УДК 519.21

В. А. Кузнецов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ВЗАИМНЫЕ УГЛЫ ОБХОДА ЧАСТИЦ В БРОУНОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКАХ СО СТАРШИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ЛЯПУНОВА, РАВНЫМ НУЛЮ

The investigation of the geometric properties of particles moving in stochastic flows leads to the study of their mutual winding angles. The same problem for independent Brownian motions was solved by M. Yor. We generalize these results to the case of isotropic Brownian stochastic flows with top Lyapunov exponent equal to zero.

Дослідження геометричних властивостей траєкторій частинок у стохастичних потоках приводить до вивчення їхніх взаємних кутів обходу. Для незалежних двовимірних броунівських рухів відповідну задачу розв'язав М. Йор. Ми узагальнюємо цей результат на випадок ізотропних броунівських стохастичних потоків зі старшим показником Ляпунова, що дорівнює нулю.

1. Введение. В настоящей статье приводится решение задачи об асимптотическом распределении взаимных углов обхода частиц, движущихся в двумерном броуновском стохастическом потоке. Броуновские стохастические потоки возникли в работах [1 – 3] как модели турбулентного течения жидкости.

Определение 1 [4]. *Стохастическим потоком гомеоморфизмов в пространстве* $\mathbb{R}^d$ *называется семейство случайных отображений* $F_{s,t} = F_{s,t}(\omega, \cdot) \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $0 \le s \le t$, *имеющих на некотором множестве* Ω_0 *с* $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$ *следующие свойства*:

1) *поле* $\phi(s,t,x) = F_{s,t}(\omega, x)$ *является непрерывным по совокупности параметров* $s,\ t,\ x$;

2) *все отображения* $F_{s,t}$ *являются гомеоморфизмами* $\mathbb{R}^d$;

3) *при каждом* $s \ge 0$ *имеет место* $F_{s,s} = \mathrm{Id}$, *т. е. отображение* $F_{s,s}$ *является тождественным*;

4) *при любых* $s < t < u$ *выполняется соотношение* $F_{t,u} \circ F_{s,t} = F_{s,u}$.

Определение 2 [4]. *Броуновским стохастическим потоком в* $\mathbb{R}^d$ *называется стохастический поток гомеоморфизмов* $F_{s,t}$ *со следующим свойством*: *при любых* $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$ *отображения* $F_{s_1,s_2}, F_{s_2,s_3}, \ldots, F_{s_{n-1},s_n}$ *независимы.*

Согласно [4], броуновский стохастический поток $F_{s,t}$, удовлетворяющий определенным условиям регулярности, можно задать как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dF_{s,t}(x) = U(F_{s,t}(x), dt), \qquad F_{s,s}(x) = x, \tag{1}$$

где U — некоторый непрерывный гауссовский семимартингал с пространственным параметром. Уравнение (1) следует понимать как сокращенную запись соотношения

$$F_{s,t}(x) = x + \int_s^t U(F_{s,r}(x), dr),$$

а последний интеграл определяется как интеграл по семимартингалу с пространственным параметром [4].

Важный класс потоков составляют однородные изотропные броуновские потоки, возникшие при изучении наиболее простой модели турбулентности — изотропной турбулентности. В этой модели распределение поля скоростей жидкости инвариантно относительно параллельных переносов, поворотов и отражений.

Сначала введем, следуя работе [5], определение однородности и изотропности для случайных полей на $\mathbb{R}^d$. Случайное поле $V = V(z) \in \mathbb{R}^d,\ z \in \mathbb{R}^d$, называется однородным, если его распределение не меняется при параллельных переносах, т. е. для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^d$ случайное поле $\tilde{V}(z) = V(z+h)$ имеет то же распределение, что и поле V. В случае гауссовского векторного поля V это условие можно записать в виде условия на математическое ожидание и ковариационную матрицу компонент поля V. Так, если $a(x,y) = (a_{ij}(x,y))_{1\le i,j\le d}$ — ковариационная матрица компонент однородного центрированного гауссовского поля V, т. е.

$$\mathbb{E}V_i(x)V_j(y) = a_{ij}(x,y),$$

то поле V является однородным в том и только в том случае, когда $a_{ij}(x,y)$ зависит лишь от разности $x-y$:

$$\mathbb{E}V_i(x)V_j(y) = a_{ij}(x,y) = b_{ij}(x-y), \quad i,j = 1,\ldots,d.$$

Центрированное однородное случайное поле V называется изотропным, если для каждой ортогональной матрицы G размера $d\times d$ случайное поле $V'(z) = GV(G^{-1}z)$ имеет то же распределение, что и V. В случае гауссовского векторного поля V это условие можно записать в виде условия на ковариационную матрицу компонент поля V. Так, если $b(z) = (b_{ij}(z))_{i,j=1,\ldots,d}$, где

$$\mathbb{E}V_i(x)V_j(y) = b_{ij}(x-y),$$

то условие изотропности V эквивалентно соотношению

$$Gb(G^{-1}z)G^{-1} = b(z) \tag{2}$$

для всех ортогональных матриц G.

Определения однородности и изотропности можно дать и для броуновских стохастических потоков.

