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\right) = \frac{\widetilde{p}}{2}\gamma^{\widetilde{p}/2-1}(xt)\gamma'(xt)x,$$

то очевидно, что равенство

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\right) \tag{4.8}$$

имеет место также почти всюду на $\mathbb{R}$ для любых отличных от нуля t, x. Используя равенство (4.8), из формулы (4.7) имеем

$$F_{\tau,\widetilde{p}}'(x) = -\frac{\psi'(x)}{\psi^{\widetilde{p}+1}(x)} \int\limits_0^\tau \gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\xi(t)dt + \frac{1}{\psi^{\widetilde{p}}(x)} \int\limits_0^\tau \frac{t}{x}\xi(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)\right)dt.$$

Интегрируя по частям во втором интеграле последнего равенства и учитывая соотношение (2.17), получаем

$$F_{\tau,\widetilde{p}}'(x) = \frac{1}{x\psi^{\widetilde{p}}(x)}\left\{\tau\xi(\tau)\gamma^{\widetilde{p}/2}(x\tau) + \int\limits_0^\tau \left[\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi, x)} - 1\right)\xi(t) - t\xi'(t)\right]\gamma^{\widetilde{p}/2}(xt)dt\right\}. \tag{4.9}$$

Используя условия (4.4), (4.5), неотрицательность функций γ и ξ, а также то, что ψ — строго положительная функция, из формулы (4.9) имеем $F_{\tau,\widetilde{p}}'(x) \geq 0$ для любого $x \in [1, \infty)$. Следовательно, $F_{\tau,\widetilde{p}}$ является неубывающей функцией, т. е.

$$F_{\tau,\widetilde{p}}(n) = \inf\{F_{\tau,\widetilde{p}}(x) : n \leq x < \infty\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Требуемое равенство (4.1) получаем из соотношений (4.6), (4.10) и (3.12), где $p := \widetilde{p}$.

Следствие 2 доказано.

4.2.1. Согласно формулам (2.18), (2.19) имеем

$$\begin{aligned} \sup\{a(\psi_{1,r};x)\colon 1 \le x < \infty\} = 1/r, &\qquad r \in (0,\infty), \\ \sup\{a(\psi_{3,\sigma,\lambda};x)\colon 1 \le x < \infty\} = 1/(\sigma\lambda), &\qquad \sigma,\lambda \in (0,\infty), \\ \sup\{a(\psi_{4,r,\varepsilon};x)\colon 1 \le x < \infty\} = 1/(r-\varepsilon), &\qquad 0 < \varepsilon < r < \infty. \end{aligned} \tag{4.11}$$

С учетом формул (4.11) соотношения (4.4), (4.5) при $0 \le t \le \tau$, где $0 < \tau \le t_*/n$, принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} 1/r \le \widetilde{p} \le 2, \qquad 1/2 \le r < \infty, \\ (\widetilde{p}r - 1)\xi(t) - t\xi'(t) \ge 0 \end{gathered} \tag{4.12}$$

для функции $\psi_{1,r}$,

$$\begin{gathered} 1/(\sigma\lambda) \le \widetilde{p} \le 2, \qquad \sigma,\lambda \in (0,\infty) \quad \text{и} \quad 1/2 \le \sigma\lambda, \\ (\widetilde{p}\sigma\lambda - 1)\xi(t) - t\xi'(t) \ge 0 \end{gathered} \tag{4.13}$$

для функции $\psi_{3,\sigma,\lambda}$ и

$$\begin{gathered} 1/(r-\varepsilon) \le \widetilde{p} \le 2, \qquad 0 < \varepsilon < r < \infty \quad \text{и} \quad 1/2 \le r-\varepsilon, \\ (\widetilde{p}(r-\varepsilon) - 1)\xi(t) - t\xi'(t) \ge 0 \end{gathered} \tag{4.14}$$

для функции $\psi_{4,r,\varepsilon}$.

