УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ОТКРЫТЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ ОРЛИЧА – СОБОЛЕВА

The paper is devoted to the study of mappings with unbounded characteristic of quasiconformality and, in particular, of mappings with finite distortion extensively studied in recent years. We obtain theorems on equicontinuity of families of mappings that belong to the Orlicz–Sobolev class for $n \geq 3$, and have finite distortion. To do this, we also investigate some auxiliary classes of mappings, namely, we study the relationship between the so-called lower Q-mappings and some inequalities of the capacity type.

Дану роботу присвячено вивченню відображень з необмеженою характеристикою квазіконформності, зокрема відображень зі скінченним спотворенням, що активно вивчаються протягом останнього часу. Отримано теореми про одностайну неперервність сімей відображень, які належать класу Орліча – Соболєва при $n \geq 3$ і мають скінченне спотворення. Для досягнення цієї мети паралельно досліджуються деякі допоміжні класи відображень, а саме, вивчається взаємозв'язок між так званими нижніми Q-відображеннями і деякими нерівностями ємнісного характеру.

1. Введение. Данная статья посвящена изучению свойства равностепенной непрерывности одного подвида отображений с конечным искажением, активно изучаемых последнее время (см. [1], а также [2, 3]). Как было показано в одной из совместных работ автора, семейства гомеоморфизмов класса Орлича – Соболева с конечным искажением являются нормальными (равностепенно непрерывными) при определенных дополнительных условиях на характеристику квазиконформности отображений и количество выпускаемых этими отображениями значений (см., например, [4], теоремы 7, 9 и следствие 13). Однако, как оказалось, требование гомеоморфности в формулировке упомянутых результатов в известном смысле не является принципиальным, поскольку, как будет показано в настоящей работе, при некоторых (довольно естественных) условиях на семейство отображений условие гомеоморфности можно опустить и заменить его требованием, чтобы каждое отображение было лишь открытым и дискретным. При этом дополнительно налагается условие ограниченности функции кратности рассматриваемого семейства отображений. В данной работе будут сформулированы и подробно доказаны результаты подобного характера.

Как и в случае гомеоморфизмов, исследование открытых дискретных отображений классов Орлича – Соболева опирается на их связь с так называемыми нижними Q-отображениями, в связи с чем в работе развивается параллельная вспомогательная теория их исследования. Понятия и обозначения, встречающиеся в настоящей работе, могут быть найдены в работах [1 – 5] и потому преимущественно опускаются. Понятия емкости конденсатора, множеств емкости нуль и т. д. могут быть найдены, например, в [6]. Здесь и далее h — хордальная метрика (см. [7], определение 12.1). Перейдем к формулировке основных результатов настоящей работы.

Для заданных компактного множества $E \subset \mathbb{R}^n$, неубывающей функции $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, измеримой по Лебегу функции $Q\colon D \to [1,\infty]$ и числа $N \in \mathbb{N}$ обозначим символом $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$ семейство всех открытых дискретных отображений $f\colon D \to \mathbb{R}^n \setminus E$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, имеющих конечное искажение, таких, что $N(f,D) \leq N$ и $K_O^{n-1}(x,f) \leq Q(x)$ почти всюду. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $n \geq 3$, *тогда семейство отображений* $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$ *является равностепенно непрерывным в некоторой фиксированной точке* $x_0 \in D$, *если* $\operatorname{cap} E > 0$, $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$,

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{1}$$

и, кроме того, при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *выполнено условие расходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty, \tag{2}$$

где, как обычно, $q_{x_0}(r) := \dfrac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x-x_0|=r} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$. *В частности, заключение теоремы* 1 *является правильным, если* $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$.

Здесь и далее равностепенная непрерывность понимается как между метрическими пространствами $(X, d) = (D, |\cdot|)$, где D — область в $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — евклидова метрика, $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$; $(X', d') = \left(\overline{\mathbb{R}^n}, h\right)$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, h — хордальная метрика. Из критерия Арцела – Асколи (см. [7], предложение 20.4) вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *семейство отображений* $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$ *является нормальным семейством отображений, как только условие* (2) *выполнено в каждой точке* x_0 *области* D.

Сформулируем еще один важнейший результат работы. Понятие FMO („конечного среднего колебания”) может быть найдено в монографии [3] (разд. 6.2). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При* $n \geq 3$ *семейство отображений* $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$ *является равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in D$, *если* $\operatorname{cap} E > 0$, *выполнено условие* (1) *и, кроме того,* $Q \in FMO(x_0)$.

Из теоремы 2 на основании приведенного выше критерия Арцела – Асколи вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *В условиях теоремы* 2 *семейство отображений* $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$ *является нормальным семейством отображений, как только условие* $Q \in FMO(x_0)$ *выполнено в каждой точке* x_0 *области* D.

2. Предварительные сведения. В данном пункте обсуждаются различные не связанные между собой вопросы, каждый из которых является вспомогательным элементом при доказательстве основных результатов работы. Встречающиеся ниже определения поверхности и модуля семейств поверхностей можно найти, например, в [3] (гл. 9).

Следующий класс отображений представляет собой обобщение квазиконформных отображений в смысле кольцевого определения по Герингу и отдельно исследуется различными авторами (см., например, [3], глава 9). Пусть D и D' — заданные области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что $f : D \to D'$ — *нижнее* Q*-отображение в точке* x_0, как только $M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \operatorname{ext\,adm} \Sigma_\varepsilon} \displaystyle\int_{D \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x)$

для каждого кольца $A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$, $\varepsilon_0 \in (\varepsilon, d_0)$, $d_0 = \sup_{z \in D} |z - z_0|$, где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Примеры таких отображений несложно указать (см. теоремы 3, 4).