Определение 3. *Однородным броуновским стохастическим потоком называется стохастический поток, который задается уравнением* (1), *где U — центрированное гауссовское случайное поле, удовлетворяющее соотношению*

$$\mathbb{E}U_i(x,t)U_j(y,s) = b_{ij}(x-y)\min\{t,s\}, \quad i,j = 1,\ldots,d.$$

Здесь $x,y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,+\infty),\ b(z) = (b_{ij}(z),\ 1 \le i,j \le d)$ — некоторая матричнозначная функция.

Определение 4. *Однородный броуновский поток называется изотропным, если соответствующая матричнозначная функция $b = b(z)$ удовлетворяет соотношению* (2) *для каждого $z \in \mathbb{R}^d$ и каждой ортогональной матрицы G.*

***Замечание* 1.** Это условие эквивалентно существованию однородного изотропного поля $V = V(z)$, для которого $b_{ij}(z) = \operatorname{cov}(V_i(x), V_j(x+z))$ при всех $x,z\in\mathbb{R}^d$.

Условие изотропности накладывает ограничения на вид матричнозначной функции $b(z)$. Полное описание ковариационных функций компонент изотропных случайных полей было получено в работе А. М. Яглома [6]. Мы приведем результат для случая двумерного броуновского потока $(d = 2)$, следуя работе [5]. В этом случае вид матрицы b описывается следующим утверждением.

Утверждение 1 [5]. *Если матричнозначная функция* $b = (b_{ij}(z),\ 1 \leq i,j \leq 2)$ *является ковариационной матрицей компонент некоторого однородного изотропного случайного поля* f, *то она имеет вид*

$$b_{ij}(z) = \delta_{ij} b_N(\|z\|) + \frac{z^i z^j}{\|z\|^2}(b_L(\|z\|) - b_N(\|z\|)).$$

Здесь $b_L, b_N : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — *функции, которые можно представить в виде*

$$b_L(r) = \int_0^\infty J_1'(r\alpha)\Phi_P(d\alpha) + \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha}\Phi_S(d\alpha), \tag{3}$$

$$b_N(r) = \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha}\Phi_P(d\alpha) + \int_0^\infty J_1'(r\alpha)\Phi_S(d\alpha) \tag{4}$$

для некоторых конечных мер $\Phi_P,\ \Phi_S$ *на* $[0,+\infty)$, J_1 — *функция Бесселя первого рода.*

При определенных дополнительных предположениях функции b_L и b_N являются достаточно гладкими. В этом случае, согласно результатам [4], поток $F_{s,t}$ является потоком диффеоморфизмов. Это дает возможность говорить о показателях Ляпунова $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 > \lambda_2)$ потока F. Эти показатели, как было показано в работе [7], выражаются через функции $b_L,\ b_N$.

Итак, имеет место следующий результат.

Утверждение 2 [5]. *Пусть* $U(x,t),\ x \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0,$ — *гауссовское векторное поле со значениями в* $\mathbb{R}^2$, *задающее однородный изотропный броуновский поток* F. *Предположим, что меры* $\Phi_P,\ \Phi_S$ *в представлениях* (3), (4) *имеют конечный четвертый момент. Тогда функции* $b_L,\ b_N$ *четырежды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим асимптотическим соотношениям*:

$$b_L(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4), \quad r \to 0, \tag{5}$$

$$b_N(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_N r^2 + O(r^4), \quad r \to 0, \tag{6}$$

где $b_L(0) = b_N(0) = b_0$ *и*

$$\beta_L = \frac{3}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_P(d\alpha) + \frac{1}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_S(d\alpha),$$

$$\beta_N = \frac{1}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_P(d\alpha) + \frac{3}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_S(d\alpha).$$

При этом показатели Ляпунова таковы:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\beta_N - \beta_L), \qquad \lambda_2 = -\beta_L.$$

Показатели Ляпунова определяют асимптотическое поведение расстояния между частицами в потоке. Так, имеют место следующие результаты, полученные в работах [2, 8].

Теорема 1. *Для двумерного однородного изотропного броуновского стохастического потока имеют место следующие варианты асимптотического поведения расстояния* $R_{ab}(t) = \|F_t(a) - F_t(b)\|$ *между частицами, вышедшими из двух произвольных различных точек плоскости* a *и* b, *в зависимости от максимального показателя Ляпунова* λ_1 :

1) *если* $\lambda_1 < 0$, *то* $R_{ab}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ *почти наверное*;

2) *если* $\lambda_1 \geq 0$, *то* $R_{ab}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ *по вероятности и процесс* R_{ab} *является нуль-возвратным диффузионным процессом.*

***Замечание* 2.** Мы обозначаем $F_t(x) = F_{0,t}(x)$.

Заметим, что изучение траекторий частиц, движущихся под действием потока жидкости, может быть использовано для анализа свойств самого потока. Этот подход применен в работе [9]. Поэтому представляет интерес описание различных геометрических характеристик системы частиц, движущихся под воздействием стохастического потока. Одной из таких характеристик являются взаимные углы обхода частиц одна вокруг другой. Мы приводим решение задачи об асимптотическом распределении взаимных углов обхода частиц в броуновском стохастическом потоке. Точная формулировка полученного результата приводится в пункте 2. Для независимых броуновских движений аналогичная задача решена в статье [10], где получен следующий результат.