Отметим, что формулы (4.12) – (4.14) следует понимать таким образом: если при некотором $\widetilde{p}$, удовлетворяющем двойному неравенству, имеет место второе неравенство для почти всех $t \in [0,\tau]$, то для указанного $\widetilde{p}$ справедлива формула (4.1). Отсюда, в частности, следует, что в каждом конкретном случае, связанном с определенной весовой функцией ξ, двойное неравенство для $\widetilde{p}$ может быть уточнено в силу второго неравенства в каждом из соотношений (4.12) – (4.14). Если, например, $\xi(t) := t^m$, где $0 \le m < \infty$ — некоторая константа, то из соотношений (4.12) – (4.14) получаем следующие неравенства:

$$\begin{gathered} (1+m)/r \le \widetilde{p} \le 2 \quad ((1+m)/2 \le r < \infty) \quad \text{для} \quad \psi_{1,r}, \\ (1+m)/(\sigma\lambda) \le \widetilde{p} \le 2 \quad (\sigma,\lambda \in (0,\infty) \quad \text{и} \quad \sigma\lambda \ge (1+m)/2) \quad \text{для} \quad \psi_{3,\sigma,\lambda}, \\ (1+m)/(r-\varepsilon) \le \widetilde{p} \le 2 \quad (0 < \varepsilon < r < \infty \quad \text{и} \quad r-\varepsilon \ge (1+m)/2) \quad \text{для} \quad \psi_{4,r,\varepsilon}. \end{gathered}$$

Напомним, что ранее в случае $\psi := \psi_{1,r}$, где $r = \beta \in \mathbb{N}$, и $\gamma := \gamma_{1,k}$ неравенства (4.12) были получены в работе [24]. В указанном случае из формулы (4.1) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \omega_k^{\widetilde{p}}(f^{(r)},t)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{2^{k/2}\left(\int_0^\tau (1-\cos nt)^{k\widetilde{p}/2}\xi(t)dt\right)^{1/\widetilde{p}}}, \qquad 0 < \tau \le \pi/n.$$

В случае $\widetilde{p} = 2$ и $\xi \equiv 1$ отсюда следует один из результатов Л. В. Тайкова [10].

При аналогичных условиях, но при $\gamma := \gamma_{2,k}$, из (4.1) получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \widetilde{\omega}_k^{\widetilde{p}}(f^{(r)},t)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{\left(\int_0^\tau (1-\operatorname{sinc}(nt))^{k\widetilde{p}}\xi(t)dt\right)^{1/\widetilde{p}}}, \qquad 0<\tau\le t_*/n.$$

Если рассмотреть, например, случай $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$, $\beta\in\mathbb{R}$, то при выполнении неравенств (4.13) для $\gamma := \gamma_{1,k}$ из (4.1) имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{\exp(\sigma n^\lambda)E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \omega_k^{\widetilde{p}}(f_\beta^{\psi_{3,\sigma,\lambda}},t)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{2^{k/2}\left(\int_0^\tau (1-\cos nt)^{k\widetilde{p}/2}\xi(t)dt\right)^{1/\widetilde{p}}}, \quad 0<\tau\le\pi/n.$$

Для $\gamma := \gamma_{2,k}$ при тех же условиях имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{\exp(\sigma n^\lambda)E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \widetilde{\omega}_k^{\widetilde{p}}(f_\beta^{\psi_{3,\sigma,\lambda}},t)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{\left(\int_0^\tau (1-\operatorname{sinc}(nt))^{k\widetilde{p}}\xi(t)dt\right)^{1/\widetilde{p}}}, \quad 0<\tau\le t_*/n.$$

