УДК 517.988.63

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗБУРЕННЯМ РОЗВ'ЯЗКІВ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ НА ОСІ ФУНКЦІЙ

We present the conditions of existence and uniqueness of bounded solutions of a nonlinear scalar differential equation $\dfrac{dx(t)}{dt} = f(x(t) + h(t)),\ t \in \mathbb{R}$, in the case where a function f is continuous on $\mathbb{R}$ and a function h is bounded and continuous. In addition, we study the case of an almost periodic function h.

Приведены условия существования и единственности ограниченных решений нелинейного скалярного дифференциального уравнения $\dfrac{dx(t)}{dt} = f(x(t) + h(t)),\ t \in \mathbb{R}$, в случае непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f и ограниченной непрерывной функции h. Также исследован случай почти периодической функции h.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, C^0 — банаховий простір усіх неперервних та обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$$

і C^1 — банаховий простір усіх таких функцій $x \in C^0$, що $\dfrac{dx}{dt} \in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^1} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}\right\}.$$

У просторі C^0 визначимо оператор зсуву S_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_\tau x)(t) = x(t+\tau), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функція $y \in C^0$ називається *майже періодичною* (за Бохнером) (див. [1, 2]), якщо замикання множини $\{S_\tau y : \tau \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^0 є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 банаховий простір майже періодичних функцій $x \in C^0$ з нормою $\|\cdot\|_{C^0}$, а через B^1 банаховий простір майже періодичних функцій $x \in B^0$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt} \in B^0$, з нормою $\|\cdot\|_{C^1}$.

Нехай T — довільне додатне число. Позначимо через P_T^0 банаховий простір усіх T-періодичних функцій $x \in C^0$ з нормою $\|\cdot\|_{C^0}$, а через P_T^1 банаховий простір усіх T-періодичних функцій $x \in C^1$ з нормою $\|\cdot\|_{C^1}$.

Основна мета статті — встановлення умов існування та єдиності (або тільки умов існування) обмежених розв'язків нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t) + h(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з неперервною функцією $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і неперервною обмеженою функцією $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Основні результати. Розглянемо множини $\mathcal{F}_{(-\infty,\beta)}$, $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathcal{F}_{(\alpha,+\infty)}$, $\mathcal{F}_{(-\infty,+\infty)}$, де $\alpha < 0$ і $\beta > 0$, які визначимо таким чином. Якщо $\gamma \in \{-\infty, \alpha\}$ і $\delta \in \{\beta, +\infty\}$, то через $\mathcal{F}_{(\gamma,\delta)}$ позначимо множину всіх неперервних функцій $g : \mathbb{R} \to (\gamma, \delta)$, для кожної з яких $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \gamma$ і $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \delta$ (множину таких функцій позначимо через $\mathcal{F}^+_{(\gamma,\delta)}$) або $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \delta$ і $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \gamma$ (множину таких функцій позначимо через $\mathcal{F}^-_{(\gamma,\delta)}$). Очевидно, що

$$\mathcal{F}_{(\gamma,\delta)} = \mathcal{F}^{+}_{(\gamma,\delta)} \cup \mathcal{F}^{-}_{(\gamma,\delta)} \quad \text{і} \quad \mathcal{F}^{+}_{(\gamma,\delta)} \cap \mathcal{F}^{-}_{(\gamma,\delta)} = \varnothing.$$

У подальшому через $\mathcal{F}$ будемо позначати одну з множин $\mathcal{F}_{(-\infty,\beta)}$, $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}$, $\mathcal{F}_{(\alpha,+\infty)}$ і $\mathcal{F}_{(-\infty,+\infty)}$.

Справджуються такі твердження.