Теорема 2 [10]. *Пусть* $w_1, \ldots, w_n$ — *независимые двумерные стандартные броуновские движения, выходящие из попарно различных точек плоскости. Тогда для углов обхода* $\Phi_{ij}(t)$ *траектории броуновского движения* w_i *вокруг броуновского движения* w_j *справедливо асимптотическое соотношение* $\left(\dfrac{2}{\ln t}\Phi_{ij}(t),\ 1 \leq i < j \leq n\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (\xi_{ij}, 1 \leq i < j \leq n)$. *Здесь* ξ_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, — *независимые в совокупности случайные величины, имеющие распределение Коши с параметром* 1.

***Замечание* 3.** Угол обхода непрерывной двумерной траектории $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$, $t \geq 0$, вокруг точки 0 определяется как $\Phi(t) - \Phi(0)$, где $\Phi = \Phi(t)$ — непрерывная функция, которая в каждый момент времени t является одной из версий аргумента комплексного числа $X_1(t) + iX_2(t)$, т. е. при всех t

$$\Phi(t) \in \operatorname{Arg}(X_1(t) + iX_2(t)).$$

Такая функция существует и однозначно определена, если $X_1(t) + iX_2(t) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Угол обхода $\Phi(t)$ траектории $X(s)$, $0 \leq s \leq t$, вокруг $Y(s)$, $0 \leq s \leq t$, определяется как угол обхода траектории $Z(s) = Y(s) - X(s)$ вокруг точки 0. Он определен, если траектории X и Y не пересекаются, т. е. $X(s) \neq Y(s)$ при всех $s \in [0, t]$. Траектории независимых двумерных винеровских процессов не пересекаются с вероятностью 1, поэтому углы обхода траекторий одна вокруг другой определены почти наверное.

В настоящей работе показано, что то же самое предельное соотношение выполнено для траекторий частиц в броуновском стохастическом потоке, в котором функции b_L и b_N совпадают: $b_L \equiv b_N$. Как и в рассмотренном в работе [10] случае независимых броуновских движений, при доказательстве используется оценка роста совместной характеристики углов обхода частиц $\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t$. Но если в случае независимых броуновских движений эта оценка может быть проведена за счет явного нахождения математического ожидания $\mathbb{E}\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t$, то в данном случае изучение асимптотического поведения $\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t$ гораздо более сложно. Основная сложность состоит в том, что движения различных частиц в потоке теперь не являются независимыми. Поэтому вместо понятия независимости приходится использовать понятие ортогональности мартингалов.

***Замечание* 4.** Естественно ожидать, что полученный нами результат выполнен в более общем случае броуновского потока со старшим показателем Ляпунова, равным нулю. Однако рассмотрение этого случая технически более сложно и требует дальнейшего исследования.

2. Основной результат.

Теорема 3. *Пусть F — однородный изотропный броуновский стохастический поток, задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением*

$$dF_t(x) = U(F_t(x), dt), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0,$$

где $U = U(x,t)$ — центрированное гауссовское случайное векторное поле,

$$\mathbb{E}\, U_i(x,t) U_j(y,s) = b_{ij}(x-y) t \wedge s,$$

а матрица b имеет вид $b(z) = (b_{ij}(z)) = (\delta_{ij} b_L(\|z\|))$, $1 \leq i,j \leq 2$, $b_L \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $b_0 = b_L(0) = 1$, $b_L(r) < 1$ при $r > 0$, $b_L \in C^{(4)}([0,+\infty))$, $b_L(r) \to 0$ $(r \to \infty)$, $\int_0^\infty r|b_L'(r)|dr < \infty$, $\int_0^\infty r|b_L'(r) - r b_L''(r)|dr < \infty$, $b_L(r) = 1 - \dfrac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4)$, $r \to 0+$, для некоторого $\beta_L > 0$.

Пусть $F_t(x_1), \ldots, F_t(x_n)$ — траектории потока F, выходящие из попарно различных точек плоскости $x_1, \ldots, x_n$. Тогда для углов обхода $\Phi_{kl}(t)$ траектории $F_t(x_k)$ вокруг траектории $F_t(x_l)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\left(\frac{2}{\ln t} \Phi_{kl}(t),\, 1 \leq k < l \leq n \right) \xrightarrow[t \to \infty]{d} (\xi_{kl},\, 1 \leq k < l \leq n).$$

Здесь ξ_{kl}, $1 \leq k < l \leq n$, — независимые в совокупности случайные величины, имеющие распределение Коши с параметром 1.

***Замечание* 5.** Примером функции b_L, удовлетворяющей условиям теоремы, является $b_L(r) = \dfrac{1}{1+r^2}$. В [11] (§ 3.6) показано, что $b_L(\|z\|)$ является ковариационной функцией.

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится следующее определение.

Определение 5. *Броуновским движением, ассоциированным с непрерывным локальным мартингалом M, называется такое броуновское движение β, что при всех $t \geq 0$ с вероятностью 1 выполнено соотношение $M_t = \beta(\langle M \rangle_t)$.*

Заметим, что такое броуновское движение существует в силу известного результата Дэмбиса – Дубинса – Шварца (см. теорему 18.4 в [12]).

При доказательстве теоремы 3 используется следующее утверждение из работы [13].

