УДК 517.9

М. М. Бокало, О. В. Ільницька (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ВИРОДЖЕННЯМ У ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ

We study boundary-value problem with Dirichlet condition for nonlinear parabolic equations with variable delay (i.e., delay is a function of time) and degeneration at the initial time. The existence and uniqueness of the classical solution of this problem are proved. A priori estimates of this solution are obtained.

Исследована краевая задача с условием Дирихле для нелинейных параболических уравнений с переменным запаздыванием и вырождением в начальный момент времени. Доказаны существование и единственность классического решения такой задачи и получены его априорные оценки.

Вступ. Нелінійні вироджувані диференціальні рівняння використовують при моделюванні різних процесів, зокрема, опріснення морської води, руху рідин та газів у пористих середовищах. Такі рівняння виникають і в теоріях еластичності, відносності та оптимізації [13]. Параболічні рівняння із виродженням та задачі для них досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [1, 4, 8, 11, 13, 18]).

Наявність запізнення в диференціальних рівняннях, що описують певні динамічні процеси, є свідченням того, що стан еволюційної системи в актуальний момент часу залежить від станів в попередні моменти часу. Рівняння із запізненням використовують, зокрема, для моделювання харчових ланцюгів [17], реакції імунної системи людського організму на вірус імунодефіциту [14, 16, 17]. В останні роки інтенсивно розвивається математичний апарат для дослідження рівнянь та систем із запізненням (див., наприклад, [2, 3, 9, 10, 12, 15, 19, 21 – 24]). На даний час досить повно розроблено теорію диференціальних рівнянь зі сталим запізненням. Сталість запізнення, як правило, є додатковим припущенням для спрощення дослідження, що не мотивовано реальними процесами. Більш природними є рівняння зі змінним запізненням. Звичайні диференціальні рівняння зі змінним запізненням досліджуються досить активно [5, 7, 17], але рівняння з частинними похідними зі змінним запізненням не є достатньо вивченими [3].

Наскільки відомо авторам, задачі для параболічних вироджуваних (за рахунок коефіцієнтів) рівнянь із запізненням раніше не вивчались. У даній роботі досліджено мішану задачу для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням, що вироджуються в початковий момент часу. Доведено існування та єдиність класичного розв’язку такої задачі, а також отримано його апріорні оцінки.

У першому пункті наведено основні позначення та факти. Постановка задачі, яка розглядається в роботі, та формулювання основних результатів щодо неї містяться у другому пункті. У третьому пункті доведено допоміжні твердження, а в четвертому наведено безпосереднє обґрунтування основних результатів.

1. Основні позначення та допоміжні факти. Нагадаємо деякі позначення і поняття, які ми будемо використовувати. Під $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, розумітимемо лінійний простір, складений із впорядкованих наборів $z = (z_1, \ldots, z_k)$ дійсних чисел, з нормою $|z| = \big(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2\big)^{1/2}$.

Через $C(H)$, де H — множина в $\mathbb{R}^k$, позначатимемо лiнiйний простiр неперервних на H функцiй. Якщо K — компакт в $\mathbb{R}^k$, то на $C(K)$ задаємо норму $\|v\|_{C(K)} := \max_{z\in K}|v(z)|$, з якою цей простiр є банаховим. Кажемо, що послiдовнiсть функцiй $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ збiгається до v в $C(H)$, де H — довiльна некомпактна множина в $\mathbb{R}^k$, якщо $\|v_m - v\|_{C(K)} \underset{m\to\infty}{\to} 0$ для будь-якого компакту $K \subset H$.

Нехай $\alpha \in (0,1]$, K — компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Пiд $C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ розумiтимемо банахiв простiр, що є пiдпростором $C(K)$ i складається з функцiй $v(x,t)$, $(x,t) \in K$, зi скiнченною нормою

$$\|v\|_{\alpha,\alpha/2}^{K} := \|v\|_{C(K)} + \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in K\\ 0<|x-x'|\le\rho}} \frac{|v(x,t)-v(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in K\\ 0<|t-t'|\le\rho}} \frac{|v(x,t)-v(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}},$$

де $\rho > 0$ — довiльне фiксоване число (див. [6, с. 16, 17]).

Через $C_{\mathrm{loc}}^{\alpha,\alpha/2}(H)$, де H — довiльна некомпактна множина в $\mathbb{R}^{n+1}$, позначатимемо простiр таких функцiй v, що $v \in C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ для довiльного компакту $K \subset H$. Пiд $C^{2,1}(D)$ $\big($вiдповiдно, $C^{2,1}(\overline{D})\big)$, де D — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, розумiтимемо лiнiйний простiр функцiй $v(x,t)$, $(x,t) \in D$ $\big($вiдповiдно, $(x,t) \in \overline{D}\big)$, якi разом зi своїми похiдними $v_{x_k}, v_{x_k x_l}$, $k,l = \overline{1,n}$, v_t визначенi i неперервнi на D (вiдповiдно, $\overline{D}$). Через $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, якщо D — обмежена область в $\mathbb{R}^{n+1}$, позначатимемо банахiв простiр функцiй v з простору $C^{2,1}(\overline{D})$ зi скiнченною нормою

$$\|v\|_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{\overline{D}} := \|v\|_{C(\overline{D})} + \sum_{k=1}^{n}\|v_{x_k}\|_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{D}} + \sum_{k,l=1}^{n}\|v_{x_k x_l}\|_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{D}} + \|v_t\|_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{D}}.$$

Пiд $C_{\mathrm{loc}}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(G)$, де G — область в $\mathbb{R}^{n+1}$ або об'єднання областi з частиною своєї межi, розумiтимемо простiр таких функцiй v, що $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ для довiльної обмеженої областi D такої, що $\overline{D} \subset G$.