Теорема 1. *Нехай f належить множині $\mathcal{F}$. Тоді для кожної функції $h \in C^0$ рівняння* (1) *має хоча б один розв'язок $x \in C^1$.*

Теорема 2. *Нехай функція f є елементом множини $\mathcal{F}$ і строго монотонною.*

Тоді:

1) *рівняння* (1) *для кожної функції $h \in C^0$ має єдиний розв'язок $x_h \in C^1$*;

2) *рівняння* (1) *для кожної функції $h \in B^0$ має єдиний розв'язок $x_h \in B^1$*;

3) *розв'язок $x_h \in C^1$ рівняння* (1) *неперервно залежить від h.*

Зазначимо, що в теоремі 2 неперервна залежність розв'язку $x_h \in C^1$ рівняння (1) від h означає, що виконується співвідношення

$$\lim_{\|\tilde{h}-h\|_{C^0}\to 0} \|x_{\tilde{h}} - x_h\|_{C^1} = 0$$

для кожної функції $h \in C^0$.

Доведення теорем 1 і 2 наведемо в пп. 4 і 5.

3. Допоміжні твердження. Розглянемо у просторах C^0 і C^1 замкнені кулі

$$B^0[0,r] = \{x \in C^0 \colon \|x\|_{C^0} \le r\}$$

і

$$B^1[0,r] = \{x \in C^1 \colon \|x\|_{C^1} \le r\}$$

радіуса r з центром у точці 0.

Для доведення теорем 1 і 2 нам потрібні наступні твердження.

Лема 1. *Нехай g належить $\mathcal{F}$ і H — довільна обмежена замкнена підмножина множини $\mathbb{R}$.*

Тоді для кожного достатньо великого числа $a > 0$ існує число $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для якого

$$|g(x+h) - kx| \le |k|a \quad \text{для всіх} \quad x \in [-a,a] \quad \text{і} \quad h \in H. \tag{2}$$

Доведення. Нехай g належить $\mathcal{F}_{(\gamma,\delta)}$. Розглянемо спочатку випадок $g \in \mathcal{F}^{+}_{(\gamma,\delta)}$. Існують такі числа b_1 і b_2, що $b_1 < b_2$,

$$g(x+h) < 0 \quad \text{для всіх} \quad x < b_1 \quad \text{і} \quad h \in H \tag{3}$$

і

$$g(x+h) > 0 \quad \text{для всіх} \quad x > b_2 \quad \text{і} \quad h \in H. \tag{4}$$

Розглянемо число

$$c = \max_{b_1 \le x \le b_2, h \in H} |g(x+h)|. \tag{5}$$

Зафіксуємо довільні числа $a > \max\{|b_1|, |b_2|\}$ і $k > 0$, для яких

$$k \max\{|b_1|, |b_2|\} + c < ka. \tag{6}$$

Очевидно, що на підставі (5) і (6)

$$\max_{x\in[b_1,b_2],h\in H}|g(x+h)-kx|\le ka. \tag{7}$$

Завдяки співвідношенням (3) і (4) та тому, що $g(x+h)$ і kx мають однаковий знак для всіх $x\in[-a,a]\setminus[b_1,b_2]$ і $h\in H$,

$$\max_{x\in[-a,a]\setminus[b_1,b_2],h\in H}|g(x+h)-kx|\le ka.$$

Звідси та з (7) випливає (2).

Тепер розглянемо випадок $g\in\mathcal{F}^-_{(\gamma,\delta)}$. Оскільки $-g$ належить $\mathcal{F}^+_{(-\delta,-\gamma)}$, то до функції $-g$ застосовні наведені вище міркування. Тому і в цьому випадку ми також приходимо до нерівності (2) тільки з від'ємним k.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай f належить $\mathcal{F}$ і T — довільне додатне число. Тоді для кожної функції $h\in P^0_T$ рівняння* (1) *має хоча б один розв'язок $x\in P^1_T$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні число $T>0$ і функцію $h\in P^0_T$. Завдяки лемі 1 існують такі дійсні числа $k\ne0$ і $a>0$, що

$$|f(x+\tau)-kx|\le|k|a \quad \text{для всіх} \quad x\in[-a,a] \quad \text{і} \quad \tau\in[-\|h\|_{C^0},\|h\|_{C^0}]. \tag{8}$$

Визначимо неперервний оператор $G\colon P^0_T\to P^0_T$ за допомогою формули

$$(Gx)(t)=-\frac{k}{|k|}\int\limits_{\{s\colon kt<ks\}}e^{k(t-s)}(f(x(s)+h(s))-kx(s))ds, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Легко перевірити, що $Gx\in P^1_T$ для всіх $x,h\in P^0_T$ і

$$\frac{d(Gx)(t)}{dt}=f(x(t)+h(t)), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Тому на підставі неперервності функції f на $\mathbb{R}$ (тоді ця функція обмежена на кожній обмеженій множині) і теореми Арцела [3] оператор $G\colon P^0_T\to P^0_T$ є цілком неперервним.