Следующее утверждение даже для несколько более общего случая „p-почти всех поверхностей” при $n - 1 < p \leqslant n$ приведено в работе [8], однако содержит небольшую неточность в своей формулировке (в ней нужно, вообще говоря, предположить измеримость множества $E \subset \mathbb{R}$, состоящего из всех $r > 0$ таких, что некоторое свойство P имеет место относительно сферы $S(0, r)$), и потому приводится ниже полностью.

Лемма 1. *Пусть $x_0 \in D$. Если некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где «почти всех» понимается в смысле модуля семейств поверхностей, и, кроме того, множество $E \subset \mathbb{R}$, состоящее из всех $r > 0$ таких, что свойство P имеет место относительно сферы $S(0, r)$, является измеримым по Лебегу, то P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ относительно линейной меры Лебега по параметру $r \in \mathbb{R}$. Обратно, пусть P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ относительно линейной меры Лебега по $r \in \mathbb{R}$, тогда P также имеет место для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле модуля семейств поверхностей.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где «почти всех» понимается в смысле модуля семейств поверхностей. Покажем, что P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ по отношению к параметру $r \in \mathbb{R}$.

Достаточно рассмотреть случай, когда область D ограничена. Предположим, что заключение леммы не является правильным. Поскольку множество E из условия леммы является измеримым по Лебегу, то найдется семейство Γ сфер $D(x_0, r)$, для которого свойство P выполнено в смысле почти всех поверхностей относительно модуля, однако нарушается для некоторого множества индексов $r \in \mathbb{R}$ положительной меры.

Вследствие регулярности меры Лебега m_1 найдется борелевское множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что $m_1(B) > 0$ и свойство P нарушается для почти всех $r \in B$. Пусть $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — допустимая функция для семейства Γ. Учитывая, что B борелево, можно считать, что $\rho \equiv 0$ вне $E = \{x \in D\colon \exists\, r \in B\colon |x - x_0| = r\}$, поскольку в этом случае множество E, очевидно, борелево. По неравенству Гельдера

$$\int\limits_E \rho^{n-1}(x)\, dm(x) \ \le \ \left(\int\limits_E \rho^n(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int\limits_E dm(x)\right)^{\frac{1}{n}}$$

и, следовательно, в силу теоремы Фубини (см. [9], гл. III, теорема 8.1)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x) \ \ge \ \frac{\left(\int_E \rho^{n-1}(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n}{n-1}}}{\left(\int_E dm(x)\right)^{\frac{1}{n-1}}} \ \ge \ \frac{(m_1(B))^{\frac{n}{n-1}}}{c}$$

для некоторого $c > 0$, т. е. $M(\Gamma) > 0$, что противоречит предположению леммы. Первая часть леммы 1 доказана.

Достаточность. Пусть P имеет место для почти всех r относительно меры Лебега и всех соответствующих этим r сфер $D(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Покажем, что P также выполняется для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле модуля семейств поверхностей.

Обозначим через Γ_0 семейство всех пересечений $D_r := D(x_0, r)$ сфер $S(x_0, r)$ с областью D, для которых P не имеет места. Пусть R обозначает множество всех $r \in \mathbb{R}$ таких, что $D_r \in \Gamma_0$. Если $m_1(R) = 0$, то по теореме Фубини получаем $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D\colon |x - x_0| = r \in R\}$. Рассмотрим функцию $\rho_1\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, определенную символом ∞ при $x \in E$ и доопределенную нулем в остальных точках. Отметим, что найдется борелева функция $\rho_2\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, совпадающая почти всюду с ρ_1 (см. [10], разд. 2.3.5). Таким образом, $M(\Gamma_0) \leq$ $\leq \int_E \rho_2^n dm(x) = \int_E \rho_1^n dm(x) = 0$, следовательно, $M(\Gamma_0) = 0$.

Лемма 1 доказана.

Следующее утверждение может быть доказано аналогично теореме 9.2 в [3] и потому опускается.

Лемма 2. *Пусть $D, D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Отображение $f\colon D \to D'$ является нижним Q-отображением в точке x_0 тогда и только тогда, когда $M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||\,Q||_{n-1}(r)}$ $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где, как и выше, Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int_{D(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.*

Из леммы 7.4 [3] вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, для произвольных $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ полагаем $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$, $A := A(r_1, r_2, x_0) =$ $= \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}$. Тогда если емкость конденсатора*

$$f(E) := \left(f(B(x_0, r_2)), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$$

открытого дискретного отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{cap} f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,, \tag{3}$$

где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задается соотношением $I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$, то также

$$\operatorname{cap} f(E) \leq \int\limits_A Q(x) \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{4}$$

для любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1\,. \tag{5}$$

Имеет место следующее предложение (см. лемму 2.6, гл. III [6]).

Предложение 1. *Предположим, что E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что $\operatorname{cap} E > 0$. Тогда для каждого $a > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$, что $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, C\right) \geq \delta$, где C — произвольный континуум в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ такой, что $h(C) \geq a$.*

Докажем теперь следующее важное утверждение.