Твердження 1. *Нехай послiдовнiсть функцiй $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою в $C^{\alpha,\alpha/2}(K)$, де K — компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, тобто*

$$\|u_m\|_{\alpha,\alpha/2}^{K} \le C_1, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $C_1 > 0$ — стала, що не залежить вiд m. Тодi iснують пiдпослiдовнiсть $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послiдовностi $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ та функцiя $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ такi, що $u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\to} u$ в $C(K)$.

Доведення. Дане твердження випливає з теореми Арцела – Асколi.

Твердження 2. *Нехай H — довiльна некомпактна множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $H = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, де $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ — сiм'я компактiв, причому $K_i \subset K_{i+1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ — послiдовнiсть функцiй з $C_{\mathrm{loc}}^{\alpha,\alpha/2}(H)$ така, що для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ послiдовнiсть звужень членiв даної послiдовностi на K_i є обмеженою в $C^{\alpha,\alpha/2}(K_i)$, тобто*

$$\|u_m\|_{\alpha,\alpha/2}^{K_i} \le C_2, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $C_2 > 0$ — стала, яка не залежить вiд m, але може залежати вiд K_i. Тодi iснують пiдпослiдовнiсть $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послiдовностi $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ та функцiя $u \in C_{\mathrm{loc}}^{\alpha,\alpha/2}(H)$ такi, що

$$u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\to} u \quad \text{в} \quad C(H). \tag{1}$$

Доведення. Будемо використовувати діагональний процес. Згідно з твердженням 1, з послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність, звуження членів якої на K_1 збіжні в $C(K_1)$ до функції $u^1 \in C^{\alpha,\alpha/2}(K_1)$. Далі, з цієї підпослідовності вибираємо підпослідовність, звуження членів якої на K_2 збіжні в $C(K_2)$ до $u^2 \in C^{\alpha,\alpha/2}(K_2)$. Очевидно, що $u^2 = u^1$ на K_1. Продовжуючи цей процес далі, отримуємо послідовність підпослідовностей послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, кожна з яких, починаючи з другої, є підпослідовністю попередньої і рівномірно збігається на відповідному компакті із сім'ї $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$. Також отримаємо сім'ю функцій $\{u^i \in C^{\alpha,\alpha/2}(K_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, які є границями відповідних підпослідовностей. Зазначимо, що $u^{i+1} = u^i$ на K_i для кожного $i \in \mathbb{N}$. Складемо з отриманих підпослідовностей нескінченну матрицю так, що у i-му рядку буде знаходитись підпослідовність, збіжна до u^i в $C(K_i)$. Очевидно, що елементи головної діагоналі цієї матриці утворюють послідовність $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$, збіжну до u^i в $C(K_i)$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Побудуємо функцію $u \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(H)$ за правилом: для кожного $x \in H$ вибираємо $i \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in K_i$, і визначаємо $u(x) := u^i(x)$. Легко переконатись, що для функції u виконується (1).

Твердження 2 доведено.

2. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, з межею $\partial\Omega$, $T > 0$ — деяке число. Покладемо $Q := \Omega \times (0,T]$, $\widetilde{Q} := \overline{\Omega} \times (0,T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T]$. Нехай $\tau\colon (0,T] \to \mathbb{R}$ — задана неперервна функція така, що $0 \leq \tau(t) < t$ для всіх $t \in (0,T]$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u \in C(\widetilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := p(x,t)u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)u_{x_kx_l}(x,t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)u_{x_k}(x,t) + a_0(x,t)u(x,t) -$$

$$-g\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))\big) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

крайову умову

$$Ru(x,t) := u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{3}$$

та аналог початкової умови

$$\limsup_{t\to 0+} \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t)| < \infty \tag{4}$$

$\big($зауважимо, що умова (4) рівносильна умові $\sup_{(x,t)\in\widetilde{Q}} |u(x,t)| < \infty\big)$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

$(\mathcal{A})$ a_{kl}, a_k, a_0 — неперервні на Q функції, $a_{kl} = a_{lk}$, $k,l = \overline{1,n}$, $\inf_{(x,t)\in Q} a_0(x,t) > 0$ і

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geq \mu(t)\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \quad \forall (x,t) \in Q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

де $\mu \in C((0,T])$, $\mu(t) > 0$ для кожного $t \in (0,T]$;

$(\mathcal{T})$ $\tau\colon (0,T] \to \mathbb{R}$ — така неперервна функція, що $0 \leq \tau(t) < t$ для всіх $t \in (0,T]$;

$(\mathcal{P})$ $p \in C(Q)$, $p(x,t) > 0$ для кожного $(x,t) \in Q$, $\lim_{t\to 0} p(x,t) = 0$ для кожного $x \in \Omega$ та, крім того, існує така функція $\varphi \in C((0,T])$, що

$$\int_0^T \varphi(s)ds = +\infty, \qquad \sup_{t\in(0,T]} \int_{t-\tau(t)}^{t} \varphi(s)ds < \infty,$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} p(x,t)\varphi(t) < \infty, \qquad \varphi(t) > 0 \quad \forall t \in (0,T];$$

$(\mathcal{G})$ $g(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\Omega\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, — неперервна за всіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують визначені на Q невід'ємні функції g_1, g_2 такі, що

$$0 \le g_\xi(x,t,\xi,\eta) \le g_1(x,t) \quad \forall (x,t)\in Q \quad \forall\,(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,$$

$$0 \le g_\eta(x,t,\xi,\eta) \le g_2(x,t) \quad \forall (x,t)\in Q \quad \forall\,(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\inf_{(x,t)\in Q}(a_0(x,t)-g_1(x,t)) =: a_0^- > 0,$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty;$$

крім того, $g(x,t,0,0)=0$ для будь-яких $(x,t)\in Q$;

$(\mathcal{F})$ $f\in C(Q)$, $h\in C(\Sigma)$ — обмежені функції.