Очевидно, що задача про існування T-періодичного розв'язку рівняння (1) рівносильна задачі про існування T-періодичного розв'язку рівняння

$$x(t)=(Gx)(t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

На підставі (8) і (9)

$$G\left(B^0[0,a]\cap P^0_T\right)\subset B^0[0,a]\cap P^0_T.$$

Звідси з урахуванням повної неперервності оператора G і теореми Шаудера про нерухому точку [4] отримуємо

$$\left\{x\in P^0_T\colon x=Gx\right\}\ne\varnothing.$$

Оскільки на підставі (9) $Gx\in P^1_T$ для всіх $x\in P^0_T$, то

$$\left\{x\in P^1_T\colon x=Gx\right\}\ne\varnothing.$$

Лему 2 доведено.

Із лем 1 і 2, а також із їхніх доведень випливає наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай f належить $\mathcal{F}$. Тоді для кожної обмеженої замкненої множини $H \subset \mathbb{R}$ існує таке число $a > 0$, що якщо $h \in P_T^0$ (T — довільне додатне число) і $R(h) \subset H$, то рівняння* (1) *має хоча б один розв'язок $x \in P_T^1 \cap B^0[0, a]$.*

Послідовність функцій $x_k = x_k(t)$, $k \geq 1$, простору C^0 будемо називати *локально збіжною* до функції $x = x(t)$ простору C^0 при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.}, C^0} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо

$$\sup_{k \geq 1} \|x_k\|_{C^0} < +\infty$$

і для кожного числа $c > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{|t| \leq c} |x_k(t) - x(t)| = 0.$$

Лема 3. *Нехай r і R — довільні додатні числа. Для кожної послідовності функцій $x_n \in B^0[0, r] \cap B^1[0, R]$, $n \geq 1$, існують строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_k, $k \geq 1$, і функція $x \in B^0[0, r]$, для яких*

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc.}, C^0} x \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Доведення цієї леми, як і наступної, можна знайти в [5, 6].

Лема 4. *Нехай $f(x)$ — неперервна і строго зростаюча на $[a, b]$ функція. Тоді для кожного числа $\varepsilon \in (0, b - a)$ існує таке число $k > 0$, що*

$$f(u) - f(v) \geq k(u - v)$$

для всіх $u, v \in [a, b]$, для яких $u - v \geq \varepsilon$.

Наслідком леми 4 є наступне аналогічне твердження.

Лема 5. *Нехай $f(x)$ — неперервна і строго спадна на $[a, b]$ функція. Тоді для кожного числа $\varepsilon \in (0, b - a)$ існує таке число $k < 0$, що*

$$f(u) - f(v) \leq k(u - v)$$

для всіх $u, v \in [a, b]$, для яких $u - v \geq \varepsilon$.

4. Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільну функцію $h \in C^0$. Розглянемо довільні строго зростаючу послідовність додатних чисел T_n, $n \geq 1$, і послідовність функцій $h_n \in P_{T_n}^0$, $n \geq 1$, для яких

$$\lim_{n \to \infty} T_n = +\infty,$$

$$R(h_n) \subset \overline{R(h)}, \quad n \geq 1, \tag{10}$$

і

$$h_n \xrightarrow{\text{loc.}, C^0} h \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

На підставі наслідку 1 існують число $a > 0$ і функції

$$x_n \in P_{T_n}^1 \cap B^0[0, a], \quad n \geq 1, \tag{12}$$

для яких
$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(x_n(t) + h_n(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \tag{13}$$
Оскільки функція f неперервна на $\mathbb{R}$ і множина $M = [-a, a] + \overline{R(h)}$ компактна, то ця функція обмежена на M. Нехай
$$R = \max_{s \in M} |f(s)|.$$
Тоді завдяки (10), (12) і (13)
$$\sup_{n \geq 1} \left\| \frac{dx_n}{dt} \right\|_{C^0} \leq R.$$