4.2.2. Рассмотрим далее весовую функцию $\xi := \widehat{\xi}(t) = \sin^q(bt/\tau)$, где $0<b\le\pi$, $0<t\le\tau$, $0<\tau\le t_*/n$, $0\le q<\infty$. Подставив ее в формулу (4.5), укажем те значения q, при которых неравенство (4.5) будет иметь место. В результате подстановки получим

$$\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\widehat{\xi}(t)-t\widehat{\xi}'(t) = \left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\sin^q\left(\frac{bt}{\tau}\right) - q\frac{bt}{\tau}\sin^{q-1}\left(\frac{bt}{\tau}\right)\cos\left(\frac{bt}{\tau}\right) =$$

$$= \frac{bt}{\tau}\sin^{q-1}\left(\frac{bt}{\tau}\right)\left\{\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{bt}{\tau}\right) - q\cos\left(\frac{bt}{\tau}\right)\right\}\ge$$

$$\ge \frac{bt}{\tau}\sin^{q-1}\left(\frac{bt}{\tau}\right)\left\{\left(\frac{\widetilde{p}}{\sup\limits_{1\le x<\infty} a(\psi,x)}-1\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{bt}{\tau}\right) - q\cos\left(\frac{bt}{\tau}\right)\right\}. \tag{4.15}$$

Поскольку, как нетрудно проверить, $\operatorname{sinc} x\ge\cos x$ при $0\le x\le\pi$, в рассматриваемом случае, в силу соотношений (4.4) и (4.15), неравенство (4.5) будет выполнено, если

$$0\le q\le \frac{\widetilde{p}}{\sup\limits_{1\le x<\infty} a(\psi,x)}-1. \tag{4.16}$$

С учетом формул (4.11)–(4.14), (4.16) получаем ограничения, которые в случае $\xi := \widehat{\xi}$ и $0<\tau\le t_*/n$, $n\in\mathbb{N}$, приводят к выполнению равенства (4.1)

для $\psi := \psi_{1,r}$:

$$\begin{gathered} 1/r\le\widetilde{p}\le 2, \qquad 1/2\le r<\infty, \\ 0\le q\le r\widetilde{p}-1, \end{gathered} \tag{4.17}$$

для $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$:

$$1/(\sigma\lambda)\le\widetilde{p}\le 2, \qquad \sigma,\lambda\in(0,\infty)\ \text{ и }\ 1/2\le\sigma\lambda,$$

$$0 \leq q \leq \widetilde{p}\,\sigma\lambda - 1$$

и для $\psi := \psi_{4,r,\varepsilon}$:

$$1/(r-\varepsilon) \leq \widetilde{p} \leq 2, \qquad 0 < \varepsilon < r < \infty \ \text{ и } \ 1/2 \leq r - \varepsilon, \\ 0 \leq q \leq \widetilde{p}(r-\varepsilon) - 1. \tag{4.18}$$

Данные соотношения следует понимать точно так же, как и формулы (4.12) – (4.14).

Отметим, что, например, при $\psi := \psi_{1,r}$, $r = \beta \in \mathbb{N}$, $\gamma := \gamma_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, и $0 < \tau \leq$ $\leq \pi/n$ неравенства (4.17) были получены в работе [24] и там же была доказана справедливость соотношения

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau \omega_k^{\widetilde{p}}(f^{(r)}, t)\sin^q(bt/\tau)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{2^{k/2}\left\{\int_0^\tau (1-\cos nt)^{k\widetilde{p}/2}\sin^q(bt/\tau)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}, \tag{4.19}$$

следующего из общей формулы (4.1).

Заменив первое неравенство в формуле (4.17) на более „сильное"

$$2/r \leq \widetilde{p} \leq 2, \qquad 1 \leq r < \infty, \tag{4.20}$$

рассмотрим для весовой функции $\widehat{\xi}$ случай $q = 1$. Полагая в формуле (4.19) $\tau := \pi/n$ и $b := \pi$, для любого $\widetilde{p}$, удовлетворяющего неравенству (4.20), имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^{r-1/\widetilde{p}} E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\pi/n} \omega_k^{\widetilde{p}}(f^{(r)}, t)\sin nt dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{(k\widetilde{p}+2)^{1/\widetilde{p}}}{2^{k+2/\widetilde{p}}}\,.$$