***Зауваження* 1.** Прикладом функцій, що задовольняють умову $(\mathcal{P})$, є $p\in C(Q)$, $p(x,t)>0$ для кожного $(x,t)\in Q$, $p(x,t)\sim t^\alpha$ при $t\to 0+$ рівномірно по $x\in\Omega$, $\varphi(t)=t^{-\alpha}$, $t\in(0,T]$, $\tau(t)\sim t^\gamma$ при $t\to 0+$, де $\gamma>\alpha>1$ — деякі числа.

***Зауваження* 2.** Умову $(\mathcal{G})$ задовольняє, зокрема, функція $g(x,t,\xi,\eta)=g_1(x,t)\xi+g_2(x,t)\eta$, де функції g_1, g_2 такі, як в умові $(\mathcal{G})$, і, як наслідок, цю умову задовольняє функція $g=0$.

Тепер сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$ *і* $a_0^- - g_2^+ > 0$. *Припустимо, що* u_1, u_2 *— розв'язки задач, які відрізняються від задачі* (2)–(4) *лише тим, що* f, h *замінено відповідно на* f_1, h_1 *та* f_2, h_2 *з такими ж властивостями, як* f, h (*див.* $(\mathcal{F})$). *Тоді виконується нерівність*

$$\min\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\inf_{(y,s)\in Q}\big(f_1(y,s)-f_2(y,s)\big), \inf_{(y,s)\in\Sigma}\big(h_1(y,s)-h_2(y,s)\big), 0\right\} \le$$

$$\le u_1(x,t)-u_2(x,t) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q}\big(f_1(y,s)-f_2(y,s)\big), \sup_{(y,s)\in\Sigma}\big(h_1(y,s)-h_2(y,s)\big), 0\right\}, \quad (x,t)\in Q. \tag{5}$$

Зауважимо, що з цієї теореми безпосередньо випливає неперервна залежність розв'язку задачі (2)–(4) від початкових даних.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і, крім того,*

$$f_1(x,t)\le f_2(x,t) \quad \forall (x,t)\in Q, \qquad h_1(x,t)\le h_2(x,t) \quad \forall (x,t)\in\Sigma.$$

Тоді виконується нерівність

$$u_1(x,t)\le u_2(x,t) \quad \forall (x,t)\in Q.$$

***Наслідок* 2.** *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ *і* $a_0^- - g_2^+ > 0$. *Тоді для розв'язку задачі* (2)–(4) *правильною є оцінка*

$$\min\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\right\} \le u(x,t) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\right\}, \quad (x,t)\in Q.$$

***Наслідок* 3.** *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ *і* $a_0^- - g_2^+ > 0$. *Тоді задача* (2)–(4) *має не більше одного розв'язку.*

Згідно з означеннями з п. 1, під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ розумітимемо простір таких функцій $v \in C(Q)$, що для строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) та будь-якого числа $\delta \in (0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega'} \times [\delta, T]$ належить простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega'}\times[\delta,T])$, а під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})$ $\big($відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)\big)$ — простір таких функцій $v \in C(\widetilde{Q})$ $\big($відповідно, $C(\Sigma)\big)$, що для будь-якого числа $\delta \in (0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega}\times[\delta,T]$ $\big($відповідно, $\partial\Omega\times[\delta,T]\big)$ належить простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[\delta,T])$ $\big($відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}\big(\partial\Omega\times[\delta,T]\big)\big)$.

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ розумітимемо простір таких функцій $v \in C^{2,1}(Q)$, що їх похідні v_{x_k}, $v_{x_kx_l}$, $k,l=\overline{1,n}$, v_t, належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ, η та для будь-якого $\delta\in(0,T)$ існує така додатна стала $L = L(\widetilde{g})$, що

$$\big|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta) - \widetilde{g}(y,s,\overline{\xi},\overline{\eta})\big| \le L\big(|x-y|^\alpha + |t-s|^{\alpha/2} + |\xi-\overline{\xi}| + |\eta-\overline{\eta}|\big)$$

для довільних $(x,t,\xi,\eta),(y,s,\overline{\xi},\overline{\eta})$ з $\overline{\Omega}\times[\delta,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}((0,T])$ простір функцій, що задовольняють умову Ліпшиця на кожному відрізку проміжку $(0,T]$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ *і* $a_0^- - g_2^+ > 0$ *та*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s \in C(\widetilde{Q})$, $k,l,s=\overline{1,n}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $\tau \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}((0,T])$.