Отже, на підставі леми 3 існують строго зростаюча послідовність натуральних чисел $(n_k)_{k \geq 1}$ і функція $x^* \in B^0[0, a]$, для яких
$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc.}, C^0} x^* \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{14}$$

Завдяки (13) для всіх $t \in \mathbb{R}$ і $k \geq 1$
$$x_{n_k}(t) - x_{n_k}(0) = \int\limits_0^t f(x_{n_k}(s) + h_{n_k}(s))ds.$$
Звідси на підставі (11), (14) і неперервності функції f на $\mathbb{R}$ отримуємо
$$x^*(t) - x^*(0) = \int\limits_0^t f(x^*(s) + h(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$
Отже, $x^*(t)$ — неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція. А оскільки згідно з (15)
$$\frac{dx^*(t)}{dt} \equiv f(x^*(t) + h(t)),$$
то $x^* \in C^1$.

Таким чином, завдяки включенню $f \in \mathcal{F}$ рівняння (1) для кожної функції $h \in C^0$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1$.

Теорему 1 доведено.

5. Доведення теореми 2. Нехай функція f є елементом множини $\mathcal{F}$ і строго монотонною. Зафіксуємо довільну функцію $h \in C^0$. На підставі теореми 1 рівняння (1) має хоча б один розв'язок $x \in C^1$.

Покажемо, що розв'язок $x \in C^1$ рівняння (1) єдиний.

Припустимо, що $x_1 \in C^1$ і $x_2 \in C^1$ — розв'язки рівняння (1) і для деякого $t_1 \in \mathbb{R}$
$$x_1(t_1) < x_2(t_1).$$
Розглянемо випадок, коли функція f є строго зростаючою на $\mathbb{R}$. Нехай $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — такий відрізок, що
$$R(x_1) + R(h) \subset [a, b] \tag{16}$$
і

$$R(x_2) + R(h) \subset [a, b]. \tag{17}$$

На підставі леми 4 існує таке число $k > 0$, що

$$f(u) - f(v) \geq k(u - v), \tag{18}$$

якщо $u, v \in [a, b]$ і $u - v \geq x_2(t_1) - x_1(t_1)$. Оскільки

$$\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \equiv f(x_2(t) + h(t)) - f(x_1(t) + h(t)) \tag{19}$$

і функція f строго зростає на $\mathbb{R}$, то на підставі (16), (17) і (18)

$$\frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} \geq k(x_2(t) - x_1(t)) \tag{20}$$

для всіх $t \geq t_1$. Співвідношення (20) суперечить (16) і (17), оскільки у випадку виконання (20)

$$x_2(t) - x_1(t) \geq e^{k(t-t_1)}(x_2(t_1) - x_1(t_1)), \quad t \geq t_1.$$

Отже, у випадку, коли строго монотонна функція f є зростаючою на $\mathbb{R}$, припущення про неєдиність розв'язку рівняння (1) хибне.

Далі розглянемо випадок, коли функція f є строго спадною на $\mathbb{R}$. Нехай $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — такий відрізок, що виконуються співвідношення (16) і (17).

На підставі леми 5 існує таке число $k < 0$, що

$$f(u) - f(v) \leq k(u - v), \tag{21}$$

якщо $u, v \in [a, b]$ і $u - v \geq x_2(t_1) - x_1(t_1)$. Оскільки для функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ виконується співвідношення (19) і функція f строго спадає на $\mathbb{R}$, то на підставі (16), (17) і (21)

$$\frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} \leq -|k|(x_2(t) - x_1(t)) \tag{22}$$

для всіх $t \leq t_1$. Співвідношення (22) суперечить (16) і (17), оскільки у випадку виконання цього співвідношення

$$x_2(t) - x_1(t) \geq e^{-|k|(t-t_1)}(x_2(t_1) - x_1(t_1)), \quad t \leq t_1.$$

Таким чином, припущення про неєдиність розв'язку рівняння (1) хибне і у випадку строго спадної функції f.

Отже, перша частина твердження теореми 2 є правильною.