Теорема 4. *Пусть* $(M^n_j, 1 \le j \le m)$ — *последовательность таких* m-*компонентных наборов непрерывных локальных мартингалов, что для любых* j, n

$$\langle M^n_j \rangle_\infty = \infty,$$

и для любой пары различных индексов j, k *существует последовательность положительных случайных величин* H_n *таких, что*

$$\langle M^n_j \rangle_{H_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty, \qquad \langle M^n_k \rangle_{H_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty,$$

$$\int\limits_0^{H_n} |d\langle M^n_j, M^n_k\rangle_s| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0,$$

где через $\int_0^t |df(s)|$ *обозначена полная вариация функции* f *на* $[0,t]$.

Тогда при $n \to \infty$ *броуновские движения* β^n_j, *ассоциированные с* M^n_j, *асимптотически независимы, т. е.* $(\beta^n_j, 1 \le j \le m) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\beta^\infty_j, 1 \le j \le m)$, *где* $(\beta^\infty_j, 1 \le j \le m)$ — *независимые броуновские движения.*

Поясним, как применяется теорема 4 для получения основного результата в случае $m = 3$, когда рассматриваются три траектории потока F (схема рассуждений в общем случае остается такой же). Пусть a, b, c — попарно различные точки плоскости, $\Phi_{ab}(t)$ — угол обхода $F_t(b)$ вокруг $F_t(a)$, $\Phi_{ac}(t)$ определяется аналогично, $R_{ab}(t)$ — расстояние между частицами a и b в момент времени t. Для применения теоремы 4 нужно показать, что совместные характеристики

$$\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t, \quad \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac}\rangle_t, \quad \langle \Phi_{ab}, \ln R_{ab}\rangle_t, \tag{7}$$

$$\langle \Phi_{ac}, \ln R_{ac}\rangle_t, \quad \langle \ln R_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t, \quad \langle \ln R_{ac}, \Phi_{ab}\rangle_t \tag{8}$$

в определенном смысле растут по времени t намного медленнее, чем характеристики

$$\langle \Phi_{ab}\rangle_t = \langle \ln R_{ab}\rangle_t, \quad \langle \Phi_{ac}\rangle_t = \langle \ln R_{ac}\rangle_t.$$

Это соображение формализуется в утверждениях 6 и 15. Так, мы показываем, что $\dfrac{\langle \Phi_{ab}\rangle_t}{(\ln t)^2}$ сходится по распределению к некоторой положительной с вероятностью 1 случайной величине, а $\dfrac{\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t}{(\ln t)^2}$ сходятся по вероятности к 0 при $t \to \infty$. Последующие рассуждения аналогичны проведенным в статье [13] при исследовании асимптотического распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек плоскости. Полученные оценки характеристик дают возможность применить теорему 4 к последовательности локальных мартингалов

$$\frac{\ln R_{ab}}{h_n}, \quad \frac{\ln R_{ac}}{h_n}, \quad \frac{\Phi_{ab}}{h_n}, \quad \frac{\Phi_{ac}}{h_n},$$

где h_n — некоторая возрастающая бесконечно большая последовательность положительных чисел. Таким образом, мы имеем асимптотическую независимость наборов

$$\left(\beta^{(h_n)}_{ab}, \beta^{(h_n)}_{ac}, \gamma^{(h_n)}_{ab}, \gamma^{(h_n)}_{ac}\right),$$

полученных из ассоциированных с локальными мартингалами $\ln R_{ab}$, $\ln R_{ac}$, Φ_{ab}, Φ_{ac} броуновских движений

$$(\beta_{ab}, \beta_{ac}, \gamma_{ab}, \gamma_{ac})$$

с помощью перемасштабирования:

$$\beta_{ab}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\beta_{ab}(h_n^2 t), \qquad \beta_{ac}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\beta_{ac}(h_n^2 t),$$

$$\gamma_{ab}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\gamma_{ab}(h_n^2 t), \qquad \gamma_{ac}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\gamma_{ac}(h_n^2 t).$$

Итак, мы получаем слабую сходимость последовательности

$$\left(\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)}\right)$$

к набору независимых броуновских движений. В то же время значения углов обхода $\Phi_{ab}(t)$, $\Phi_{ac}(t)$ в моменты $T_{ab}(e^{h_n}) = \inf\{t\colon R_{ab}(t) = e^{h_n}\}$, $T_{ac}(e^{h_n}) = \inf\{t\colon R_{ac}(t) = e^{h_n}\}$ выхода $R_{ab}(t)$, $R_{ac}(t)$ на уровень e^{h_n} выражаются через броуновские движения $\beta_{ab}^{(h_n)}$, $\beta_{ac}^{(h_n)}$, $\gamma_{ab}^{(h_n)}$, $\gamma_{ac}^{(h_n)}$:

$$\frac{\Phi_{ab}(T_{ab}(e^{h_n}))}{h_n} = \gamma_{ab}^{(h_n)}(\inf\{u : \beta_{ab}^{(h_n)}(u) = 1\}),$$

$$\frac{\Phi_{ac}(T_{ac}(e^{h_n}))}{h_n} = \gamma_{ac}^{(h_n)}(\inf\{u : \beta_{ac}^{(h_n)}(u) = 1\}).$$

Отсюда и из того, что $\Phi_{ab}(e^{2h_n})$, $\Phi_{ac}(e^{2h_n})$ хорошо приближаются случайными величинами $\Phi_{ab}(T_{ab}(e^{h_n}))$, $\Phi_{ac}(T_{ac}(e^{h_n}))$ (см. утверждение 7), получаем соотношение

$$\left(\frac{\Phi_{ab}(e^{2h_n})}{h_n}, \frac{\Phi_{ac}(e^{2h_n})}{h_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\xi_1, \xi_2),$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со стандартным распределением Коши.

