УДК 517.5

**В. В. Миронюк** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПОПЕРЕЧНИКИ АНІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We establish the exact-order estimates of Kolmogorov and orthoprojective widths of anisotropic Besov classes of periodic functions of several variables in the spaces $L_q$.

Установлены точные по порядку оценки колмогоровских и ортопроекционных поперечников анизотропных классов Бесова периодических функций многих переменных в пространствах $L_q$.

Дану роботу присвячено дослідженню анізотропних класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з точки зору їх наближення у просторі $L_q$. Роль апроксимативних характеристик відіграють колмогоровський та ортопроекційний поперечники.

Робота складається із трьох пунктів. У першому та другому пунктах означено основні задіяні об'єкти (функціональні простори, відповідні їм функціональні класи та апроксимативні характеристики), а також наведено необхідні допоміжні твердження. Основні результати роботи сформульовано та доведено у третьому пункті.

**1. Функціональні простори та класи.** Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, позначає $d$-вимірний евклідів простір точок $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ з дійсними координатами і $L_p = L_p(\pi_d)$ — простір $2\pi$-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені $p$, $1 \leq p < \infty$, на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0, 2\pi)$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left( \dfrac{1}{(2\pi)^d} \displaystyle\int_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} |f(\boldsymbol{x})|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_p$ означимо кратну різницю $\Delta^l_{h,j} f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, порядку $l \in \mathbb{N}$ за змінною $x_j$ з кроком $h \in \mathbb{R}$ згідно з формулою

$$\Delta^l_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C^k_l f(\boldsymbol{x} + kh\boldsymbol{e_j}),$$

де $C^k_l$ — біноміальні коефіцієнти, $\{\boldsymbol{e_j}\}_{j=1}^d$ — стандартний векторний базис у просторі $\mathbb{R}^d$.

Базуючись на понятті кратної різниці $\Delta^l_{h,j} f$, означимо відповідний модуль неперервності $l$-го порядку функції $f \in L_p$ за змінною $x_j$ згідно з формулою

$$\omega_l(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \Delta^l_{h,j} f \right\|_p.$$

**Означення 1.** *Нехай* $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{R} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ *і* $0 < r_j < l_j$, $j = \overline{1, d}$. *Тоді нормований простір* $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, $1 \leq p$, $\theta \leq \infty$, *визначається таким чином:*

$$B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^{d} |f|_{B^{r_j}_{p,\theta,j}} < \infty \right\},$$

*де*

$$|f|_{B^{r_j}_{p,\theta,j}} = \begin{cases} \left( \int\limits_0^{+\infty} \left( \dfrac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{r_j}} \right)^{\theta} \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \dfrac{\omega_{l_j}(f, \boldsymbol{e_j}, t)_p}{t^{r_j}}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ (а також їхні аналоги в неперіодичному випадку), з дещо іншою заданою у них нормою, вперше було розглянуто О. В. Бєсовим [1]. У випадку $\theta = \infty$ вони збігаються з просторами $H^{\boldsymbol{R}}_p$, які було введено С. М. Нікольським [2]. Такі функціональні простори прийнято називати анізотропними, оскільки гладкісні властивості функцій із цих просторів, взагалі кажучи, неоднакові по кожній змінній. Якщо ж $\boldsymbol{R} = (r, \ldots, r) \in \mathbb{R}^d$ і $0 < r < l$, $l \in \mathbb{N}$, то $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ називають ізотропними просторами Нікольського – Бєсова, які далі будемо позначати через $B^r_{p,\theta}$.

Для вектора $\boldsymbol{R}$ із означених вище просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ покладемо

$$g(\boldsymbol{R}) = \left( \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j} \right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{g(\boldsymbol{R})}{\boldsymbol{R}} = \left( \frac{g(\boldsymbol{R})}{r_1}, \ldots, \frac{g(\boldsymbol{R})}{r_d} \right) = (\rho_1, \ldots, \rho_d),$$

$$2^{\boldsymbol{\rho} n} = (2^{\rho_1 n}, \ldots, 2^{\rho_d n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$[2^{\boldsymbol{\rho} n}] = \big( [2^{\rho_1 n}], \ldots, [2^{\rho_d n}] \big),$$

де запис $[a]$ означає цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$.

Під поняттям „класи $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$" будемо розуміти одиничні кулі у просторах $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, тобто $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \leq 1 \right\}$. Відповідно одиничні кулі у просторах $H^{\boldsymbol{R}}_p$ та $B^r_{p,\theta}$ позначатимемо через $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$ та $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$.