Далі будемо вважати, що в рівнянні (1) $h \in B^0$. На підставі попередніх міркувань рівняння (1) має єдиний розв'язок $y \in C^1$.

Припустимо, что $y \notin B^1$. Зазначимо, що випадок $y \in B^0$ і $\dfrac{dy}{dt} \notin B^0$ неможливий, оскільки

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv f(y(t) + h(t)) \tag{23}$$

і права частина (23) внаслідок неперервності f і майже періодичності функції $y + h$ майже періодична.

Отже, $y \notin B^0$ на підставі припущення $y \notin B^1$.

Тоді існує послідовність $\left(S_{h_p} y\right)_{p\geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p} y\right)_{p\geq 1}$ буде розбіжною. Тому для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma > 0$

$$\left\|S_{k_{p_r}} y - S_{k_{q_r}} y\right\|_{C^0} \geq \gamma, \quad r \geq 1.$$

Не обмежуючи загальності доведення можна вважати, що

$$|y(k_{p_r}) - y(k_{q_r})| \geq \frac{\gamma}{2}, \quad r \geq 1, \tag{24}$$

та існує функція $h^* \in B^0$, для якої

$$\lim_{r\to\infty} \|S_{k_{p_r}} h - h^*\|_{C^0} = \lim_{r\to\infty} \|S_{k_{q_r}} h - h^*\|_{C^0} = 0. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$\frac{d\left(S_{k_{p_r}} y\right)(t)}{dt} \equiv f\left(\left(S_{k_{p_r}} y\right)(t) + \left(S_{k_{p_r}} h\right)(t)\right), \quad r \geq 1, \tag{26}$$

і

$$\frac{d\left(S_{k_{q_r}} y\right)(t)}{dt} \equiv f\left(\left(S_{k_{q_r}} y\right)(t) + \left(S_{k_{q_r}} h\right)(t)\right), \quad r \geq 1. \tag{27}$$

Із цих співвідношень, неперервності функції f на $\mathbb{R}$ і обмеженості послідовностей $\left(S_{k_{q_r}} y\right)_{r\geq 1}$, $\left(S_{k_{q_r}} y\right)_{r\geq 1}$, $\left(S_{k_{q_r}} h\right)_{r\geq 1}$, $\left(S_{k_{q_r}} h\right)_{r\geq 1}$ випливає, що для деякого числа $R > 0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}, r\geq 1} \left|\frac{d\left(S_{k_{p_r}} y\right)(t)}{dt}\right| \leq R$$

і

$$\sup_{t\in\mathbb{R}, r\geq 1} \left|\frac{d\left(S_{k_{q_r}} y\right)(t)}{dt}\right| \leq R.$$

Тому на підставі леми 3, не обмежуючи загальності доведення, можна вважати, що для деяких функцій $u_1,\ u_2 \in C^0$

$$S_{k_{p_r}} y \xrightarrow{\text{loc.}, C^0} u_1 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{28}$$

і

$$S_{k_{q_r}} y \xrightarrow{\text{loc.}, C^0} u_2 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{29}$$

Звідси і з (24) випливає, що

$$|u_1(0) - u_2(0)| \geq \frac{\gamma}{2} > 0. \tag{30}$$

На підставі (26) і (27)

$$\left(S_{k_{p_r}} y\right)(t) - \left(S_{k_{p_r}} y\right)(0) \equiv \int\limits_0^t f\left(\left(S_{k_{p_r}} y\right)(s) + \left(S_{k_{p_r}} h\right)(s)\right) ds$$

і

$$\left(S_{k_{q_r}} y\right)(t) - \left(S_{k_{q_r}} y\right)(0) \equiv \int\limits_0^t f\left(\left(S_{k_{q_r}} y\right)(s) + \left(S_{k_{q_r}} h\right)(s)\right) ds.$$

Тому на підставі неперервності f на $\mathbb{R}$ та співвідношень (25), (28) і (29)

$$u_1(t) - u_1(0) \equiv \int\limits_0^t f(u_1(s) + h^*(s))ds,$$

$$u_2(t) - u_2(0) \equiv \int\limits_0^t f(u_2(s) + h^*(s))ds$$

і, отже,

$$\frac{du_1(t)}{dt} \equiv f(u_1(t) + h^*(t)),$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} \equiv f(u_2(t) + h^*(t)).$$

Ми отримали, що рівняння (1) у випадку $h = h^*$ і $h^* \in B^0$ згідно з (30) має два різних розв'язки, що неможливо.