Крім того, припустимо, що для деякого $\alpha\in(0,1]$:

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_4)$ $p, a_{kl}, a_k, a_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})$, $k,l=\overline{1,n}$, $g\in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})$, $h \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2)–(4), *що належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

3. Допоміжні твердження. Розглянемо таку задачу: знайти функцію $w\in C(\widetilde{Q})\cap C^{2,1}(Q)$, що задовольняє рівняння

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0(x,t)w(x,t) - \widehat{g}(x,t)w(x,t-\tau(t)) = \widehat{f}(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{6}$$

та умови

$$w(x,t) = \widehat{h}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{7}$$

$$\limsup_{t\to 0+} \max_{x\in\overline{\Omega}} |w(x,t)| < \infty. \tag{8}$$

Ми припускаємо, що функції $a_{k,l},\ a_k,\ k,l=\overline{1,n},\ \tau,\ p$ мають ті ж властивості, що вказані в умовах відповідно $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{T})$ і $(\mathcal{P})$, функції $\widehat{f},\ \widehat{h}$ мають такі ж властивості, як відповідно f, h (див. $\big(\mathcal{F}\big)$), а функції $\widehat{a}_0,\ \widehat{g}$ задовольняють умови

$$\widehat{a}_0, \widehat{g} \in C(Q), \quad \widehat{a}_0^- := \inf_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) > -\infty, \qquad \widehat{g}^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \widehat{g}(x,t) < +\infty.$$

Зауваження 3. Якщо $p(x,t) \ge p_0 > 0$ для всіх $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$, то можна не накладати умову $\tau(t) < t$, а умову (8) замінити початковою умовою

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0, \tag{9}$$

де E_0 — множина, яка складається з таких чисел $t-\tau(t)$, що $t-\tau(t) \le 0$ і $t \in (0,T]$, а також числа 0. Таку задачу досліджено у [3] і там, зокрема, отримано такий результат.

Твердження A [3]. *Нехай* $\widehat{g} \ge 0$ *на* Q *і* $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. *Тоді для довільного розв'язку* w *задачі* (6), (7), (9) *виконується оцінка*

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s)\in Q} \widehat{f}(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} \widehat{h}(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s),\ 0\right\} \le w(x,t) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \sup_{(y,s)\in Q} \widehat{f}(y,s),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} \widehat{h}(y,s),\ \max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s), 0\right\},$$

$$(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T]).$$

Твердження 3. *Нехай* $\widehat{g} \ge 0$ *на* Q *і* $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. *Тоді для розв'язку задачі* (6)–(8) *справджується оцінка*

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s)\in Q} \widehat{f}(y,s),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma} \widehat{h}(y,s), 0\right\} \le w(x,t) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \sup_{(y,s)\in Q} \widehat{f}(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma} \widehat{h}(y,s), 0\right\}, \quad (x,t) \in Q. \tag{10}$$

Доведення. Введемо такі позначення:

$$\theta(t) := \int_T^t \varphi(s)ds, \qquad \varkappa(t) := \int_{t-\tau(t)}^t \varphi(s)ds, \quad t \in (0,T].$$

На підставі умови $(\mathcal{P})$ маємо, що $\theta(t) \le 0$ при $t \in (0,T]$, θ монотонно зростає на $(0,T]$, $\theta(T) = 0$, $\theta(t) \to -\infty$ при $t \to -\infty$, $\varkappa(t) > 0$ при $t \in (0,T]$ та є обмеженою.

Нехай w — розв'язок задачі (6)–(8) і $M > 0$ — така стала, що

$$|w(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \widetilde{Q}. \tag{11}$$

Позначимо

$$w^\mu(x,t) := w(x,t)e^{\mu\theta(t)}, \quad (x,t) \in \widetilde{Q},$$

де $\mu > 0$ — поки що довільне число. Тоді

$$w(x,t) := w^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)}, \quad (x,t) \in \widetilde{Q}. \tag{12}$$

Підставивши у рівність (6) вираз w, заданий формулою (12), та врахувавши рівності

$$w_t(x,t) = w_t^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)} - \mu\varphi(t)\, w^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)}, \qquad w_{x_k}(x,t) = w_{x_k}^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$w(x,t-\tau(t)) = w^\mu(x,t-\tau(t))e^{-\mu\int_T^{t-\tau(t)}\varphi(s)ds} \equiv e^{\mu\varkappa(t)}w^\mu(x,t-\tau(t))e^{-\mu\theta(t)}, \quad t \in (0,T],$$

матимемо

$$p(x,t)\, w_t^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)\, w_{x_kx_l}^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)} +$$

$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)\, w_{x_k}^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)} + \big(\widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t)\big)\, w^\mu(x,t)e^{-\mu\theta(t)} -$$

$$-\widehat{g}(x,t)e^{\mu\varkappa(t)}\, w^\mu(t-\tau(t))e^{-\mu\theta(t)} = \widehat{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Домноживши цю рівність на $e^{\mu\theta(t)}$ і позначивши

$$\widehat{a}_0^\mu(x,t) := \widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t),$$

$$\widehat{g}^\mu(x,t) := \widehat{g}(x,t)e^{\mu\varkappa(t)}, \qquad f^\mu(x,t) := \widehat{f}(x,t)e^{\mu\theta(t)} \quad \forall (x,t) \in Q,$$

отримаємо

$$p(x,t)\, w_t^\mu(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)\, w_{x_kx_l}^\mu(x,t) + \sum_{k=1}^n a_k(x,t)\, w_{x_k}^\mu(x,t) +$$

$$+ \widehat{a}_0^\mu(x,t)\, w^\mu(x,t) - \widehat{g}^\mu(x,t)\, w^\mu(t-\tau(t)) = f^\mu(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{13}$$

З умови (7) та співвідношення (12) маємо

$$w^\mu(x,t) = h^\mu(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{14}$$

де $h^\mu(x,t) := \widehat{h}(x,t)e^{\mu\theta(t)}$, $(x,t) \in \Sigma$.