3. Вспомогательные результаты. В этом пункте мы приведем вспомогательные результаты, которые понадобятся для доказательства результатов следующих пунктов. Следующие леммы касаются асимптотического поведения некоторых интегралов, содержащих модифицированную функцию Бесселя второго рода $K_0(x)$.

Лемма 1. *При любом $a > 0$*

$$\int\limits_a^\infty \frac{K_0(\beta z)}{z} dz \sim \frac{1}{2}(\ln\beta)^2, \quad \beta \to 0+.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_a^\infty \frac{K_0(\beta z)}{z} dz = \int\limits_{\beta a}^\infty \frac{K_0(x)}{x} dx.$$

Поскольку $K_0(x) \sim -\ln x,\ x \to 0+$, и $K_0(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}e^{-x},\ x \to +\infty$ (см., например, [14], разд. 17.71, разложение в ряд модифицированных функций Бесселя), то

$$\int\limits_{\beta a}^{\infty} \frac{K_0(x)}{x}dx \sim \int\limits_{\beta a}^{1} \frac{K_0(x)}{x}dx \sim -\int\limits_{\beta a}^{1} \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln(\beta a))^2}{2} \sim \frac{(\ln\beta)^2}{2}, \quad \beta \to 0+.$$

Лемма 2. *Пусть непрерывные функции* $f, h\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *таковы, что* f *строго возрастает на* $[a,+\infty)$ *при некотором* $a > 0$, f *непрерывно дифференцируема на* $(0,+\infty)$ *и* $f'(y) \to 1\ (y \to +\infty)$, $h(y) \sim y\ (y \to +\infty)$. *Тогда для любого* $R_0 > 0$

$$\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)}dy \sim \frac{1}{2}(\ln\beta)^2, \quad \beta \to 0+.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что

$$\varlimsup_{\beta\to 0} \frac{\displaystyle\int_{R_0}^{\infty} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)}dy}{(\ln\beta)^2} \le \frac{1+\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Обозначим $\psi(z) = f^{-1}(z),\ z \in [f(a),+\infty)$. Тогда $\psi'(z) = \dfrac{1}{f'(\psi(z))}$ и при любом $R > a$

$$\int\limits_{R}^{\infty} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)}dy = \int\limits_{f(R)}^{\infty} \frac{K_0(\beta z)}{h(f^{-1}(z))}df^{-1}(z) = \int\limits_{f(R)}^{\infty} \frac{K_0(\beta z)}{h(\psi(z))f'(\psi(z))}dz.$$

Ясно, что $\psi(z) \sim z\ (z \to \infty)$, поэтому $h(\psi(z))f'(\psi(z)) \sim z\ (z \to \infty)$.

Выберем $R_1 > R_0 \vee a$ так, что при $z \ge R_1$

$$\frac{h(\psi(z))f'(\psi(z))}{z} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)}dy \le \int\limits_{R_0}^{\psi(R_1)} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)}dy + (1+\varepsilon)\int\limits_{R_1}^{\infty} \frac{K_0(\beta z)}{z}dz.$$

Учитывая, что, как следует из предыдущей леммы,

$$\lim_{\beta\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{R_1}^{\infty} \frac{K_0(\beta z)}{z}dz}{(\ln\beta)^2} = \frac{1}{2},$$

а $\displaystyle\int_{R}^{\psi(R_1)} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)}dy$ имеет конечный предел при $\beta \to 0$ (при фиксированных R и R_1), получаем (9). В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\varlimsup_{\beta\to 0} \frac{\displaystyle\int_{R_0}^{\infty} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)} dy}{(\ln\beta)^2} \le \frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом получаем оценку нижнего предела:

$$\varliminf_{\beta\to 0} \frac{\displaystyle\int_{R_0}^{\infty} \frac{K_0(\beta f(y))}{h(y)} dy}{(\ln\beta)^2} \ge \frac{1}{2}.$$

Для доказательства утверждения 14 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $W(s) = \begin{pmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{pmatrix}$ — *двумерный винеровский процесс, выходящий из начала координат*, $B_\delta(a) = \{z \in \mathbb{R}^2 \colon \|z-a\| \le \delta\}$. *Тогда*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^2} \mathrm{P}\left(\exists\, s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \colon W(s) \in B_\delta(a)\right) = O\left(\frac{\ln\ln\dfrac{1}{\delta}}{\ln\dfrac{1}{\delta}}\right), \quad \delta \to 0+\,.$$