Лемма 4. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной емкости, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ — семейство открытых дискретных отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, удовлетворяющих в точке $x_0 \in D$ условию* (4) *для любых $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$, для которой имеет место условие* (5). *Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right), \tag{6}$$

где $\psi(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая по Лебегу функция такая, что при некотором $\varepsilon_0' \in (0,\varepsilon_0)$ выполнено условие

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0'). \tag{7}$$

Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ равностепенно непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Полагаем $\mathcal{E} = (A,\, C)$, где

$$A = B(x_0,\varepsilon_0)\,, \quad C = \overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\,.$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi(t)/I(\varepsilon,\varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon,\,\varepsilon_0)$. Заметим, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0')$ выполнено равенство $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\,dt = 1$. Тогда, по определению класса $\mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$, для любого $f \in \mathfrak{F}_{Q,E}(x_0)$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0')$ имеем

$$\operatorname{cap}\, f\,(\mathcal{E}) \leq \frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\ dm(x)\,.$$

Из условия (6) получаем $\operatorname{cap}\, f\,(\mathcal{E}) \leq \alpha(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0')$, где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Выберем произвольно число $a > 0$. Для этого числа найдется число $\delta = \delta(a)$, для которого выполнено условие предложения 1 относительно множества E, соответствующего условию леммы 4. Тогда для числа $\delta = \delta(a)$ найдется такое $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$, что

$$\operatorname{cap}\, f\,(\mathcal{E}) \leq \delta \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\,\varepsilon_*(a))\,. \tag{8}$$

Используя соотношение (8), получаем

$$\operatorname{cap}\,\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E,\, f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right) \leq \operatorname{cap}\,\left(f\left(B(x_0,\,r_0)\right),\, f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right) \leq \delta$$

при $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_*(a))\,.$

Тогда из предложения 1 следует, что $h\left(f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right) < a$. Окончательно, для любого $a > 0$ существует такое $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$, что

$$h\left(f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right) < a,$$

как только $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_*(a))\,.$

Лемма 4 доказана.

3. Основная лемма. Используемые ниже сведения, касающиеся емкости $C[D,E,F]$ пары множеств E,F относительно области D, можно найти в работе В. Цимера [11]. Для числа $n'=n/(n-1)$ определим величину

$$\widetilde{M_{n'}}(\Sigma)=\inf_{\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\Sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^{n'}dm(x)\,, \tag{9}$$

где запись $\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ означает, что ρ — неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\int\limits_{\sigma\cap R}\rho d\mathcal{H}^{n-1}\geq 1\quad\forall\,\sigma\in\Sigma. \tag{10}$$

Заметим, что согласно результату Цимера

$$\widetilde{M_{n'}}(\Sigma)=C[G,C_0,C_1]^{\,-1/(n-1)}\,, \tag{11}$$

см. теорему 3.13 [11]. Заметим также, что согласно результату Шлыка

$$M(\Gamma(E,F,D))=C[D,E,F]\,, \tag{12}$$

см. теорему 1 [12]. Дальнейшие исследования работы опираются на две важные взаимосвязи: указывается взаимосвязь нижних Q-отображений и отображений, удовлетворяющих оценкам (3), а затем взаимосвязь классов Орлича – Соболева с нижними Q-отображениями. Подобные взаимосвязи найдены нами, правда, только при дополнительном предположении открытости и дискретности отображений рассматриваемых классов. (Изучение более общего случая не относится к ближайшим целям данного исследования и, вероятно, требует подходов, существенно отличных от модульной техники.) Следующая лемма является наиболее важным элементом дальнейшего изложения.

Лемма 5. *Пусть $x_0\in D$ и $Q\colon D\to[0,\infty]$ — локально интегрируемая в степени $n-1$ в D функция. Если $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное нижнее Q-отображение в точке x_0, то f удовлетворяет оценке*

$$\mathrm{cap}\,f(E)\leq\frac{\omega_{n-1}}{I^{*\,n-1}}\,,$$

где E — конденсатор вида $E=(B(x_0,r_2),\overline{B(x_0,r_1)})$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $q^*_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q^{n-1}(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$ и $I^*=I^*(x_0,r_1,r_2)=$ $=\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{rq_{x_0}^{*\,\frac{1}{n-1}}(r)}$.

Доказательство. Пусть $x_0\in D$, $0<r_1<r_2<\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$. Без ограничения общности можно считать, что $f(x_0)\neq\infty$ и $f(x)\neq\infty$ при $x\in B(x_0,r_2)$. Зафиксируем $\varepsilon\in(r_1,r_2)$ и рассмотрим шар $B(x_0,\varepsilon)$. Полагаем $C_0=\partial f(B(x_0,r_2))$, $C_1=f(\overline{B(x_0,r_1)})$, $\sigma=\partial f(B(x_0,\varepsilon))$. Поскольку $\overline{B(x_0,r_2)}$ — компакт в D, найдется такой шар $B(x_0,R)$, что $\overline{f(B(x_0,r_2))}\subset B(x_0,R)$. Полагаем $G:=B(x_0,R)$.

Поскольку f непрерывно и открыто, $\overline{f(B(x_0,r_1))}$ — компактное подмножество множества $f(B(x_0,\varepsilon))$ так же, как $\overline{f(B(x_0,\varepsilon))}$ — компактное подмножество $f(B(x_0,r_2))$. В частности, $\overline{f(B(x_0,r_1))}\cap\partial f(B(x_0,\varepsilon))=\varnothing$. Пусть, как и выше, $R=G\setminus(C_0\cup C_1)$ и $R^*=R\cup C_0\cup C_1$, тогда $R^*:=G$. Заметим, что σ разделяет C_0 и C_1 в $R^*=G$. Действительно, множество $\sigma\cap R$

замкнуто в R, кроме того, пусть $A := G\setminus\overline{f(B(x_0,\varepsilon))}$ и $B = f(B(x_0,\varepsilon))$, тогда A и B открыты в $G\setminus\sigma$, $C_0\subset A$, $C_1\subset B$ и $G\setminus\sigma = A\cup B$.