Далі запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі $C_1$ та $C_2$, які не залежать від одного істотного по контексту параметра у величинах $A$ та $B$ (наприклад, у наведеному нижче співвідношенні (1) – від функції $f$) і такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо $B \leq C_2 A$ $(B \geq C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$.

У наведених нижче міркуваннях нам буде зручно користуватись еквівалентним означенням норми функцій із просторів $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$.

Отже, нехай $V_n$, $n \in \mathbb{N}$, позначає одновимірне ядро Валле Пуссена:

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Означимо багатовимірне ядро Валле Пуссена $V_{\boldsymbol{N}}$, $\boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d$, згідно з формулою

$$V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_{N_j}(x_j), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Через $\mathbb{V}_{\boldsymbol{N}}$ позначимо оператор Валле Пуссена, який кожній функції $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, ставить у відповідність згортку цієї функції з багатовимірним ядром $V_{\boldsymbol{N}}$, тобто

$$\mathbb{V}_{\boldsymbol{N}}(f, \boldsymbol{x}) = (f * V_{\boldsymbol{N}})(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) V_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}.$$

Покладемо також

$$\sigma_0(f, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}) = \mathbb{V}_1(f, \boldsymbol{x}), \quad \sigma_s(f, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}) = \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} s}]}(f, \boldsymbol{x}) - \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}]}(f, \boldsymbol{x}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

У прийнятих позначеннях простори $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ можна означити еквівалентним чином. А саме, має місце таке твердження.

**Теорема А** [3]. *Функція $f \in L_p$ належить простору $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\left( \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})\theta} \|\sigma_s(f, \boldsymbol{R})\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty,$$

*причому*

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}} \asymp \left( \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})\theta} \|\sigma_s(f, \boldsymbol{R})\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}. \tag{1}$$

*Відповідно функція $f \in L_p$ належить простору $B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty}$, $1 \le p \le \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma_s(f, \boldsymbol{R})\|_p < \infty,$$

*причому*

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma_s(f, \boldsymbol{R})\|_p.$$

Зазначимо, що з урахуванням нерівностей

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} |\nu_s| \le \left( \sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta_2} \right)^{1/\theta_2} \le \left( \sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta_1} \right)^{1/\theta_1}, \quad 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty,$$

які виконуються для будь-якої послідовності чисел $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$ (див., наприклад, [4, с. 149]), із теореми А випливають вкладення

$$B^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta_1} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta_2} \subset B^{\boldsymbol{R}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{R}}_p, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty. \tag{2}$$

**2. Апроксимативні характеристики та допоміжні твердження.** У цьому пункті наведемо означення апроксимативних характеристик, що досліджуються у роботі, а також сформулюємо кілька допоміжних тверджень, які знадобляться при доведенні отриманих результатів.

Нехай $\mathcal{X}$ — нормований простір, $\mathcal{L}_m(\mathcal{X})$ — сукупність усіх лінійних підпросторів $\mathcal{X}$ розмірності не більшої за $m$ і $\Phi$ — центрально-симетрична підмножина в $\mathcal{X}$.

**Означення 2.** *Колмогоровським поперечником множини $\Phi$ у просторі $\mathcal{X}$ називається величина*

$$d_m(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{\mathrm{L}_m \in \mathcal{L}_m(\mathcal{X})} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in \mathrm{L}_m} \|f - u\|_{\mathcal{X}}. \tag{3}$$

Поперечник $d_m(\Phi, \mathcal{X})$ було введено у 1936 р. А. М. Колмогоровим [5]. Значення цієї величини є теоретично найкращою точністю, з якою можна наблизити множину $\Phi$ лінійними підпросторами $\mathrm{L}_m$ розмірності $m$ у метриці простору $\mathcal{X}$. Якщо існує підпростір $\mathrm{L}_m^*$, на якому досягається точна нижня межа (або принаймні її порядок), то його називають екстремальним підпростором.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^m \subset L_\infty$ — деяка ортонормована в $L_2$ система функцій і $\mathbb{F} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, — деякий функціональний клас. Для довільної функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$\langle f, u_j \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}) \overline{u_j(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}, \quad j = \overline{1, m}.$$

**Означення 3.** *Ортопроекційним поперечником функціонального класу $\mathbb{F}$ у просторі $L_q$ називається величина*

$$d_m^{\perp}(\mathbb{F}, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in \mathbb{F}} \left\| f - \sum_{j=1}^m \langle f, u_j \rangle u_j \right\|_q. \tag{4}$$

Ортопроекційний поперечник було введено у 1982 р. В. М. Темляковим [6]. Дана величина характеризує найкращі оператори Фур'є по системі $\{u_j\}_{j=1}^m$, і тому інколи її називають Фур'є-поперечником.