Из данного равенства при $\widetilde{p} = 2$, $r \in \mathbb{N}$ и $k = 1$ следует результат Н. И. Черных [6], при $\widetilde{p} = 2/k$, r, $k \in \mathbb{N}$, — результат В. В. Шалаева [18], при $\widetilde{p} = 2$ и r, $k \in \mathbb{N}$ — результат Х. Юссефа [43]. Для произвольной функции $f \in L_2^r$, тождественно не равной константе, из последнего равенства имеем неравенство Джексона

$$E_{n-1}(f) < \chi_{k,\widetilde{p}} n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, \pi/n)$$

с константой

$$\chi_{k,\widetilde{p}} := \frac{(k\widetilde{p}+2)^{1/\widetilde{p}}}{2^{k+1/\widetilde{p}}}, \tag{4.21}$$

которая принимает наименьшее значение при $\widetilde{p} = 2$, т. е.

$$E_{n-1}(f) < \frac{\sqrt{k+1}}{2^k} n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, \pi/n). \tag{4.22}$$

Напомним, что константа (4.21) при $\widetilde{p} = 2$, $k \in \mathbb{N}$ и $r = 0$ была получена С. Н. Васильевым [44] и независимо А. И. Степанцом и С. А. Сердюком [20]. Однако ранее, в работе [6], Н. И. Черных показал, что при $\widetilde{p} = 2$, $k = 1$ и $r = 0$ величина $\chi_{1,2} = 1/\sqrt{2}$ в неравенстве (4.22) является неулучшаемой для каждого $n \in \mathbb{N}$. Что же касается случая $r, k \in \mathbb{N}$, а также случая $r = 0$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, то вопрос о неулучшаемости константы $\chi_{k,2}$ остается открытым. Об этом, в частности, говорил и Н. П. Корнейчук (см., например, [45], глава 9, § 9.3, формула (9.39)), рассматривая случай $r \in \mathbb{N}$, $k = 1$ для неравенства (4.22).

Полагая, например, $\psi := \psi_{4,r,\varepsilon}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma := \gamma_{2,k}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \tau \le t_*/n$ и исходя из выполнения неравенств (4.18), записываем соотношение (4.1) в данном конкретном случае:

$$\sup_{\substack{f\in L_{\beta,2}^{\psi_{4,r,\varepsilon}}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\ln^{\varepsilon}(n+e)\left\{\int_0^{\tau}\widetilde{\omega}_k^{\widetilde{p}}(f_\beta^{\psi_{4,r,\varepsilon}},t)\sin^q(bt/\tau)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{\int_0^{\tau}(1-\mathrm{sinc}\,(nt))^{k\widetilde{p}}\sin^q(bt/\tau)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}.$$

Заменив первое неравенство в (4.18) на более „сильное”

$$2/(r-\varepsilon) \le \widetilde{p} \le 2, \qquad 0<\varepsilon<r<\infty \ \text{ и } \ 1\le r-\varepsilon<\infty, \tag{4.23}$$

можем рассмотреть случай $q = 1$ для весовой функции $\widehat{\xi}$. Полагая, например, $\gamma := \gamma_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\tau := \pi/n$, $b := \pi$, для чисел $\widetilde{p}$, удовлетворяющих соотношению (4.23), из формулы (4.1) имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_{\beta,2}^{\psi_{4,r,\varepsilon}}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^{r-1/\widetilde{p}} E_{n-1}(f)}{\ln^{\varepsilon}(n+e)\left\{\int_0^{\pi/n}\omega_k^{\widetilde{p}}(f_\beta^{\psi_{4,r,\varepsilon}},t)\sin nt dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{(k\widetilde{p}+2)^{1/\widetilde{p}}}{2^{k+2/\widetilde{p}}}\,.$$