Пусть Σ — семейство всех множеств, отделяющих C_0 от C_1 в G. Поскольку для открытых отображений $\partial f(O)\subset f(\partial O)$, где O — компактная подобласть D, получаем $\partial f(B(x_0,r))\subset \subset f(\partial B(x_0,r))$, $r\in(0,\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D))$.

Пусть $\rho^{n-1}\in\widetilde{\mathrm{adm}}\bigcup_{r_1<r<r_2}\partial f(B(x_0,r))$ в смысле соотношения (10), тогда $\rho\in \in\mathrm{adm}\bigcup_{r_1<r<r_2}\partial f(B(x_0,r))$ в смысле соотношения (9.11) [3]. Поскольку (вследствие открытости отображения f) имеет место включение $\partial f(B(x_0,r))\subset f(S(x_0,r))$, получаем, что $\rho\in\mathrm{adm}\bigcup_{r_1<r<r_2}f(S(x_0,r))$ и, следовательно, в силу (9) имеем

$$\widetilde{M_{n'}}(\Sigma)\geq\widetilde{M_{n'}}\left(\bigcup_{r_1<r<r_2}\partial f(B(x_0,r))\right)\geq\widetilde{M_{n'}}\left(\bigcup_{r_1<r<r_2}f(S(x_0,r))\right)\geq$$
$$\geq M\left(\bigcup_{r_1<r<r_2}f(S(x_0,r))\right). \qquad (13)$$

Однако, согласно (11) и (12),

$$\widetilde{M_{n'}}(\Sigma)=\frac{1}{(M(\Gamma(C_0,C_1,G)))^{1/(n-1)}}. \qquad (14)$$

Пусть $\Gamma_{f(E)}$ — семейство всех кривых для конденсатора $f(E)$ в обозначениях [6] (предложение 10.2, гл. II). Пусть также $\Gamma^*_{f(E)}$ обозначает семейство всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$. Тогда заметим, что семейства $\Gamma^*_{f(E)}$ и $\Gamma(C_0,C_1,G)$ имеют одинаковые семейства допустимых метрик ρ и, значит, $M(\Gamma_{f(E)})=M(\Gamma(C_0,C_1,G))$. Из (14) и [6] (предложение 10.2, гл. II) получаем

$$\widetilde{M}^{n-1}(\Sigma)=\frac{1}{\mathrm{cap}\,f(E)}. \qquad (15)$$

Окончательно, из (13) и (15) следует неравенство

$$\mathrm{cap}\,f(E)\leq\frac{1}{M\left(\bigcup_{r_1<r<r_2}f(S(x_0,r))\right)^{n-1}}. \qquad (16)$$

По лемме 2 с учетом (16) имеем

$$\mathrm{cap}\,f(E)\leq\frac{1}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)}\right)^{n-1}}=\frac{\omega_{n-1}}{I^{*\,n-1}},$$

что и доказывает лемму 5.

4. Взаимосвязь классов Орлича – Соболева с нижними Q-отображениями. Результаты, сформулированные ниже, позволяют исследовать классы Соболева и Орлича – Соболева, допускающие наличие точек ветвления. В частности, ниже будет указана взаимосвязь нижних Q-отображений с классами Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на плоскости.

Прежде всего опишем взаимосвязь классов Орлича – Соболева с нижними Q-отображениями при $n\geq 3$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (1). *Если $n \geq 3$, то каждое открытое дискретное отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ такое, что $N(f,D) < \infty$, является нижним Q-отображением в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = N(f,D) \cdot K_O(x,f)$, где внешняя дилатация $K_O(x,f)$ отображения f в точке x определена соотношением* (1.15) [3], *а кратность $N(f,D)$ — соотношением* (8.20) [3].

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 5 [4] и потому опускается. Отметим, что, как показывает теорема, приведенная ниже, при $n = 2$ связь классов Орлича – Соболева с нижними Q-отображениями значительно более проста, чем в пространственном случае. Пусть $D \subset \mathbb{C}$. Для комплекснозначной функции $f\colon D \to \mathbb{C}$, заданной в области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при почти всех $z = x + iy$, полагаем $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $\partial f = f_z = (f_x - if_y)/2$.

Теорема 4. *Каждое открытое дискретное отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ конечного искажения класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ такое, что $N(f,D) < \infty$, является нижним Q-отображением в произвольной точке $z_0 \in \overline{D}$ при $Q(z) = N(f,D)K_\mu(z)$, где $K_\mu(z)$ определено соотношением*

$$K_\mu(z) \quad = \quad \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu\,(z)|}\,,$$

$\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$ при $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ — в противном случае.

Доказательство. Заметим, что $f = \varphi \circ g$, g — некоторый гомеоморфизм, а φ — аналитическая функция (см. [13], п. 5 (III), гл. V). Следовательно, отображение f дифференцируемо почти всюду (см., например, [14], теорема 3.1, § 3, гл. III). Пусть B — борелево множество всех точек $z \in D$, где f имеет полный дифференциал $f'(z)$ и $J(z,f) \neq 0$. Заметим, что B может быть представлено в виде не более чем счетного объединения борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см. [10], пункты 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8). Без ограничения общности можем считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также символом B_* множество всех точек $z \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако $f'(z) = 0$.