Нехай $\varepsilon \in (0,T)$ — довільне число. Позначимо через E_ε множину, що складається з таких чисел $t-\tau(t)$, що $t-\tau(t) < \varepsilon$ при $t \geq \varepsilon$, а також числа ε. Покладемо

$$Q_\varepsilon := \Omega \times (\varepsilon, T] \quad \big(\text{тоді} \quad \overline{Q_\varepsilon} := \overline{\Omega} \times [\varepsilon, T]\big), \quad \Sigma_\varepsilon := \partial\Omega \times (\varepsilon, T].$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $w \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon,T])\big) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$, яка задовольняє рівняння

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k w_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0^{\mu}(x,t)w(x,t) - \widehat{g}^{\mu}(x,t)w(t-\tau(t)) = f^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \tag{15}$$

крайову умову

$$w(x,t) = h^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_\varepsilon, \tag{16}$$

і початкову умову

$$w(x,t) = w^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon. \tag{17}$$

Ця задача вже без виродження, а тому можна застосувати результати, одержані у роботі [3]. Переконаємося, що для розв'язків задачі (15)–(17) при досить малих значеннях μ виконуються умови твердження A роботи [3]. Справді, з умови $\widehat{g} \geq 0$ на Q безпосередньо випливає нерівність $\widehat{g}^{\mu} \geq 0$ на Q. Покажемо, що існує таке $\mu^* > 0$, що $\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} > 0$ для будь-якого $\mu \in (0, \mu^*]$, де $\widehat{a}_0^{\mu,-} := \inf_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0^{\mu}(x,t)$, $\widehat{g}^{\mu,+} := \sup_{(x,t)\in Q} \widehat{g}^{\mu}(x,t)$. Для цього введемо позначення $(p\varphi)^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \big(p(x,t)\varphi(t)\big)$, $\varkappa^+ := \sup_{t\in(0,T]} \varkappa(t)$. Легко бачити, що

$$\widehat{a}_0^{\mu,-} = \inf_{(x,t)\in Q} \big(\widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t)\big) \geq \widehat{a}_0^{-} - \mu(p\varphi)^+, \quad \mu > 0, \tag{18}$$

а також

$$\widehat{g}^{\mu,+} = \sup_{(x,t)\in Q} \big(\widehat{g}(x,t)e^{\mu\varkappa(t)}\big) \leq \widehat{g}^{+}e^{\mu\varkappa^+}, \quad \mu > 0. \tag{19}$$

З (18) і (19) отримуємо $\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} \geq \widehat{a}_0^{-} - \mu(p\varphi)^+ - \widehat{g}^{+}e^{\mu\varkappa^+} =: l(\mu)$ при $\mu > 0$. Розглянемо функцію $l(\mu)$, $\mu \in [0, +\infty)$. Очевидно, що вона є неперервною і $l(0) = \widehat{a}_0^{-} - \widehat{g}^{+} > 0$. Звідси випливає існування такого $\mu^* > 0$, що $l(\mu) > 0$ при $\mu \in [0, \mu^*]$. Отже,

$$\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} \geq l(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu \in [0, \mu^*]. \tag{20}$$

Таким чином, при $\mu \in [0, \mu^*]$ умови твердження A з роботи [3] у випадку задачі (15)–(17) виконуються.

А оскільки на підставі рівностей (13) і (14) легко зробити висновок, що звуження w^{μ} на $\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])$ є розв'язком задачі (15)–(17), то, використавши твердження A роботи [3], для всіх $\mu \in [0, \mu^*]$ отримаємо оцінку

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s), \inf_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} w^{\mu}(y,s), 0\right\} \leq w^{\mu}(x,t) \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s), \sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} w^{\mu}(y,s), 0\right\}, \quad (x,t) \in Q_\varepsilon. \tag{21}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, T)$ маємо

$$\begin{aligned} \inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s) &\geq \inf_{(y,s)\in Q} f^{\mu}(y,s), &\qquad \inf_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s) &\geq \inf_{(y,s)\in\Sigma} h^{\mu}(y,s), \\ \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s) &\leq \sup_{(y,s)\in Q} f^{\mu}(y,s), &\qquad \sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s) &\leq \sup_{(y,s)\in\Sigma} h^{\mu}(y,s). \end{aligned} \tag{22}$$

Також легко переконатися, врахувавши оцінку (11) і монотонність θ, що

$$\sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} |w^\mu(y,s)| \leq \sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times(0,\varepsilon]} |w(y,s)e^{\mu\theta(s)}| \leq Me^{\mu\theta(\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{23}$$

На підставі (22) і (23) з (21), спрямувавши ε до 0, отримаємо

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h^\mu(y,s), 0\right\} \leq w^\mu(x,t) \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \sup_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h^\mu(y,s), 0\right\}, \qquad (x,t)\in Q, \quad \mu\in(0,\mu^*]. \tag{24}$$

Нехай

$$Q_- := \{(x,t)\in Q \,|\, f(x,t)<0\}, \qquad Q_+ := \{(x,t)\in Q \,|\, f(x,t)>0\},$$

$$\Sigma_- := \{(x,t)\in Q \,|\, h(x,t)<0\}, \qquad \Sigma_+ := \{(x,t)\in Q \,|\, h(x,t)>0\}.$$

У випадку $Q_- \neq \varnothing$, врахувавши, що $0 < e^{\mu\theta(s)} \leq 1 \ \forall s\in(0,T]$, одержимо

$$\inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s) = \inf_{(y,s)\in Q_-} f(y,s)e^{\mu\theta(s)} \geq \inf_{(y,s)\in Q_-} f(y,s) = \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s),$$

а тому (див. (20))

$$\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s) \geq \frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s) \geq \frac{1}{l(\mu)} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s).$$

Отже, в цьому випадку в лівій частині нерівності (24) перший член можна замінити на $\dfrac{1}{l(\mu)} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s)$. Очевидно, що те ж саме можна зробити і тоді, коли $Q_- = \varnothing$, оскільки в цьому випадку перший член нерівності (24) є невід'ємним, а отже, не визначає значення лівої частини нерівності (24).