Доказательство. Положим $R_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\ln\dfrac{1}{\delta}}}$, $R_2 = \sqrt{2\ln\ln\dfrac{1}{\delta}}$. Пусть $B_{R_1}(a)$, $B_{R_2}(a)$ — круги радиусов R_1, R_2 с центрами в точке a. Ясно, что при достаточно малых $\delta > 0$

$$B_\delta(a) \subseteq B_{R_1}(a) \subseteq B_{R_2}(a).$$

Обозначим

$$\tau_\delta = \inf\left\{s \ge \frac{1}{2} \colon W(s) \in B_\delta(a)\right\}, \qquad \tau_{R_2} = \inf\left\{s \ge \frac{1}{2} \colon W(s) \notin B_{R_2}(a)\right\}.$$

Имеем

$$\mathrm{P}\left(\exists s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \colon W(s) \in B_\delta(a)\right) = \mathrm{P}(\tau_\delta \le 1) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_1}(a)\right) + \mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_2}(a) \setminus B_{R_1}(a), \tau_\delta \le \tau_{R_2}\right) +$$

$$+\,\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_2}(a) \setminus B_{R_1}(a),\, \tau_{R_2} < \tau_\delta \le 1\right) +$$

$$+\,\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \notin B_{R_2}(a), \exists s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \colon W(s) \in B_\delta(a)\right).$$

Оценим отдельные слагаемые в этой сумме. Очевидно,

$$\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_1}(a)\right) \le \frac{1}{\pi}\pi R_1^2 = R_1^2.$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что для бесселевского процесса $X_t = \|W_t\|$ функция $s(x) = 2\ln x$ является функцией шкалы [15, с. 415]. Поэтому для любых точек $0 < r_1 < r_2 < r_3$ вероятность выхода процесса X с $X_0 = r_2$ из интервала (r_1, r_3) через левый конец равна

$$\frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_2}(a) \setminus B_{R_1}(a), \tau_\delta \le \tau_{R_2}\right) \le \frac{\ln R_2 - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln \delta}.$$

Оценим теперь вероятность

$$\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_2}(a) \setminus B_{R_1}(a), \tau_{R_2} < \tau_\delta \le 1\right).$$

Пусть $Z = W(\tau_{R_2})$. В силу строго марковского свойства $W(t+\tau_{R_2}) - W(\tau_{R_2})$, $t \ge 0$, — двумерный винеровский процесс, и его проекция на прямую OZ является одномерным винеровским процессом w, $w(0) = 0$. Иными словами,

$$w(t) = \left\langle W(t+\tau_{R_2}) - W(\tau_{R_2}), \frac{W(\tau_{R_2})}{\|W(\tau_{R_2})\|}\right\rangle, \quad t \ge 0,$$

— одномерный винеровский процесс (угловые скобки $\langle\cdot\rangle$ обозначают скалярное произведение). Обозначая $\Psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du$ и используя оценку

$$\Psi(x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}} \le e^{-\frac{x^2}{2}}$$

при $x \ge 1$, при достаточно малых $\delta > 0$ получаем

$$\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \in B_{R_2}(a) \setminus B_{R_1}(a), \tau_{R_2} < \tau_\delta \le 1\right) \le \mathrm{P}\left(\inf_{0\le s\le\frac{1}{2}} w(s) \le -(R_2-\delta)\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{P}\left(w\left(\frac{1}{2}\right) \ge R_2 - \delta\right) \le 2\Psi(\sqrt{2}(R_2-\delta)) = o\left(\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\delta}}\right), \quad \delta \to 0.$$

Аналогично оцениваем и последнее слагаемое:

$$\mathrm{P}\left(W\left(\frac{1}{2}\right) \notin B_{R_2}(a), \exists s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \colon W(s) \in B_\delta(a)\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\inf_{0\le s\le\frac{1}{2}} w_1(s) \le -(R_2-\delta)\right) = o\left(\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\delta}}\right), \quad \delta \to 0,$$

где

$$w_1(t) = \left\langle W\left(t+\frac{1}{2}\right) - W\left(\frac{1}{2}\right), \frac{W\left(\frac{1}{2}\right)}{\left\|W\left(\frac{1}{2}\right)\right\|} \right\rangle, \quad t \geq 0,$$

— одномерный винеровский процесс, $w_1(0) = 0$. В итоге получаем

$$\mathrm{P}\left(\exists s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] : W(s) \in B_\delta(a)\right) \leq$$

$$\leq R_1^2 + \frac{\ln R_2 - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln \delta} + o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right) = O\left(\frac{\ln \ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{\delta}}\right), \quad \delta \to 0.$$

Заметим, что все полученные оценки равномерны по $a \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 3 доказана.

4. Аналог закона Спицера для угла обхода в броуновском потоке. Пусть F — броуновский стохастический поток, удовлетворяющий условиям теоремы 3, $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Рассмотрим траектории потока $F_t(a), F_t(b)$, выходящие из точек a и b. Отождествляя $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$, можно записать

$$F_t(b) - F_t(a) = R_{ab}(t) e^{i\Phi_{ab}(t)} \frac{F_0(b) - F_0(a)}{\|F_0(b) - F_0(a)\|},$$

где $R_{ab}(t) = \|F_t(b) - F_t(a)\|$, $\Phi_{ab}(t)$ — непрерывная версия угла обхода траектории $F(b)$ вокруг $F(a)$.