Зауважимо, що безпосередньо з означень величин (3) та (4) випливає співвідношення

$$d_m(\mathbb{F}, L_q) \leq d_m^{\perp}(\mathbb{F}, L_q)$$

і, зокрема, для гільбертового простору $L_2$

$$d_m(\mathbb{F}, L_2) = d_m^{\perp}(\mathbb{F}, L_2). \tag{5}$$

Паралельно з поперечниками будемо досліджувати величини $d_m^B(\mathbb{F}, L_q)$, які також були введені В. М. Темляковим [6]:

$$d_m^B(\mathbb{F}, L_q) = \inf_{G \in \mathfrak{L}_m(B)_q} \sup_{f \in \mathbb{F} \cap \mathcal{D}(G)} \|f - Gf\|_q.$$

Тут $\mathbb{F} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, — деякий функціональний клас, а $\mathfrak{L}_m(B)_q$ — множина лінійних операторів, які задовольняють такі умови:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності $m$ простору $L_q$;

б) число $B \geq 1$ і для будь-якого вектора $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ виконується нерівність

$$\|Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2 \leq B.$$

Зауважимо, що до множини $\mathfrak{L}_m(1)_q$ належать, зокрема, оператори Валле Пуссена $\mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]}$ при $m \geq \dim \mathrm{T}(2[2^{\boldsymbol{\rho}n}], d)$.

Легко бачити, що згідно з означенням величини $d_m^B(\mathbb{F}, L_q)$ та $d_m^{\perp}(\mathbb{F}, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^B(\mathbb{F}, L_q) \leq d_m^{\perp}\big(\mathbb{F}, L_q\big). \tag{6}$$

Як наслідок, оцінки знизу величин $d_m^B(\mathbb{F}, L_q)$ можуть слугувати оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}\big(\mathbb{F}, L_q\big)$.

Для вектора $\boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ розглянемо далі множини

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{N}, d) = \Big\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon |k_j| \leq N_j,\ j = \overline{1, d}\Big\}$$

і

$$\mathrm{T}(\boldsymbol{N}, d) = \left\{g \colon g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{N}, d)} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},\ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\right\},$$

де $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$. Зазначимо, що $\dim \mathrm{T}(\boldsymbol{N}, d) = \prod_{j=1}^{d} (2N_j + 1)$.

Якщо $\mathbb{F} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{\boldsymbol{N}}(\mathbb{F})_q = \sup_{f \in \mathbb{F}} \inf_{g \in \mathrm{T}(\boldsymbol{N}, d)} \|f - g\|_q.$$

Наведемо тепер кілька допоміжних тверджень, які знадобляться при доведенні отриманих результатів.

**Теорема Б** (див., наприклад, [4, с. 33]). *Для функцій $\varphi \in L_1$ і $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, має місце нерівність*

$$\|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p, \tag{7}$$

*де* $(f * \varphi)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^d} \displaystyle\int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}$ *— згортка функцій $f$ і $\varphi$.*

**Теорема В** [4, с. 159]. *Якщо $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то для довільного тригонометричного полінома $g \in T(\boldsymbol{N}, d)$ має місце нерівність*

$$\|g\|_q \leq 3^d \left(\prod_{j=1}^{d} N_j\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g\|_p. \tag{8}$$

Нерівність (8) називають нерівністю різних метрик Нікольського.

**Теорема Г** [7] (розділ 2). *Нехай $A \in \mathfrak{L}_m(B)_q$ означено згідно з співвідношенням*

$$Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{j=1}^{m} b_j^{\boldsymbol{k}} \psi_j(\boldsymbol{x}), \quad b_j^{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C},$$

*де $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — ортонормована в $L_2$ система функцій. Тоді для кожного тригонометричного полінома $g \in T\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$ має місце співвідношення*

$$\min_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}} \operatorname{Re} Ag(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \leq B\sqrt{m \dim \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)}\, \max_{\boldsymbol{k}} |\widehat{g}(\boldsymbol{k})|. \tag{9}$$

**Теорема Д** [3]. *Нехай $1 \leq p, q \leq \infty$ і $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. Тоді при $1 \leq \theta < \infty$ має місце порядкова оцінка*

$$E_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R}) - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+\right)},$$

*де $a_+ = \max\{a, 0\}$.*

**3. Основні результати.** У цьому пункті при певних співвідношеннях між параметрами встановлено точні за порядком оцінки величин $d^B_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q)$, $d^{\perp}_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q)$ та $d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q)$ (див. теореми 1 – 3).