Поскольку f имеет конечно искажение, $f'(z) = 0$ для почти всех точек z, где $J(z,f) = 0$. Таким образом, согласно построению и изложенному выше, множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет нулевую меру Лебега. Следовательно, по теореме 9.1 [3] $\mathcal{H}^1(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех окружностей $S_r := S(z_0, r)$ с центром в точке $z_0 \in \overline{D}$, где $\mathcal{H}^1$, как обычно, линейная мера Хаусдорфа, а „почти всех" следует понимать в смысле модуля семейств кривых. Заметим, что функция $\psi(r) := \mathcal{H}^1(B_0 \cap S_r)$ измерима по Лебегу в силу теоремы Фубини, так что множество $E = \{r \in \mathbb{R}\colon \mathcal{H}^1(B_0 \cap S_r) = 0\}$ измеримо по Лебегу. В таком случае по лемме 1 и $\mathcal{H}^1(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$,

Рассмотрим разбиение множества $D_* := B(z_0, \varepsilon_0) \cap D \setminus \{z_0\}$, $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{z \in D} |z - z_0|$, на счетное число кольцевых сегментов A_k, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть φ_k — вспомогательная квазиизометрия, отображающая A_k на прямоугольник $\widetilde{A_k}$ такой, что дуги окружностей отображаются на отрезки прямых. (Например, можно взять в качестве $\varphi_k(\omega) = \log(\omega - z_0)$, $\omega \in A_k$.) Рассмотрим семейство отображений $g_k = f \circ \varphi_k^{-1}$, $g_k\colon \widetilde{A_k} \to \mathbb{C}$. Заметим, что $g_k \in W^{1,1}_{\rm loc}$ (см. [15], разд. 1.1.7), откуда, в частности, $g_k \in ACL$ (см. [15], теоремы 1 и 2, п. 1.1.3, § 1.1, гл. I). Поскольку абсолютная непрерывность на фиксированном отрезке влечет N-свойство относительно линейной меры Лебега (см. [10], разд. 2.10.13), то $\mathcal{H}^1((g_k \circ \varphi_k)(B_0 \cap A_k \cap S_r)) = \mathcal{H}^1(f(B_0 \cap$

$\cap A_k \cap S_r)) = 0$ и, значит, вследтвие полуаддитивности меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^1(f(B_0 \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$.

Далее, покажем что $\mathcal{H}^1(f(B_* \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$. Действительно, пусть φ_k, g_k и A_k такие, как определено выше, $A_k = \{z \in \mathbb{C} \colon z - z_0 = re^{i\varphi}, r \in (r_{k-1}, r_k), \varphi \in \in (\psi_{k-1}, \psi_k)\}$, и $S_k(r)$ — часть сферы $S(z_0, r)$, принадлежащая сферическому сегменту A_k, т. е. $S_k(r) = \{z \in \mathbb{C} \colon z - z_0 = re^{i\varphi}, \varphi \in (\psi_{k-1}, \psi_k)\}$. По построению φ_k отображает $S_k(r)$ на сегмент $I(k, r) = \{z \in \mathbb{C} \colon z = \log r + it, t \in (\psi_{k-1}, \psi_k)\}$. Применяя теорему 3.2.5 [10], получаем, что

$$\mathcal{H}^1(g_k(\varphi_k(B_* \cap S_k(r)))) \le \int\limits_{g_k(\varphi_k(B_* \cap S_k(r)))} N(y, g_k, \varphi_k(B_* \cap S_k(r))) d\mathcal{H}^1 y =$$

$$= \int\limits_{\varphi_k(B_* \cap S_k(r))} |g_k'(r + te)| dt = 0$$

для почти всех $r \in (r_{k-1}, r_k)$. Из изложенного выше следует, что $\mathcal{H}^1(f(B_* \cap S_k(r))) = 0$ для почти всех $r \in (r_{k-1}, r_k)$. Вследствие полуаддитивности хаусдорфовой меры $\mathcal{H}^1(f(B_* \cap S_r)) = = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, что и требовалось установить.

Пусть Γ — семейство всех пересечений окружностей S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{z \in D} |z - - z_0|$, с областью D. Для заданной допустимой функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, кроме того,

$$\rho(z) \colon = \rho_*(f(z)) \|f'(z)\| \quad \text{при} \quad z \in D \setminus B_0 \,.$$

Для фиксированного множества $D_r^* \in f(\Gamma)$, $D_r^* = f(S_r \cap D)$, заметим, что

$$D_r^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \bigcup f(S_r \cap B_*) \,,$$

и, следовательно, для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$

$$1 \le \int\limits_{D_r^*} \rho_*(y) d\mathcal{A}_* = \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{f(S_r \cap B_i)} N(y, S_r \cap B_i) \rho_*(y) d\mathcal{H}^1 y +$$

$$+ \int\limits_{f(S_r \cap B_*)} N(y, S_r \cap B_*) \rho_*(y) d\mathcal{H}^1 y \,. \tag{17}$$