Таким чином, припущення, що $y \notin B^1$, є хибним.

Отже, друга частина твердження теореми 2 є правильною.

Нарешті, покажемо правильність третьої частини твердження теореми 2.

Зафіксуємо довільну функцію $u \in C^0$. Розглянемо функції $u_n \in C^0$, $n \geq 1$, для яких

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C^0} = 0. \tag{31}$$

Нехай x_u і x_{u_n} — розв'язки диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_u(t)}{dt} = f\left(x_u(t) + u(t)\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$\frac{dx_{u_n}(t)}{dt} = f\left(x_{u_n}(t) + u_n(t)\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

відповідно.

Припустимо, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_{u_n} - x_u\|_{C^1} \neq 0. \tag{32}$$

Тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_{u_n} - x_u\|_{C^0} \neq 0. \tag{33}$$

Дійсно, якщо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_{u_n} - x_u\|_{C^0} = 0, \tag{34}$$

то на підставі (31), тотожностей

$$\frac{dx_u(t)}{dt} \equiv f\left(x_u(t) + u(t)\right), \tag{35}$$

$$\frac{dx_{u_n}(t)}{dt} \equiv f\left(x_{u_n}(t) + u_n(t)\right) \tag{36}$$

і неперервності функції f на $\mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{dx_{u_n}(t)}{dt} - \frac{dx_u(t)}{dt} \right| = 0,$$

що разом з (34) суперечить (32).

Отже, співвідношення (33) виконується. У цьому випадку існують додатне число μ, строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_p, $p \geq 1$, і дійсні числа t_p, $p \geq 1$, для яких

$$\left| x_{u_{n_p}}(t_p) - x_u(t_p) \right| \geq \mu, \quad p \geq 1.$$

Далі розглянемо випадок, коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є строго зростаючою.

Нехай $[a, b]$ — такий відрізок, що

$$R\left(x_u\right) + R(u) \subset [a, b] \tag{37}$$

і

$$R\left(x_{u_{n_p}}\right) + R\left(u_{n_p}\right) \subset [a, b], \quad p \geq 1. \tag{38}$$

За лемою 4 існує додатне число k, для якого

$$f(u) - f(v) \geq k(u - v), \tag{39}$$

якщо u, $v \in [a, b]$ і $|u - v| \geq \dfrac{\mu}{2}$.

Візьмемо такі достатньо мале число $\nu > 0$ і натуральне число p_0, щоб

$$\left\| u_{n_p} - u \right\|_{C^0} \leq \nu \leq \frac{\mu}{2} \tag{40}$$

для всіх $p \geq p_0$.

Не обмежуючи загальності доведення можна вважати, що

$$x_{u_{n_{p_0}}}\left(t_{p_0}\right) - x_u\left(t_{p_0}\right) \geq \mu. \tag{41}$$

З огляду на тотожності (35), (36) і співвідношення (37)–(41) при $t = t_{p_0}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\left(x_{u_{n_{p_0}}}(t) - x_u(t)\right)}{dt} &= \left(f\left(x_{u_{n_{p_0}}}(t) + u_{n_{p_0}}(t)\right) - f\left(x_u(t) + u(t)\right)\right) \geq \\ &\geq k\left(\left(x_{u_{n_{p_0}}}(t) - x_u(t)\right) + \left(u_{n_{p_0}}(t) - u(t)\right)\right) \geq \\ &\geq k\left(\left(x_{u_{n_{p_0}}}(t) - x_u(t)\right) - \nu\right) \geq k(\mu - \nu) > 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Тому на підставі (37), (38) і (41) функція $x_{u_{n_{p_0}}}(t) - x_u(t)$ є зростаючою на проміжку $[t_{p_0}, +\infty)$. Звідси з урахуванням (37), (38), (41) і (42) отримуємо

$$x_{u_{n_{p_0}}}(t) - x_u(t) \geq \mu + k(\mu - \nu)(t - t_{p_0}), \quad t \geq t_{p_0},$$

що суперечить обмеженості функцій $x_{u_{n_{p_0}}}(t)$ і $x_u(t)$.