Провівши аналогічні міркування щодо другого члена лівої частини, а також першого та другого членів правої частини нерівності (24), будемо мати

$$\min\left\{\frac{1}{l(\mu)} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\right\} \leq w(x,t)e^{\mu\theta(t)} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{l(\mu)} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\right\}, \qquad (x,t)\in Q, \quad \mu\in(0,\mu^*]. \tag{25}$$

Зафіксувавши довільним чином вибрану точку $(x,t)\in Q$, перейдемо в (25) до границі при $\mu\to+0$. В результаті, взявши до уваги, що $l(\mu) \underset{\mu\to+0}{\longrightarrow} \widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+$, отримаємо оцінку (10).

Твердження 3 доведено.

Твердження 4. *Для довільних* $(x,t)\in Q,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2\in\mathbb{R}$ *справджується рівність*

$$g(x,t,\xi_1,\eta_1) - g(x,t,\xi_2,\eta_2) =$$

$$= (\xi_1-\xi_2)G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) + (\eta_1-\eta_2)G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2),$$

де

$$G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int_0^1 g_\xi\big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\big)dz, \tag{26}$$

$$G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int_0^1 g_\eta\big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\big)dz, \tag{27}$$

причому

$$0 \le G_i(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) \le g_i(x,t), \quad i=1,2.$$

Дане твердження доведено у [3].

4. Обґрунтування основних результатів. ***Доведення теореми* 1.** Позначимо $w(x,t) := := u_1(x,t)-u_2(x,t)$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$. Розглядаючи різницю виразів Pu_1 і Pu_2, на підставі твердження 4 отримуємо рівність

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^n a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) +$$
$$+\widehat{a}_0(x,t)\,w(x,t) - \widehat{g}(x,t)\,w(x,t-\tau(t)) = \widehat{f}(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{28}$$

де

$$\widehat{a}_0(x,t) := a_0(x,t) - G_1\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\big),$$
$$\widehat{g}(x,t) := G_2\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\big),$$
$$\widehat{f}(x,t) = f_1(x,t) - f_2(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

а G_1 і G_2 визначено відповідно формулами (26) і (27). Легко бачити, що

$$w(x,t) = \widehat{h}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{29}$$

$$\limsup_{t\to 0+}\max_{x\in\overline{\Omega}}|w(x,t)| < \infty, \tag{30}$$

де

$$\widehat{h}(x,t) := h_1(x,t) - h_2(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma.$$

З (28) – (30) випливає, що функція w є розв'язком задачі (6) – (8). Перевіримо чи виконуються умови твердження 3, а саме, $\widehat{g}\ge 0$ на Q і $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. З твердження 4 випливає, що $\widehat{g}(x,t)\ge 0$ для будь-яких $(x,t)\in Q$. Використовуючи умову $(\mathcal{G})$ та твердження 4, отримуємо

$$\widehat{a}_0^- := \inf_{(x,t)\in Q}\widehat{a}_0(x,t) =$$
$$= \inf_{(x,t)\in Q}\Big[a_0(x,t) - G_1\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\big)\Big] \ge$$
$$\ge \inf_{(x,t)\in Q}(a_0(x,t) - g_1(x,t)) = a_0^-,$$

$$\widehat{g}^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \widehat{g}(x,t) =$$

$$= \sup_{(x,t)\in Q} G_2\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\Big) \le \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) = g_2^+.$$

Оскільки $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ \ge a_0^- - g_2^+$, а з умови даного твердження маємо $a_0^- - g_2^+ > 0$, то умови твердження 3 виконуються. Отже, для функції w виконується нерівність (10), з якої випливає оцінка (5).

Теорему 1 доведено.

***Доведення наслідку* 1.** Дане твердження безпосередньо отримуємо з теореми 1, покладаючи $u_1 := u,\ u_2 := 0$.

***Доведення наслідку* 2.** З умови наслідку маємо, що $f_1(x,t) - f_2(x,t) \le 0\ \forall (x,t) \in Q$, $h_1(x,t) - h_2(x,t) \le 0\ \forall (x,t) \in \Sigma$. Тоді з (5) отримуємо $u_1(x,t) - u_2(x,t) \le 0\ \forall (x,t) \in Q$, тобто $u_1(x,t) \le u_2(x,t)\ \ \forall (x,t) \in Q$.

***Доведення наслідку* 3.** Припустимо протилежне. Нехай $u_1,\ u_2$ — два різних розв'язки задачі (2)–(4). Тоді з теореми 1 маємо $0 \le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le 0,\ (x,t) \in \overline{Q}$, тобто $u_1 = u_2$ на $\overline{Q}$, а це суперечить нашому припущенню. Отож, твердження наслідку 3 є правильним.

***Доведення теореми* 2.** Нехай ε — довільне число з проміжку $(0, T/3)$, а позначення Q_ε, $\Sigma_\varepsilon,\ E_\varepsilon$ такі ж, як при доведенні твердження 3.