Учитывая доказанное выше, из (17) получаем

$$1 \le \int\limits_{D_r^*} \rho_*(y) d\mathcal{A}_* = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{f(S_r \cap B_i)} N(y, S_r \cap B_i) \rho_*(y) d\mathcal{H}^1 y \tag{18}$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Рассуждая покусочно на B_i, $i = 1, 2, \ldots$, согласно [10] (пункт 1.7.6 и теорема 3.2.5), имеем

$$\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho\,d\mathcal{A}=\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho_*(f(z))\|f'(z)\|\,d\mathcal{A}=$$

$$=\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho_*(f(z))\frac{\|f'(z)\|}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}}\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\,d\mathcal{A}\geq\int\limits_{B_i\cap S_r}\rho_*(f(z))\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\,d\mathcal{A}=\int\limits_{f(B_i\cap S_r)}\rho_*\,d\mathcal{A}_* \tag{19}$$

для почти всех $r\in(0,\varepsilon_0)$. Из (18) и (19) с учетом леммы 1 следует, что $\rho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Используя замену переменных на каждом $B_l,\ l=1,2,\ldots$ (см., например, [10], теорема 3.2.5), а также свойство счетной аддитивности интеграла Лебега, получаем оценку $\int_D\frac{\rho(z)}{K_\mu(z)}\,dm(z)\leq\int_{f(D)}N(f,D)\rho_*(y)\,dm(y)$, что и завершает доказательство.

5. Доказательство основных результатов работы (теоремы 1, следствия 1, теоремы 2 и следствия 2). Пусть $f\in\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$, тогда в силу теоремы 3 отображение f является нижним Q'-отображением в произвольной точке $x_0\in D$ при $Q'(x)=N(f,D)\cdot K_O(x,f)$. Поскольку по условию $K_O^{n-1}(x,f)\leq Q(x)$ почти всюду, по лемме 5 для произвольных $0<r_1<r_2<$ $<\operatorname{dist}(x_0,\partial D),\ E=\Big(B(x_0,r_2),\overline{B(x_0,r_1)}\Big)$, отображение f удовлетворяет также оценке

$$\operatorname{cap} f(E)\leq\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,,$$

где $I=I(x_0,r_1,r_2)=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{ra_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$, $a_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q''(x)\,d\mathcal{H}^{n-1},\ Q''(x):=$ $:=N^{n-1}(f,D)Q(x)$. В силу леммы 3 отображение f удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{cap} f(E)\leq\int\limits_A Q''(x)\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,,$$

$A:=A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon r_1<|x-x_0|<r_2\}$, при произвольной неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, удовлетворяющей условию (5).

В таком случае по лемме 3 отображение f принадлежит семейству отображений $\mathfrak{F}_{Q'',E}(x_0)$ в обозначениях леммы 4. Заметим, что условия на функцию Q, налагающиеся в каждой из формулировок основных результатов работы (теоремы 1, следствия 1, теоремы 2 и следствия 2), совпадают с точностью до постоянного множителя $N^{n-1}(f,D)$ с одним из соответствующих условий [16] (лемма 8). Окончательно, семейство $\mathfrak{F}_{Q'',E}(x_0)$ является нормальным в силу леммы 4, но тогда также нормально и семейство $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}$, ибо по доказанному $\mathfrak{R}_{\varphi,Q,N,E}\subset$ $\subset\mathfrak{F}_{Q'',E}(x_0)$.

6. Некоторые примеры. Отметим, что ограничения на функцию Q, содержащиеся в формулировках основных результатов настоящей работы, нельзя, вообще говоря, заменить условием $Q\in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p>0$ и для любой неубывающей функции $\varphi(t)$. Для простоты рассмотрим случай, когда $D=\mathbb{B}^n,\ n\geq 2$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\varphi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ — произвольная неубывающая функция. Для каждого $p\geq 1$ существуют функция $Q\colon\mathbb{B}^n\to[1,\infty]$, $Q(x)\in L^p(\mathbb{B}^n)$ и равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $g_m\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}^n$, $g_m\in W_{\rm loc}^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n)$, имеющих конечное искажение, таких, что $K_O^{n-1}(x,g_m)\leq Q(x)$, при этом семейство $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в точке $x_0=0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p. Зададим последовательность гомеоморфизмов $g_m : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g_m(x) = \begin{cases} \dfrac{1+|x|^\alpha}{|x|} \cdot x\,, & 1/m \leq |x| < 1, \\ \dfrac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot x\,, & 0 < |x| < 1/m\,. \end{cases}$$

Заметим, что каждое отображение g_m переводит шар $D = \mathbb{B}^n$ в шар $D' = B(0, 2)$ и последовательность g_m постоянна при $|x| \geq 1/m$, а именно, $g_m(x) \equiv g(x)$ при всех $x\colon \dfrac{1}{m} < |x| < 1$, $m = 1, 2\ldots$, где $g(x) = \dfrac{1+|x|^\alpha}{|x|} \cdot x$.

Заметим, что $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$. Действительно, отображения $g_m^{(1)}(x) = \dfrac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot x$, $m = 1, 2, \ldots$, являются отображениями класса C^1, например, в шаре $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$, а отображения $g_m^{(2)}(x) = \dfrac{1+|x|^\alpha}{|x|} \cdot x$ — отображениями класса C^1, например, в кольце

$$A(1/m - \varepsilon, 1, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/m - \varepsilon < |x| < 1\}$$

при малых $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что гомеоморфизмы g_m являются липшицевыми в $\mathbb{B}^n$ и, значит, $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$ (см., например, [7, с. 12], разд. 5).