Отже, припущення про виконання співвідношення (32) у випадку строго зростаючої функції f є хибним.

Далі розглянемо випадок, коли функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є строго спадною. Якщо в рівнянні (1) використати підстановку $t = -s$, де s — нова змінна, то прийдемо до дослідженого раніше випадку. На підставі цього можна вважати, що і третя частина твердження теореми 2 є правильною.

Теорему 2 доведено.

6. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Задачу про обмежені та майже періодичні розв'язки диференціального рівняння (1) розглянуто вперше. Її розв'язок також можна отримати за допомогою інших методів. Наприклад, теорему 1 можна довести, використавши принцип Важевського [7] або теорему про нерухому точку для c-неперервних відображень [8]. Другу частину твердження теореми 2 можна встановити за допомогою теореми Амеріо [9] (з використанням $\mathcal{H}$-класу рівняння (1) та першої частини твердження теореми 2) або за допомогою результатів автора про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [10, 11] (без використання $\mathcal{H}$-класу рівняння (1)).

Близькою до розглянутої задачі є задача про обмежені та майже періодичні розв'язки диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

що досліджувалося в [5, 6, 12]. Тут h — елемент простору C^0 або B^0. Однак рівняння (1) не зводиться до рівняння (43), оскільки в (1) функція $h \in C^0$ може не бути елементом простору C^1.

У випадку ліпшицевої функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ умови існування та єдиності розв'язків рівняння (43) у просторах C^0 і $L_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, наведено у [13] і [14].

Необхідні і достатні умови існування та ε-єдиності обмежених розв'язків рівняння (43) отримано у [15].

Перші теореми про майже періодичні розв'язки для звичайних лінійних майже періодичних диференціальних рівнянь були доведені Фаваром у роботі [16], а для нелінійних майже періодичних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [9]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [9] також використовується умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь. Зазначимо, що рівняння (1) у випадку $h \in B^0$ є майже періодичним.

У випадку довільного банахового простору умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних рівнянь (без використання $\mathcal{H}$-класів досліджуваних рівнянь) отримано у роботах [10, 11, 17, 18].

У монографії [8] та статтях [19 – 22] для дослідження обмежених розв'язків диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь запропоновано метод локальної лінійної апроксимації, що дає змогу встановлювати умови обмеженості розв'язків нелінійних рівнянь.

Нелокальним теоремам про майже періодичні розв'язки систем нелінійних майже періодичних диференціальних рівнянь присвячено монографію М. О. Красносельського, В. Ш. Бурди і Ю. С. Колесова [23], а для диференціальних рівнянь з монотонними нелінійностями — монографію Ю. В. Трубникова і А. І. Перова [24].

Важливі загальні результати про обмежені і майже періодичні розв'язки лінійних рівнянь належать Б. М. Левітану [2], Е. М. Мухамадієву [25] та В. В. Жикову [26].

Література

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119–147. II Teil. – P. 383 – 409.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
3. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
4. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 523 – 539.
6. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **65**, № 1–3. – P. 333 – 341.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2011. – 342 с.
9. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.
11. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139 – 160.
12. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1999. – **54**, № 4. – С. 181–182.
13. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions of the Lipschitz invertibility of the nonlinear differential operator $d/dt - f$ in the space of bounded functions on the real axis // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 272 – 277.
14. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейного дифференциального отображения $d/dt - f$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ // Мат. заметки. – 2003. – **73**, № 6. – С. 891 – 903.
15. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и ε-единственности ограниченных решений нелинейного уравнения $x' = f(x) - h(t)$ // Мат. заметки. – 2011. – **90**, № 1. – С. 137 – 142.
16. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31 – 81.
17. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384 – 393.
18. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179 – 192.
19. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541 – 1556.
20. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
21. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1685 – 1698.
22. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 3. – С. 135 – 160.
23. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
24. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
25. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
26. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.

Одержано 17.03.16