Візьмемо функцію $\theta_\varepsilon \in C^\infty((0,T])$, яка задовольняє умови $0 \le \theta_\varepsilon(t) \le 1$ при $t \in (0,T]$, $\theta_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in (0, 2\varepsilon]$ і $\theta_\varepsilon(t) = 1$ при $t \in (3\varepsilon, T]$. Покладемо

$$h_\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t) h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad f_\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t) f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Зауважимо, що

$$|h_\varepsilon(x,t)| \le |h(x,t)| \quad \forall (x,t) \in \Sigma, \qquad |f_\varepsilon(x,t)| \le |f(x,t)| \quad \forall (x,t) \in Q. \tag{31}$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $u_\varepsilon \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$, яка задовольняє рівняння

$$P u_\varepsilon(x,t) = f_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \tag{32}$$

та умови

$$u_\varepsilon(x,t) = h_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_\varepsilon, \tag{33}$$

$$u_\varepsilon(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon, \tag{34}$$

де P — диференціальний оператор, який визначено у (2).

З теореми 2 роботи [3] випливає існування єдиного розв'язку $u_\varepsilon \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_\varepsilon) \cap$ $\cap\, C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T]))$ задачі (32)–(34). На підставі наслідку 2 роботи [3] для звуження u_ε на $\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$ маємо оцінку

$$|u_\varepsilon(x,t)| \le$$

$$\le \max\left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon / Q_{2\varepsilon}} |f_\varepsilon(y,s)|, \sup_{(y,s)\in \Sigma_\varepsilon / \Sigma_{2\varepsilon}} |h_\varepsilon(y,s)| \right\}, \quad (x,t) \in \overline{Q}_\varepsilon / Q_{2\varepsilon}. \tag{35}$$

З означень f_ε та h_ε випливає, що права частина (4) дорівнює нулю, а тому $u_\varepsilon(x,t)=0$ для кожного $(x,t)\in\overline{\Omega}\times(E_\varepsilon\cup(\varepsilon,2\varepsilon])$. Довизначимо u_ε нулем на всю множину $\widetilde{Q}$ і залишимо за цим продовженням позначення u_ε. Легко переконатися, що u_ε є розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2) – (4) лише тим, що f і h замінено відповідно на f_ε і h_ε. Звідси на підставі наслідку 2 та (31) випливає, що

$$|u_\varepsilon(x,t)|\le\max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q}|f(y,s)|,\ \sup_{(y,s)\in\Sigma}|h(y,s)|\right\},\quad (x,t)\in Q. \tag{36}$$

Нехай $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ — така послідовність чисел з інтервалу $(0,T/3)$, що $\varepsilon_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$. Перепозначимо $u_j:=u_{\varepsilon_j}$ $f_j:=f_{\varepsilon_j}$, $h_j:=h_{\varepsilon_j}$ для кожного $j\in\mathbb{N}$. З (36) випливає, що послідовність $\{u_j\}$ є обмеженою на $\widetilde{Q}$, тобто

$$\sup_{(x,t)\in\widetilde{Q}}|u_j(x,t)|\le C_3,\quad j\in\mathbb{N}, \tag{37}$$

де $C_3>0$ — стала, яка не залежить від j.

Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонна послідовність чисел така, що $\delta_k\underset{k\to\infty}{\downarrow}0$, $0<\delta_k<T$, і $\Omega_k:=$ $:=\{x\in\Omega:\ \operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\}>\delta_k\}$ — область в $\mathbb{R}^n$ для кожного $k\in\mathbb{N}$. Позначимо $I_k:=(\delta_k,T]$, $Q_k:=\Omega_k\times I_k$, $Q^k:=\Omega\times I_k$. Зауважимо, що $Q_k\subset Q^k$, $Q_k\subset Q_{k+1}$, $Q^k\subset Q^{k+1}$ для кожного $k\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k=\Omega$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{Q}_k=Q$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{Q^k}=\widetilde{Q}$.

Позначимо $g_j(x,t):=f_j(x,t)+g\Big(x,t,u_j(x,t),u_j\big(x,t-\tau(t)\big)\Big)$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$, для кожного $j\in\mathbb{N}$. З неперервності функцій g на $\widetilde{Q}\times\mathbb{R}^2$, f_j, u_j, $j\in\mathbb{N}$, на $\widetilde{Q}$ та оцінок (31), (37) випливає, що функції g_j, $j\in\mathbb{N}$, є неперервними на $\widetilde{Q}$ і для довільного $k\in\mathbb{N}$ справджується оцінка

$$\|g_j\|_{C(\overline{Q^k})}\le C_4,\quad j\in\mathbb{N}, \tag{38}$$

де $C_4>0$ — стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

З (32) випливає, що для кожного $j\in\mathbb{N}$

$$p(x,t)u_{j,t}(x,t)-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(x,t)u_{j,x_kx_l}(x,t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}a_k(x,t)u_{j,x_k}(x,t)+a_0(x,t)u_j(x,t)=g_j(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{39}$$

а з (33) —

$$u_j(x,t)=h_j(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma. \tag{40}$$

Зазначимо, що на підставі умов $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_3)$, $(\mathcal{B}_4)$ рівняння (39) є частковим випадком рівняння (1.1), дослідженого у главі 3 монографії [6]. Зокрема, теорема 10.1 цієї монографії встановлює оцінки сталої Гельдера розв'язку рівняння (1.1) у підобласті області його задання. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (39), що задовольняє умову (40), отримуємо оцінку

$$\|u_j\|_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q^k}}\le C_5,\quad j\in\mathbb{N}, \tag{41}$$

де $C_5 > 0$ — стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння, сталих C_3, C_4 з оцінок (37), (38) та δ_k, але не залежить від j.