Отсюда следует неравенство Джексона, а именно, для любой тождественно не равной константе функции $f \in L_{\beta,2}^{\psi_{4,r,\varepsilon}}$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f) < \frac{\sqrt{k+1}}{2^k}\,\frac{\ln^{\varepsilon}(n+e)}{n^r}\,\omega_k\left(f_\beta^{\psi_{4,r,\varepsilon}},\pi/n\right).$$

4.2.3. Приведем пример еще одной весовой функции $\xi := \overline{\xi}(t) = \sin\dfrac{nt}{2} + \dfrac{1}{2}\sin nt$, рассмотренной Н. И. Черных в работе [6]. Пусть $\mathcal{L}(t) := \mathrm{sinc}\,t - \cos t$ $(\mathcal{L}(t) \ge 0\ \forall t \in [0,\pi])$, $\gamma := \gamma_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. При этом $t_* = \pi$. Убедимся в том, что для любых значений $\widetilde{p}$, удовлетворяющих более „сильному”, чем (4.4), ограничению

$$2\sup\{a(\psi,x)\colon 1\le x<\infty\} \le \widetilde{p} \le 2, \tag{4.24}$$

функция $\overline{\xi}$ будет удовлетворять неравенству (4.5) для произвольных $x \in [1,\infty)$ и $t \in [0,\tau]$, где $0 < \tau \le \pi/n$. Действительно,

$$\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\overline{\xi}(t) - t\overline{\xi}'(t) = \left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right) - \frac{nt}{2}\left(\cos\frac{nt}{2}+\cos nt\right) =$$

$$= \left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\frac{nt}{2}\left(\mathrm{sinc}\,\frac{nt}{2}+\mathrm{sinc}\,nt\right) - \frac{nt}{2}\left(\cos\frac{nt}{2}+\cos nt\right) \ge$$

$$\ge \frac{nt}{2}\left(\mathcal{L}\left(\frac{nt}{2}\right)+\mathcal{L}(nt)\right) \ge 0.$$

Следовательно, для любого $\widetilde{p}$, удовлетворяющего соотношению (4.24), и произвольного $\tau \in (0,\pi/n]$ в силу (4.1) имеем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\left\{\int_0^{\tau}\omega_k^{\widetilde{p}}(f^{\psi}_{\beta},t)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k/2}\left\{\int_0^{\tau}(1-\cos nt)^{k\widetilde{p}/2}\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}. \tag{4.25}$$

В частности, отметим, что соотношение (4.25), в силу неравенства (4.24) и формул (4.11), имеет место:

для $\psi:=\psi_{1,r}$, если $2/r\le\widetilde{p}\le 2$, $1\le r<\infty$;

для $\psi:=\psi_{3,\sigma,\lambda}$, если $2/(\sigma\lambda)\le\widetilde{p}\le 2$, $\sigma,\lambda\in(0,\infty)$ и $1\le\sigma\lambda$;

для $\psi:=\psi_{4,r,\varepsilon}$, если $2/(r-\varepsilon)\le\widetilde{p}\le 2$, $0<\varepsilon<r<\infty$ и $1\le r-\varepsilon$.

4.3. Еще раз вернемся к вычислению константы в неравенстве Д. Джексона, воспользовавшись для этого соотношением (4.25).

Полагая в равенстве (4.25) $\widetilde{p}=2$, записываем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\left\{n\int_0^{\tau}\omega_k^{2}(f^{\psi}_{\beta},t)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)dt\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k/2}}\left\{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\left[\frac{2^{k+1}(1-\cos^{2j+1}(n\tau/2))}{2j+1}+\frac{1-\cos^{j+1}(n\tau)}{2(j+1)}\right]\right\}^{-1/2},\quad 0<\tau\le\pi/n. \tag{4.26}$$

Используя формулы конечных сумм с биномиальными коэффициентами (см., например, [46], глава 4, п. 4.2.2, № 50; п. 4.2.3, № 23 при $x=1$), имеем