***Замечание* 6.** Согласно [5], процесс R_{ab} является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dR_{ab}(t) = \sqrt{2(1 - b_L(R_{ab}(t)))}\, dW_t^1 + \frac{1 - b_L(R_{ab}(t))}{R_{ab}(t)} dt,$$

а процесс Φ_{ab} удовлетворяет уравнению

$$d\Phi_{ab}(t) = \frac{\sqrt{2(1 - b_L(R_{ab}(t)))}}{R_{ab}(t)} dW_t^2.$$

Здесь W^1, W^2 — независимые броуновские движения.

Следующая теорема является основной теоремой данного пункта и представляет собой аналог закона Спицера для угла обхода $\Phi_{ab}(t)$.

Теорема 5. *Имеет место* $\dfrac{\Phi_{ab}(t)}{\frac{1}{2}\ln t} \xrightarrow{d} \xi$, *где* ξ — *случайная величина, имеющая стандартное распределение Коши.*

Пусть точки $F_t(a)$, $F_t(b)$ имеют координаты

$$F_t(a) = \begin{pmatrix} X_t(a) \\ Y_t(a) \end{pmatrix}, \qquad F_t(b) = \begin{pmatrix} X_t(b) \\ Y_t(b) \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $X_{ab}(t) = X_t(b) - X_t(a)$, $Y_{ab}(t) = Y_t(b) - Y_t(a)$.

Применение изложенной в работе [4] техники вычислений с интегралами по семимартингалам, зависящим от пространственного параметра, позволяет получить выражения для взаимных характеристик отдельных компонент траекторий частиц.

Утверждение 3. *Имеют место соотношения*

$$\langle X_{ab}, X_{ab}\rangle(t) = \langle Y_{ab}, Y_{ab}\rangle(t) = \int\limits_0^t 2(1 - b_L(R_{ab}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ab}, Y_{ab}\rangle(t) = 0.$$

Несложно получить следующие выражения для взаимных углов обхода частиц и расстояний между частицами в рассматриваемом потоке.

Утверждение 4. *Углы обхода частиц одна вокруг другой представляются в виде следующих интегралов Ито:*

$$\Phi_{ab}(t) = \int\limits_0^t \frac{X_{ab}(s)dY_{ab}(s) - Y_{ab}(s)dX_{ab}(s)}{X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2}.$$

Логарифмы попарных расстояний между частицами представляются в виде

$$\ln R_{ab}(t) - \ln R_{ab}(0) = \int\limits_0^t \frac{X_{ab}(s)dX_{ab}(s) + Y_{ab}(s)dY_{ab}(s)}{X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2}.$$

Из предыдущих утверждений следует, что $\ln R_{ab}$, Φ_{ab} — ортогональные локальные мартингалы с характеристикой $\langle \ln R_{ab}\rangle_t = \langle \Phi_{ab}\rangle_t = \int_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2}ds$. Пусть β, γ — ассоциированные с $\ln R_{ab}$, Φ_{ab} броуновские движения, т. е.

$$\ln R_{ab}(t) = \beta\left(\int\limits_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2}ds\right), \quad \beta(0) = \ln R_{ab}(0),$$

$$\Phi_{ab}(t) = \gamma\left(\int\limits_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2}ds\right), \quad \gamma(0) = 0.$$

Заметим, что броуновское движение γ не зависит от β в силу теоремы Найта (предложение 18.8 из [12]). Далее в этом пункте обозначаем $R(t) = R_{ab}(t)$. Введем также следующие обозначения: w — некоторый одномерный винеровский процесс, не зависящий от β и γ, $w(0) = 0$, $\tau_a = \inf\{s > 0 \colon w(s) = a\}$; $H_t = \inf\left\{u > 0 \colon \int_0^u \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1 - b_L(e^{\beta(s)}))}ds = t\right\}$; $\theta_a = \inf\{s > 0 \colon \beta(s) = a\}$, $T_r = \inf\{s > 0 \colon R_{ab}(s) = r\}$.

Докажем сначала, что

$$\frac{\langle \ln R\rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \tau_{1/2}.$$

Переформулируем эту задачу в терминах процесса β. Имеем

$$t = \int\limits_0^t \frac{ds}{d\langle \ln R\rangle_s} d\langle \ln R\rangle_s.$$

Однако $\dfrac{d\langle\ln R\rangle_s}{ds} = \dfrac{2(1-b_L(R_s))}{R_s^2} = \dfrac{2(1-b_L(e^{\beta(\langle\ln R\rangle_s)}))}{e^{2\beta(\langle\ln R\rangle_s)}}$. Следовательно,

$$t = \int\limits_0^t \frac{e^{2\beta(\langle\ln R\rangle_s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(\langle\ln R\rangle_s)}))} d\langle\ln R\rangle_s = \int\limits_0^{\langle\ln R\rangle_t} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(s)}))} ds.$$

Таким образом,

$$\langle\ln R\rangle_t = \inf\left\{ u > 0\colon \int\limits_0^u \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(s)}))} ds = t \right\},$$

т. е.

$$\langle\ln R\rangle_t = H_t, \tag{10}$$

и рассматриваемая задача свелась к исследованию распределения некоторого момента остановки для броуновского движения. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Для любого* ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, *имеет место*

$$\mathrm{P}\big(\theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t} \le H_t \le \theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}\big) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1.$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\mathrm{P}\big(H_t < \theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t}\big) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Выберем x_0 так, что $b_L(u) < \dfrac{1}{2}$ при $u > e^{x_0}$. Теперь выберем t_1 таким образом, что

$$\sup_{-\infty < x \le x_0} \frac{e^{2x}}{2(1-b_L(e^x))} < t_1^{1-\varepsilon}.$$