Далее, в каждой регулярной точке $x \in D$ отображения $g_m : D \to \mathbb{R}^n$ вычислим внешнюю дилатацию отображения g_m в точке x. Согласно соотношению (2.5), разд. 2.1, гл. I [17] для произвольного отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемого и невырожденного в точке $x_0 \in D$, найдутся системы векторов $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}$ и положительные числа $\lambda_1(x_0), \ldots, \lambda_n(x_0)$, $\lambda_1(x_0) \leq \ldots \leq \lambda_n(x_0)$ такие, что $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\widetilde{e_i}$ (см. [17], теорема 2.1, гл. I), при этом $|J(x_0, f)| = \lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0)$, $\quad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0)$, $K_O(x_0, f) = \dfrac{\lambda_n^n(x_0)}{\lambda_1(x_0) \ldots \lambda_n(x_0)}$. Поскольку „наше” отображение g_m имеет конкретный вид

$$g_m(x) = f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|)\,, \tag{20}$$

где функция $\rho(t) : (0, p) \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема почти всюду, то все указанные выше объекты, включая соответствующие величины λ_i, а также системы векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ и $\widetilde{e_{i_1}}, \ldots, \widetilde{e_{i_n}}$, могут быть вычислены непосредственно. Точнее, нетрудно убедиться, что в точке x_0 дифференцируемости отображения f в качестве главных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ и $\widetilde{e_{i_1}}, \ldots, \widetilde{e_{i_n}}$ можно взять $n-1$ линейно независимых касательных векторов к сфере $S(0, r)$ в точке x_0, где $|x_0| = r$, и один ортогональный к ним вектор в указанной точке. Соответствующие главные растяжения (называемые, соответственно, *касательными растяжениями* и *радиальным растяжением*) равны $\lambda_\tau(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \ldots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \dfrac{\rho(r)}{r}$ и $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$ соответственно.

Исходя из изложенного, поскольку каждое g_m имеет вид (20), получаем, что, во-первых, $K_O(x, g_m) = 1$ при $x \in B(0, 1/m)$, во-вторых, при $1/m \leq |x| < 1$ имеем $\lambda_\tau(x) = \dfrac{|x|^\alpha + 1}{|x|}$, $\lambda_r(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}$, $\|g_m'(x)\| = \dfrac{|x|^\alpha + 1}{|x|}$, $|J(x, g_m)| = \left(\dfrac{|x|^\alpha + 1}{|x|}\right)^{n-1} \alpha|x|^{\alpha-1}$ и

$$K_O(x,g_m)=\begin{cases}\dfrac{1+|x|^{\,\alpha}}{\alpha|x|^{\,\alpha}}\,, & 1/m\le |x|\le 1,\\ 1\,, & 0<|x|<1/m\,.\end{cases}$$

Заметим, что при каждом фиксированном $m\in\mathbb{N}$ и некотором $c_m>0$ имеет место неравенство $\|g_m'(x)\|\le c_m$, кроме того, нетрудно видеть, что $|\nabla g_m(x)|\le n^{1/2}\|g_m'(x)\|$ при почти всех $x\in\mathbb{B}^n$. Тогда вследствие неубывания функции φ

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n}\varphi(|\nabla g_m(x)|)dm(x)\le\varphi(n^{1/2}c_m)m(\mathbb{B}^n)<\infty\,,$$

т. е. $g_m\in W^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n)$. Заметим, что отображения g_m имеют конечное искажение, поскольку их якобиан почти всюду не равен нулю; кроме того, $K_O^{n-1}(x,f)\le Q(x)$, где $Q=\left(\dfrac{1+|x|^{\,\alpha}}{\alpha|x|^{\,\alpha}}\right)^{n-1}$, и $Q(x)\le\dfrac{C}{|x|^{\alpha(n-1)}}$, $C:=\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^{n-1}$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n}(Q(x))^p\,dm(x)\le C^p\int\limits_{\mathbb{B}^n}\frac{dm(x)}{|x|^{p\alpha(n-1)}}=$$

$$=C^p\int\limits_0^1\int\limits_{S(0,r)}\frac{d\mathcal{A}}{|x|^{p\alpha(n-1)}}\,dr=\omega_{n-1}C^p\int\limits_0^1\frac{dr}{r^{(n-1)(p\alpha-1)}}\,. \tag{21}$$

Известно, что интеграл $I:=\displaystyle\int_0^1\frac{dr}{r^\beta}$ сходится при $\beta<1$. Таким образом, интеграл в правой части соотношения (21) сходится, поскольку показатель степени $\beta:=(n-1)(p\alpha-1)$ удовлетворяет условию $\beta<1$ при $\alpha\in(0,n/p(n-1))$.

Отсюда следует, что $Q(x)\in L^p(\mathbb{B}^n)$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x\to0}|g(x)|=1\,, \tag{22}$$

и g отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ на кольцо $1<|y|<2$. Тогда, согласно (22), получаем

$$|g_m(x)|=|g(x)|\ge1\qquad\forall x\colon|x|\ge1/m,\quad m=1,2,\ldots\,,$$

т. е. семейство $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Приведем еще один интересный, на наш взгляд, пример, касающийся выполнения условия (2) в формулировках основных утверждений работы. Хотя мы и не можем в буквальном смысле назвать это условие необходимым и достаточным условием равностепенной непрерывности соответствующего семейства отображений, условие (2), все же, является условием, „близким” к необходимому в следующем смысле.