Зауважимо, що у випадку $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$, результати, що відповідають теоремам 1 – 3, отримав В. М. Темляков [7] (розділ 2). Однак теорему 1 для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$ було доведено лише при умові $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Зауважимо також, що для ізотропних класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ порядкові оцінки (10) та (20) раніше було встановлено у роботі [8], а оцінку (21) — у роботі [9].

**Теорема 1.** *Нехай $1 \leq p, q \leq \infty$ і $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. Тоді при $1 \leq \theta \leq \infty$ має місце порядкова оцінка*

$$d^B_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) \asymp m^{-g(\boldsymbol{R}) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+}, \tag{10}$$

*де $a_+ = \max\{a, 0\}$.*

***Доведення.*** Встановимо оцінку зверху. Внаслідок вкладення (2) її достатньо встановити для класів Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p$.

За заданим числом $m \in \mathbb{N}$ підберемо натуральне число $n = n(m)$ так, щоб виконувались співвідношення $m \geq \dim \mathrm{T}(2[2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ та $m \asymp 2^n$. Розглянемо оператор Валле Пуссена $\mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}$. Як зазначалося вище, такий оператор належить до множини $\mathfrak{L}_m(1)_q$ і тому

$$d^B_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) \ll \sup_{f \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p} \|f - \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} f\|_q. \tag{11}$$

Залишилося зауважити, що для правої частини нерівності (11) має місце порядкова оцінка (див. [7], розділ 2)

$$\sup_{f \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{R}}_p} \|f - \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} f\|_q \asymp m^{-g(\boldsymbol{R}) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Внаслідок вкладення (2) її достатньо встановити для класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$. В залежності від того, яких значень набувають параметри $p$ та $q$, розглянемо два випадки.

*Випадок* 1: $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Нехай задано натуральне число $m$ і оператор $G \in \mathfrak{L}_m(B)_q$. Підберемо натуральне число $n = n(m)$ так, щоб виконувались співвідношення $4 \cdot 9^d B^2 m \leq \dim \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$ та $m \asymp 2^n$, і покладемо $A = \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} G$. Зрозуміло, що область значень оператора $A$ міститься у деякому лінійному підпросторі $\mathrm{L}_m \subset \mathrm{T}\big(2[2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$, розмірність якого дорівнює $m$. Більше того, $A \in \mathfrak{L}_m(3^d B)_2$, оскільки з урахуванням (7)

$$\|Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2 = \|V_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} * Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2 \leq 3^d \|Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2 \leq 3^d B. \tag{12}$$

Звідси робимо висновок, що існує ортонормована в $L_2$ система функцій $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ така, що

$$Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{j=1}^{m} b_j^{\boldsymbol{k}} \psi_j(\boldsymbol{x}), \quad b_j^{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}.$$

Покажемо, що необхідну оцінку знизу в (10) достатньо встановити для класу $\mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$ та означеного вище оператора $A$. Дійсно, з одного боку, згідно з означенням величини $d_m^B(\mathbb{F}, L_q)$ маємо

$$d_m^B(\mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}}, L_q) \geq d_m^B(\mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_q). \tag{13}$$

З іншого боку, якщо $f \in \mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$, то з урахуванням (7)

$$\|f - Af\|_q = \|\mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]}(f - Gf)\|_q \leq 3^d \|f - Gf\|_q. \tag{14}$$

Таким чином, беручи до уваги (13) та (14), одержуємо

$$d_m^B(\mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}}, L_q) \gg \inf_{G \in \mathfrak{L}_m(B)_q} \sup_{f \in \mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)} \|f - Af\|_q. \tag{15}$$

Для подальшої оцінки правої частини (15) побудуємо екстремальну функцію $f_1 \in \mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$ таку, що

$$\inf_{G \in \mathfrak{L}_m(B)_q} \|f_1 - Af_1\|_q \gg m^{-g(\boldsymbol{R})}.$$