Отже, згідно з твердженням 2 (п. 1) існують функція $u \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})$ і підпослідовності послідовності $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ $\big($цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\big)$ такі, що

$$u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C(\,\widetilde{Q}\,). \tag{42}$$

Покажемо, що u — розв'язок задачі (2)–(4).

Зауважимо, що з умов $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_4)$ та оцінки (41) маємо

$$\|g_j\|^{\overline{Q^k}}_{\alpha,\alpha/2} \le C_6, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

де $C_6 > 0$ — стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

Зазначимо, що на підставі умов $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_3)$, $(\mathcal{B}_4)$ рівняння (39) є частковим випадком рівняння (10.1), дослідженого у главі 4 монографії [6]. Зокрема, теорема 10.1 цієї монографії встановлює локальні оцінки розв'язку рівняння (10.1) та його похідних у класах Гельдера. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (39) отримуємо оцінку

$$\|u_j\|^{\overline{Q}_k}_{2+\alpha,1+\alpha/2} \le C_7, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{44}$$

де $C_7 > 0$ — стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння, сталих C_3, C_6 з оцінок (37), (43), але не залежить від j.

Із (42), (44), твердження 2 (п. 1) та теореми про диференціювання границі збіжної послідовності функцій випливає, що функція u (див. (42)) належить простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ і з послідовності $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\{u_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$, яка збігається до u у просторі $C^{2,1}(Q)$. Зауважимо, що $h_j \to h$ при $j \to \infty$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \Sigma$. Крім того, з (42) та неперервності функцій g, f_j маємо $g_j(x,t) \to f(x,t) + g(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t)))$ при $j \to \infty$ для кожної точки $(x,t) \in Q$. Врахувавши викладене, покладемо $j = j_m$ у (39) і (40) та перейдемо там до границі при $m \to \infty$. В результаті отримаємо рівності, які означають, що функція u є класичним розв'язком рівняння (2) та задовольняє крайову умову (3). Виконання умови (4) випливає із (36) та (42).

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Агаев Г. Н.* О первой краевой задаче для линейных вырождающихся параболических уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1976. – **2**. – С. 10–16.
2. *Бокало М., Дмитрів В.* Задача Фур'є для різнокомпонентної еволюційної системи рівнянь із інтегральним запізненням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – **60**. – С. 32–49.
3. *Бокало М., Ільницька О.* Мішані задачі для параболічних рівнянь зі змінним запізненням // Буков. мат. журн. – 2015. – **3**. – С. 16–24.
4. *Бугрій О. М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням // Укр. мат. вісн. – 2008. – **5**. – С. 435–469.
5. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальних уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

7. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 256 с.
8. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Неймана для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 9. – С. 1232 – 1243.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем з післядією. – Рівне: УДУВГ, 2003.
10. *Bainov D., Petrov V.* Asymptotic properties of the nonoscillatory solutions of second-order neutral equations with a deviating argument // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – **190**. – P. 645 – 653.
11. *Burger R., Evje S., Karlsenc K. H.* On strongly degenerate convections diffusion problems modeling sedimentations consolidation processes // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – **247**. – P. 517 – 556.
12. *Burton T. A., Haddrock J. R.* On the delay-differential equations $x'(t) + a(t)f(x(t - r(t))) = 0$ and $x''(t) + a(t)f(x(t - r(t))) = 0$ // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – **54**. – P. 37 – 48.
13. *Gui-Qiang G. Chen* On degenerate partial differential equations // Oxford Centre Nonlinear PDE. – 2010. – **16**. – 38 p.
14. *Culshaw R. V., Shigui R.* A delay-diferential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells // Math. Biosci. – 2000. – **165**. – P. 27 – 39.
15. *Dmytriv V. M.* On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays // Mat. Stud. – 2001. – **16**. – P. 141 – 156.
16. *Dumrongpokaphan T., Lenbury Y., Ouncharoen R., Xu Y.* An intracellular delay-differential equation model of the HIV infection and immune control // Math. Modelling Natur. Phenomena. – 2007. – **2**. – P. 75 – 99.
17. *Feng W., Pao C. V., Lu X.* Global attrators of reaction-diffusion systems modeling food chain populations with delays // Communs Pure and Appl. Anal. – 2011. – **10**. – P. 1463 – 1478.
18. *Karlsen K. H., Ohlbergerb M.* A note on the uniqueness of entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **275**. – P. 439 – 458.
19. *Kuang Y., Zhang B., Zhao T.* Qualitative analysis of a nonautonomous nonlinear delay differential equation // Tohoku Math. J. – 1991. – **43**. – P. 509 – 528.
20. *Mascia C., Porretta A., Terracina A.* Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 2002. – **163**. – P. 87 – 124.
21. *Pao C. V.* Coupled nonlinear parabolic systems with time delays // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – **196**. – P. 237 – 265.
22. *Pao C. V.* Dynamics of nonlinear parabolic systems with time delays // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 751 – 779.
23. *Pao C. V.* Systems of parabolic equations with continuous and discrete delays // J. Math. Anal. and Appl. – 1997. – **205**. – P. 157 – 185.
24. *Pao C. V.* Time delays parabolic systems with coupled nonlinear boundary conditions // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – **130**. – P. 1079 – 1086.

Одержано 29.12.15