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{2j+1}\binom{k}{j}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!};\qquad \sum_{j=0}^{[k/2]}\frac{1}{2j+1}\binom{k}{2j}=\frac{2^k}{k+1},$$

где $[a]$ — целая часть числа $a\in\mathbb{R}$. С учетом этого из (4.26) при $\tau:=\pi/n$ получаем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\left\{n\int_0^{\pi/n}\omega_k^{2}\left(f^{\psi}_{\beta},t\right)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)dt\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k+1/2}}\left\{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}+\frac{1}{2(k+1)}\right\}^{-1/2}. \tag{4.27}$$

Из соотношения (4.27) для произвольной функции $f\in L^{\psi}_{\beta,2}$, не равной тождественно константе, имеем неравенство Джексона

$$E_{n-1}(f)<\overline{\chi}_{k,2}\psi(n)\,\omega_k\left(f^{\psi}_{\beta},\frac{\pi}{n}\right),$$

где

$$\overline{\chi}_{k,2}:=\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}2^{-k}\left\{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}+\frac{1}{2(k+1)}\right\}^{-1/2}. \tag{4.28}$$

Покажем, что

$$\overline{\chi}_{k,2} < \chi_{k,2} \tag{4.29}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$, где величина $\chi_{k,2}$ определена соотношением (4.21). Учитывая указанную формулу, где $\widetilde{p} = 2$, а также соотношение (4.28), из (4.29) получаем неравенство, которое требуется доказать:

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} + \frac{1}{2(k+1)}\right\}^{-1} < k+1. \tag{4.30}$$

Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что при $k = 1$ величина $\overline{\chi}_{1,2} = 3/\sqrt{22}$ меньше, чем $\chi_{1,2} = 1/\sqrt{2}$. При $k = 2, 3, 4$ можно убедиться в справедливости более „сильного”, чем (4.30), неравенства

$$\frac{3}{2}\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} < k+1. \tag{4.31}$$

Покажем выполнение неравенства (4.31) для любого натурального $k \geq 5$, использовав метод математической индукции. Пусть соотношение (4.31) имеет место для $k = m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$. Полагая $k = m+1$ и используя неравенство (4.31), справедливое, по предположению, для $k = m$, записываем

$$\frac{3}{2}\frac{(2m+3)!!}{(2m+2)!!} = \frac{3}{2}\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}\frac{2m+3}{2m+2} < (m+1)\left(1 + \frac{1}{2m+2}\right) = m + \frac{3}{2} < m+2,$$

т. е. формула (4.31) выполнена для любых натуральных $k = 2, 3, \ldots$.

Таким образом, неравенство (4.30) имеет место для произвольного $k \in \mathbb{N}$, что означает корректность соотношения (4.29). Вопрос о точности константы $\overline{\chi}_{k,2}$, полученной в неравенстве Джексона на классе (ψ, β)-дифференцируемых функций, остается открытым, хотя, как отмечено выше, она лучше, чем константа $\chi_{k,2}$.

4.4. Пусть функция γ удовлетворяет свойству A, $\tau := b/n$, где $0 < b \leq t_*$, $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\xi}(t) := \xi(nt)$. Тогда, используя формулу (3.11), записываем

$$\alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\widetilde{\xi}, b/n) = \frac{1}{\psi(j)}\left\{\int\limits_0^{b/n} \gamma^{p/2}(jt)\widetilde{\xi}(nt)dt\right\}^{1/p} = \frac{1}{\psi\left(n\frac{j}{n}\right)}\left\{\frac{1}{n}\int\limits_0^{b} \gamma^{p/2}\left(\frac{j}{n}t\right)\widetilde{\xi}(t)dt\right\}^{1/p}.$$

Отсюда имеем

$$\inf_{n\leq j<\infty} \alpha_{j,\gamma,\psi,p}(\widetilde{\xi}, b/n) \geq \frac{1}{n^{1/p}} \inf_{1\leq x<\infty}\left\{\frac{1}{\psi^p(nx)}\int\limits_0^{b} \gamma^{p/2}(xt)\widetilde{\xi}(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{4.32}$$