Нехай $\beta_{\boldsymbol{k}} = \langle Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \rangle$. Тоді, використовуючи нерівність Гельдера для сум, отримуємо

$$\beta_{\boldsymbol{k}} = \left\langle \sum_{j=1}^{m} b_j^{\boldsymbol{k}} \psi_j(\boldsymbol{x}), e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} b_j^{\boldsymbol{k}} \langle \psi_j(\boldsymbol{x}), e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_j^{\boldsymbol{k}} \widehat{\psi}_j(\boldsymbol{k}) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |b_j^{\boldsymbol{k}}|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |\widehat{\psi}_j(\boldsymbol{k})|^2}.$$

Далі, враховуючи рівність Парсеваля та співвідношення (12), маємо

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} |\beta_{\boldsymbol{k}}|^2 \leq \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} \|Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2^2 \sum_{j=1}^{m} |\widehat{\psi}_j(\boldsymbol{k})|^2 \leq$$

$$\leq 9^d B^2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi}_j(\boldsymbol{k})|^2 = 9^d B^2 \sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|_2^2 = 9^d B^2 m. \tag{16}$$

З останнього співвідношення робимо висновок, що існує вектор $\boldsymbol{k}^0 \in \mathcal{K}\big([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d\big)$ такий, що

$$|\beta_{\boldsymbol{k}^0}| \leq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Справді, в іншому випадку отримали б

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\beta_{\boldsymbol{k}}|^2 > \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)} 1 = \frac{1}{4} \dim \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d\big) \geq 9^d B^2 m,$$

що суперечить (16).

Розглянемо тепер функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_3 2^{-ng(\boldsymbol{R})} e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}, \quad C_3 > 0,$$

і покажемо, що при деякому виборі сталої $C_3 > 0$ вона належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Оскільки

$$\sigma_s(f, \boldsymbol{R}) = f * \Big(V_{[2^{\boldsymbol{\rho}s}]} - V_{[2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}]}\Big),$$

то внаслідок ортогональності тригонометричної системи функцій $\sigma_s(f, \boldsymbol{R}) = 0$ для довільної функції $f$, „номери" гармонік якої не належать множині $\mathcal{K}(2[2^{\boldsymbol{\rho}s}], d) \setminus \mathcal{K}\big([2^{\boldsymbol{\rho}(s-1)}], d\big)$. Звідси, зокрема, $\sigma_s(f_1, \boldsymbol{R}) = 0$ при $s \geq n+1$. Але тоді, використовуючи співвідношення (1) та (7), отримуємо

$$\|f_1\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,1}} \asymp \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma_s(f_1, \boldsymbol{R})\|_p = \sum_{s=0}^{n} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma_s(f_1, \boldsymbol{R})\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} \|e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_p = \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} = C_4, \quad C_4 > 0.$$

Звідси випливає, що при деякому виборі сталої $C_3 > 0$ функція $f_1$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Оцінимо далі відхилення функції $f_1$ від значення $Af_1$ у метриці простору $L_q$. Беручи до уваги нерівність Гельдера та (17), записуємо

$$\|f_1 - Af_1\|_q \gg 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \|e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})} - Ae^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_q =$$

$$= 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \|e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})} - Ae^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_q \|e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_{q'} \geq$$

$$\geq 2^{-ng(\boldsymbol{R})} \left|\Big\langle e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})} - Ae^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}, e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\Big\rangle\right| = 2^{-ng(\boldsymbol{R})} |1 - \beta_{\boldsymbol{k}^0}| \geq$$

$$\geq 2^{-ng(\boldsymbol{R})-1} \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})}, \tag{18}$$

де $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Таким чином, використовуючи оцінки (15) та (18), отримуємо

$$d_m^B(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}, L_q) \gg \inf_{G\in\mathfrak{L}_m(B)_q} \sup_{f\in\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}\cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho}n}],d)} \|f - Af\|_q \gg$$

$$\gg \inf_{G\in\mathfrak{L}_m(B)_q} \|f_1 - Af_1\|_q \gg m^{-g(\boldsymbol{R})}.$$

*Випадок* 2: $1 \le p < q \le \infty$.