Теорема 6. *Пусть $\varphi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ — произвольная неубывающая функция и $0<\varepsilon_0<1$. Для каждой измеримой по Лебегу функции $Q\colon\mathbb{B}^n\to[1,\infty]$, $Q\in L_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$, такой, что $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}<\infty$, найдется семейство равномерно ограниченных отображений $f_m\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$ с конечным искажением со следующими свойствами:*

1) $K_O^{n-1}(x, f_m) \leq \widetilde{Q}(x)$, *где — некоторая измеримая по Лебегу функция, такая, что* $\widetilde{q}_0(r) := \dfrac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \displaystyle\int_{S(0,r)} \widetilde{Q}(x)d\mathcal{H}^{n-1} = q_0(r)$ *для почти всех* $r \in (0, 1)$;

2) *последовательность* f_m *не является равностепенно непрерывной в нуле.*

Доказательство. Определим последовательность отображений $f_m : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: $f_m(x) = \dfrac{x}{|x|}\rho_m(|x|)$, $f_m(0) := 0$, где

$$\rho_m(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}, \quad q_{0,m}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x|=r} Q_m(x)\, d\mathcal{A},$$

$$Q_m(x) = \begin{cases} Q(x), & |x| > 1/m\,, \\ 1\,, & |x| \leq 1/m\,. \end{cases}$$

Заметим, что $f_m \in ACL$ при любом $m \in \mathbb{N}$ и отображения f_m дифференцируемы почти всюду в $\mathbb{B}^n$. Согласно изложенным при доказательстве теоремы 5 соображениям

$$\|f_m'(x)\| = \frac{\exp\left\{-\displaystyle\int_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|}, \quad |J(x, f_m)| = \frac{\exp\left\{-n\displaystyle\int_{|x|}^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{|x|^n q_{0,m}^{1/(n-1)}(|x|)}.$$

Заметим, что $J(x, f_m) \neq 0$ при почти всех x. Покажем теперь, что $\varphi(|\nabla f_m(x)|) \in L^1(\mathbb{B}^n)$. Используя теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \varphi(|\nabla f_m(x)|)\, dm(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{B}^n} \varphi(n^{1/2}\|f_m'(x)\|)\, dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_0^1 r^{n-1}\varphi\left(n^{1/2}\frac{\exp\left\{-\displaystyle\int_r^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{r}\right) dr =$$

$$= \omega_{n-1}\left(\int\limits_0^{1/m} \psi(r)dr + \int\limits_{1/m}^1 \psi(r)dr\right) = \omega_{n-1}(I_1 + I_2)\,, \tag{23}$$

где $I_1 := \displaystyle\int_0^{1/m} \psi(r)dr$, $I_2 := \displaystyle\int_{1/m}^1 \psi(r)dr$ и $\psi(r) := r^{n-1}\varphi\left(n^{1/2}\dfrac{\exp\left\{-\int_r^1 \frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{r}\right)$.

Заметим, прежде всего, что $I_2 \leq \varphi(n^{1/2}m)\dfrac{m-1}{m} \leq \varphi(n^{1/2}m)$ и $I_1 \leq$

$\leq \displaystyle\int\limits_0^{1/m} r^{n-1}\varphi\left(n^{1/2}\frac{\exp\left\{-\displaystyle\int\limits_r^{1/m}\frac{dt}{tq_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}}{r}\right)dr \leq \varphi(n^{1/2}m)$. В таком случае из соотношений (23) следует, что $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{B}^n}\varphi(|\nabla f_m(x)|)\,dm(x) \leq 2\omega_{n-1}\varphi(n^{1/2}m)$, т. е. $\varphi(|\nabla f_m(x)|) \in L^1(\mathbb{B}^n)$. Заметим, что $K_O(x, f_m) = q_{0,m}^{1/(n-1)}(|x|) \leq q_0^{1/(n-1)}(|x|)$ и, значит, $K_O^{n-1}(x, f_m) \leq q_0(|x|)$ при почти всех $x \in \mathbb{B}^n$. Полагаем $\widetilde{Q}(x) := q_0(|x|)$, тогда $\widetilde{q}_0(r) = q_0(r)$ для почти всех $r \in (0, 1)$.

Заметим, что $|f_m(x)| \leq 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и, таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ равномерно ограничено. Осталось показать, что построенная таким образом последовательность отображений f_m не является равностепенно непрерывной в нуле. Для произвольной последовательности x_m такой, что $|x_m| = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем $|f_m(x_m)| \geq \sigma$, где σ не зависит от m. Окончательно, для некоторого числа σ и произвольного элемента последовательности $1/(m-1)$, $m = 2, 3, \ldots$, найдутся $x_m \in \mathbb{B}^n$ и элемент семейства отображений $f_m \in \{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что $|x_m - 0| < 1/(m-1)$ и в то же время $|f_m(x_m) - f_m(0)| \geq \sigma$. Таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Литература

1. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p.
2. *Gutlyanskii V. Ya, Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach. – New York etc.: Springer, 2012.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
4. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50 – 102.
5. *Севостьянов Е. А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4,** № 4. – С. 582 – 604.
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
8. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Poletskiĭ type inequality for mappings from the Orlicz – Sobolev classes // Complex Anal. Oper. Theory / DOI 10.1007/s11785-015-0460-0 (publ. online 26 Apr 2015).
9. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
10. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
11. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126,** № 3. – P. 460 – 473.
12. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 6. – С. 216 – 221.
13. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964.
14. *Lehto O., Virtanen O.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
15. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
16. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1129 – 1146.
17. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.

Получено 27.06.15