Используя теорему 2 и формулу (4.32), получаем следующее утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть функция γ принадлежит классу G и удовлетворяет свойству A, функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < b \leq t_*$, ξ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, b]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда имеет место двойное неравенство*

$$\frac{1}{\{\theta_{\gamma,\psi,p}(b,\xi,1)\}^{1/p}} \leq \sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^b \omega_\gamma^p(f^\psi_\beta, t/n)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\left\{\inf\limits_{1\leq x<\infty}\theta_{\gamma,\psi,p}(b,\xi,x)\right\}^{1/p}},$$

где

$$\theta_{\gamma,\psi,p}(b,\xi,x) := \frac{1}{\psi^p(nx)}\int\limits_0^b \gamma^{p/2}(xt)\xi(t)dt. \tag{4.33}$$

Если при этом функция ξ такова, что

$$\inf_{1\le x<\infty}\theta_{\gamma,\psi,p}(b,\xi,x) = \theta_{\gamma,\psi,p}(b,\xi,1), \tag{4.34}$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^b \omega_\gamma^p(f^\psi_\beta, t/n)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\{\theta_{\gamma,\psi,p}(b,\xi,1)\}^{1/p}}. \tag{4.35}$$

Приведем один из возможных примеров выполнения равенства (4.34). Для этого полагаем $\psi := \psi_{1,r}$, где $r\in(0,\infty)$, $\beta\in\mathbb{R}$. Как отмечалось ранее, в этом случае имеем производную в смысле Вейля – Надя, т. е. $f^{\psi_{1,r}}_\beta = f^{(r)}_\beta$. Также полагаем $\xi(t) := t^{rp-1}\xi_1(t)$, где $0<p\le 2$, а ξ_1 является невозрастающей неотрицательной суммируемой на отрезке $[0,b]$ функцией, которая не эквивалентна нулю. Полагаем $\xi_2(t) := \{\xi_1(t)$, если $0\le t\le b$, и $\xi_1(b)$, если $b\le t<\infty\}$. Тогда для всех $1\le x<\infty$ в силу (4.33) получаем

$$\theta_{\gamma;\psi_{1,r};p}(b,t^{rp-1}\xi_1(t),x) = (xn)^{rp}\int\limits_0^b \gamma^{p/2}(xt)t^{rp-1}\xi_1(t)dt =$$

$$= n^{rp}\int\limits_0^{bx}\gamma^{p/2}(t)t^{rp-1}\xi_1(t/x)dt \ge n^{rp}\int\limits_0^{bx}\gamma^{p/2}(t)t^{rp-1}\xi_2(t)dt \ge$$

$$\ge n^{rp}\int\limits_0^b \gamma^{p/2}(t)t^{rp-1}\xi_1(t)dt = \theta_{\gamma;\psi_{1,r};p}(b,t^{rp-1}\xi_1(t),1),$$

т. е.

$$\inf\{\theta_{\gamma;\psi_{1,r};p}(b,t^{rp-1}\xi_1(t),x)\colon 1\le x<\infty\} = \theta_{\gamma;\psi_{1,r};p}(b,t^{rp-1}\xi_1(t),1). \tag{4.36}$$

Из соотношений (4.34) – (4.36) имеем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^b \omega_\gamma^p(f^{(r)}_\beta, t/n)t^{rp-1}\xi_1(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{\int_0^b \gamma^{p/2}(t)t^{rp-1}\xi_1(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{4.37}$$

Напомним, что в случае $r=\beta\in\mathbb{N}$, $\gamma := \gamma_{1,k}$ и $p=2$ равенство (4.37) было получено А. А. Лигуном в работе [12], а при тех же условиях и $0<p\le 2$ — М. Ш. Шабозовым и Г. А. Юсуповым в работе [24]. В случае, когда $r=\beta\in\mathbb{N}$, $\gamma := \gamma_{2,k}$ и $0<p\le 2$, оно было доказано С. Б. Вакарчуком и В. И. Забутной в работе [28].