Нехай натуральні числа $m$ та $n$ пов'язані між собою так само, як і в попередньому випадку. Зрозуміло, що необхідну оцінку знизу в (10) знову достатньо встановити для класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1} \cap$ $\cap\, \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d\big)$ та означеного вище оператора $A$. У зв'язку з цим розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_5 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}\right)} K_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]}(\boldsymbol{x}), \quad C_5 > 0,$$

де

$$K_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} K_{[2^{\rho_j n}]}(x_j) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{|k_j|\le[2^{\rho_j n}]} \left(1 - \frac{|k_j|}{[2^{\rho_j n}]}\right) e^{ik_j x_j}$$

— багатовимірне ядро Фейєра. Покажемо, що при деякому виборі сталої $C_5 > 0$ функція $f_2$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Як і в попередньому випадку, $\sigma_s(f_2, \boldsymbol{R}) = 0$ при $s \ge n+1$, тому, використовуючи співвідношення (1) та (7), а також враховуючи, що (див., наприклад, [7], розділ 1)

$$\|K_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]}\|_p \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

одержуємо

$$\|f_2\|_{B^{\boldsymbol{R}}_{p,1}} \asymp \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma_s(f_2, \boldsymbol{R})\|_p = \sum_{s=0}^{n} 2^{sg(\boldsymbol{R})} \|\sigma_s(f_2, \boldsymbol{R})\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} \|K_{[2^{\boldsymbol{\rho}n}]}\|_p \asymp \sum_{s=0}^{n} 2^{(s-n)g(\boldsymbol{R})} = C_6, \quad C_6 > 0.$$

Звідси й випливає, що при деякому виборі сталої $C_5 > 0$ функція $f_2$ належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,1}$.

Далі, послідовно використовуючи нерівність Нікольського (8) та нерівність (9), отримуємо

$$\sup_{\boldsymbol{y}} \|f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - Af_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|_q \ge$$

$$\ge 2^{-\frac{n}{q}} \sup_{\boldsymbol{y}} \|f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - Af_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|_\infty \ge 2^{-\frac{n}{q}} \left(f_2(\boldsymbol{0}) - \min_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}} \mathrm{Re}\, Af_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left(\dim \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d\big) - 3^d B \sqrt{m \dim \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d)}\right) \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \dim \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho}n}], d\big) \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{R})-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Звідси, як наслідок, випливає, що знайдеться $\boldsymbol{y}^*$ таке, що

$$\|f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - Af_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_q \gg m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad (19)$$

Таким чином, використовуючи оцінки (15) та (19), одержуємо

$$d_m^B(\mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}}, L_q) \gg \inf_{G \in \mathfrak{L}_m(B)_q} \sup_{f \in \mathbb{B}_{p,1}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)} \|f - Af\|_q \geq$$

$$\geq \inf_{G \in \mathfrak{L}_m(B)_q} \|f_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^*) - Af_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^*)\|_q \gg m^{-g(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Теорему доведено.

**Теорема 2.** *Нехай* $1 \leq p, q \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1,1), (\infty, \infty)\}$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. *Тоді при* $1 \leq \theta < \infty$ *має місце порядкова оцінка*

$$d_m^{\perp}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{R}}, L_q) \asymp m^{-g(\boldsymbol{R}) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+}, \tag{20}$$

*де* $a_+ = \max\{a, 0\}$.

***Доведення.*** Необхідні оцінки зверху, з урахуванням вкладення (2), випливають із відомих оцінок ортопроекційних поперечників для класів Нікольського $\mathbb{H}_p^{\boldsymbol{R}}$ (див. [7], розділ 2). Відповідні оцінки знизу, з огляду на нерівність (6), випливають із теореми 1.

**Теорема 3.** *Якщо* $1 < q \leq \infty$ *і* $1 \leq \theta < \infty$, *то має місце порядкова оцінка*

$$d_m(\mathbb{B}_{1,\theta}^{\boldsymbol{R}}, L_q) \asymp \begin{cases} m^{-g(\boldsymbol{R}) + 1 - \frac{1}{q}} & \textit{при} \quad 1 < q \leq 2, \quad g(\boldsymbol{R}) > 1 - \dfrac{1}{q}, \\ m^{-g(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{2}} & \textit{при} \quad 2 < q \leq \infty, \quad g(\boldsymbol{R}) > 1. \end{cases} \tag{21}$$

***Доведення.*** Необхідні оцінки зверху, з урахуванням вкладення (2), випливають із відомих оцінок колмогоровських поперечників для класів Нікольського $\mathbb{H}_p^{\boldsymbol{R}}$ (див. [7], розділ 2).

Для доведення оцінок знизу, в залежності від того, яких значень набуває параметр $q$, розглянемо три випадки.

*Випадок* 1: $q = 2$.

Внаслідок (5) необхідна оцінка знизу випливає із теореми 2. Більше того, беручи до уваги доведення теореми 1, легко бачити, що

$$d_m(\mathbb{B}_{1,\theta}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big), L_2) = d_m^{\perp}\big(\mathbb{B}_{1,\theta}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_2\big) \geq$$

$$\geq d_m^B(\mathbb{B}_{1,\theta}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_2\big) \gg m^{-g(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{2}}. \tag{22}$$

*Випадок* 2: $1 < q < 2$.

Нехай $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^m$ — довільна система функцій в $L_q$ і

$$E_m(f, \mathcal{U})_q = \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j u_j \right\|_q, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Розглянемо систему функцій $\mathcal{V} = \{v_j\}_{j=1}^m$, де $v_j = \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} u_j$, $j = \overline{1, m}$, і підберемо натуральне число $n = n(m)$ так, щоб виконувались співвідношення $2m \leq \dim \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ та $m \asymp 2^n$. Тоді для довільної функції $f \in \mathbb{B}_{1,\theta}^{\boldsymbol{R}} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$ з урахуванням (7) маємо

$$E_m(f,\mathcal{V})_q = \inf_{c_j}\left\| f - \sum_{j=1}^{m} c_j v_j \right\|_q = \inf_{c_j}\left\| \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} f - \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{V}_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} u_j \right\|_q =$$

$$= \inf_{c_j}\left\| \left( f - \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \right) * V_{[2^{\boldsymbol{\rho} n}]} \right\|_q \ll E_m(f,\mathcal{U})_q. \qquad (23)$$

З іншого боку, для довільної функції $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d)$, використавши нерівність різних метрик Нікольського (8), одержимо

$$E_m(f,\mathcal{V})_2 \ll 2^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} E_m(f,\mathcal{V})_q. \qquad (24)$$

Таким чином, беручи до уваги співвідношення (22)–(24), отримуємо

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta}, L_q) \geq d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_q) \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta} \cap \mathrm{T}([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d), L_2) \gg 2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{2}} \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})+1-\frac{1}{q}}.$$

*Випадок* 3: $2 < q \leq \infty$.

З огляду на нерівність $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$, з урахуванням розглянутого вище випадку 1, можемо записати

$$d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta}, L_q) \geq d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta}, L_2) \asymp m^{-g(\boldsymbol{R})+\frac{1}{2}}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження.*** Теорема 3 доповнює оцінки колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}$ у просторах $L_q$, які були встановлені у роботах [3] та [10] для інших співвідношень між параметрами $p$ та $q$.

Порівнюючи теорему 3 з теоремою Д, отримуємо наступне твердження.

***Наслідок.*** *Якщо* $1 < q \leq 2$ *і* $g(\boldsymbol{R}) > 1 - \dfrac{1}{q}$, *то підпростір* $\mathrm{T}\big([2^{\boldsymbol{\rho} n}], d\big)$ *є екстремальним* (*у сенсі порядку*) *підпростором для наближення функцій із класів* $\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{1,\theta}$.

Насамкінець порівняємо отримані в теоремі 2 оцінки ортопроекційних поперечників $d^{\perp}_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q)$ із відомими оцінками колмогоровських поперечників $d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q)$ (див. [3, 10], а також теорему 3).

Таким чином, якщо $1 \leq p, q \leq \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, і $1 \leq \theta < \infty$, то має місце порядкова рівність

$$d^{\perp}_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) & \text{при} \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty, \quad g(\boldsymbol{R}) > 0, \\ & \text{або} \quad 1 \leq p < q \leq 2, \quad g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}, \\ d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} & \text{при} \quad 1 \leq p < 2 < q \leq \infty, \quad g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{p}, \\ d_m(\mathbb{B}^{\boldsymbol{R}}_{p,\theta}, L_q) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} & \text{при} \quad 2 \leq p < q \leq \infty, \quad g(\boldsymbol{R}) > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

## Література


1. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Миронюк В. В.* Тригонометричні наближення та колмогоровські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 8. – С. 1117 – 1132.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – P. 107 – 110.
6. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 314 – 317.
7. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
8. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1348 – 1366.
9. *Романюк А. С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 222 – 236.
10. *Миронюк В. В.* Колмогоровські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 634 – 641.


Одержано 14.09.15