Литература

1. *Jackson D.* Uber die Genauigkeit des Annaherung stetigen Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung: Diss. – Göttingen, 1911.
2. *Jackson D.* Some note of trigonometric interpolation // Amer. Math. Mon. – 1927. – **34**. – P. 401 – 405.
3. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219 – 242.
4. *Иванов В. И., Смирнов О. И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: Тул. гос. ун-т, 1995. – 192 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 514 – 515.
6. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
7. *Юдин В. А.* Многомерная теорема Джексона // Мат. заметки. – 1967. – **20**, № 3. – С. 439 – 444.
8. *Черных Н. И.* Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды Мат. ин-та РАН. – 1992. – **198**. – С. 232 – 241.
9. *Бердышев В. И.* О теореме Джексона в L_p // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 3 – 16.
10. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. – 1976. – **22**, № 3. – С. 433 – 438.
11. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217 – 223.
12. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.
13. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах в L_2 // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 54 – 57.
14. *ArestovV. V., Chernykh N. I.* On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approxim. and Function Spaces: Proc. Int. Conf., Gdansk, 27–31 Aug., 1979. – Warszawa: Polish Sci. Publ., 1981. – P. 25 – 43.
15. *Жук В. В.* О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, № 6. – С. 1283 – 1291.
16. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651 – 664.
17. *Иванов В. И.* О связи констант Джексона и констант Юнга в пространстве L_p // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 6. – С. 828 – 836.
18. *Шалаев В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 125 – 129.
19. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816 – 820.
20. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
21. *Вакарчук С. Б., Щитов А. Н.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1458 – 1466.
22. *Бердышева Е. Е.* Оптимальное множество модуля непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 5. – С. 666 – 674.
23. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. – 2006. – **80**, № 1. – С. 11 – 19.
24. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. – 2011. – **90**, № 5. – С. 761 – 772.
25. *Абилов В. А., Абилова Ф. В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 6. – С. 803 – 811.
26. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Точное неравенство типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. – 2009. – **86**, № 3. – С. 328 – 336.
27. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 6. – С. 1414 – 1427.

28. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 2012. – **92**, № 4. – С. 497 – 514.
29. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве L_2 и поперечниках некоторых классов функций // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1025 – 1032.
30. *Васильев В. Н.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. АН. – 2002. – **385**, № 1. – С. 11 – 14.
31. *Козко А. Н., Рождественский А. В.* О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. – 2003. – **73**, № 5. – С. 783 – 788.
32. *Shapiro H. S.* A Tauberian theorem related to approximation theory // Acta Math. – 1968. – **120**. – P. 279 – 292.
33. *Boman J., Shapiro H. S.* Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Ark. mat. – 1971. – **9**, № 1. – P. 91 – 116.
34. *Boman J.* Equivalence of generalized moduli of continuity // Ark. mat. – 1980. – **18**, № 1. – P. 73 – 100.
35. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
36. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 426 с.
37. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686 – 1708.
38. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* О связи классов (ψ, β)-дифференцируемых функций с классами Жевре // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 140 – 145.
39. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1988. – 114 с.
40. *Доронин В. Г., Божуха Л. М.* Узагальнення деяких нерівностей типу Джексона в просторі L_2 // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. мат. – 2001. – № 6. – С. 58 – 62.
41. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 229 – 247.
42. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985. – 290 p.
43. *Юссеф Х.* О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функцион. анализа в теории приближений. – Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1988. – С. 100 – 114.
44. *Васильев С. Н.* Аппроксимация функций тригонометрическими полиномами в L^2 и фрактальными функциями в C : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2002. – 17 с.
45. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
46. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев С. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.

Получено 04.05.15