Тогда при $t > t_1 = t_1(\varepsilon)$ для всех $x < \left(\dfrac{1}{2} - \varepsilon\right)\ln t$ имеем

$$\frac{e^{2x}}{2(1-b_L(e^x))} < t^{1-\varepsilon}.$$

Следовательно, если $t > t_1$ и $\sup_{0\le s\le H_t} \beta(s) \le \left(\dfrac{1}{2} - \varepsilon\right)\ln t$, то

$$t = \int\limits_0^{H_t} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(s)})} ds \le t^{1-\varepsilon} H_t$$

и $H_t \ge t^{\varepsilon}$. Таким образом, при $t > t_1$ получаем

$$\mathrm{P}\big(H_t < \theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t}\big) = \mathrm{P}\big(t^{\varepsilon} \le H_t < \theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t}\big) \le \mathrm{P}\big(\theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t} > t^{\varepsilon}\big) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Теперь покажем, что

$$\mathrm{P}\big(H_t > \theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}\big) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

При достаточно больших значениях $t,\ t > t_2 = t_2(\varepsilon)$, имеем

$$\frac{e^{2x}}{2(1-b_L(e^x))} > \frac{1}{4}t^{1+\varepsilon},$$

как только $x > \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\ln t$. Отсюда следует, что время, проведенное процессом β до момента H_t правее точки $\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\ln t$, не превышает $\dfrac{t}{\frac{1}{4}t^{1+\varepsilon}} = 4t^{-\varepsilon}$:

$$\int\limits_0^{H_t} \mathbb{1}_{\beta(s)\ge(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds \le 4t^{-\varepsilon}.$$

Таким образом, при $t > t_2$ получаем

$$\mathrm{P}(H_t > \theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}) \le \mathrm{P}\left(\int\limits_{\theta_{(1/2+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(s)}))} ds \le t\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\int\limits_{\theta_{(1/2+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}} \frac{1}{4}t^{1+\varepsilon}\mathbb{1}_{\beta(s)\ge(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds \le t\right) \le \mathrm{P}\left(\int\limits_{\theta_{(1/2+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}} \mathbb{1}_{\beta(s)\ge(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds \le 4t^{-\varepsilon}\right).$$

Однако, легко видеть (например, применив свойство самоподобия винеровского процесса), что

$$\mathrm{P}\left(\int\limits_{\theta_{(1/2+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}} \mathbb{1}_{\beta(s)\ge(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds \le 4t^{-\varepsilon}\right) \to 0, \quad t\to\infty.$$

Лемма 4 доказана.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение, характеризующее предельное распределение момента остановки H_t.

Утверждение 5. *Имеет место следующая сходимость по распределению*:

$$\frac{H_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \tau_{1/2} = \inf\left\{s>0\colon w(s) = \frac{1}{2}\right\}.$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из следующих фактов:

1) $\left(\dfrac{\theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t}}{(\ln t)^2}, \dfrac{\theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}}{(\ln t)^2}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} \left(\tau_{1/2-\varepsilon}, \tau_{1/2+\varepsilon}\right)$, что легко получается из свойства самоподобия винеровского процесса;

2) $\mathrm{P}\big(\theta_{(1/2-\varepsilon)\ln t} \le H_t \le \theta_{(1/2+\varepsilon)\ln t}\big) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$ (это составляет содержание леммы 4);

3) $\left(\tau_{1/2-\varepsilon}, \tau_{1/2+\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} (\tau_{1/2}, \tau_{1/2})$.

***Замечание* 7.** Легко видеть, что приведенные рассуждения показывают даже большее:

$$\left(\frac{\theta_{1/2\ln t}}{(\ln t)^2}, \frac{H_t}{(\ln t)^2}\right) \xrightarrow{d} (\tau_{1/2}, \tau_{1/2}).$$

Из (10) вытекает следующее утверждение.
Утверждение 6. *Имеет место сходимость*

$$\frac{\langle \Phi_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \tau_{1/2}.$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 5.

Доказательство. Заметим, что процессы γ и $\langle \Phi_{ab} \rangle_t = \langle \ln R \rangle_t,\ t \geq 0$, независимы. Действительно, как мы знаем, γ и β независимы, но $R(t) = e^{\ln R_t} = e^{\beta(H_t)}$, а H_t измерим относительно β. Следовательно, процесс R измерим относительно β, поэтому и $\langle \ln R \rangle_t$ измерим относительно β и не зависит от γ. Учитывая независимость γ и $\langle \Phi_{ab} \rangle$, с использованием предыдущего утверждения получаем

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\ln t} = \frac{\gamma(\langle \Phi_{ab} \rangle_t)}{\ln t} \stackrel{d}{=} \gamma\left(\frac{\langle \Phi_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} \gamma(\tau_{1/2}),$$

поэтому

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\dfrac{1}{2}\ln t} \xrightarrow[t\to\infty]{d} 2\gamma(\tau_{1/2}),$$

а последняя случайная величина имеет распределение Коши [16] (теорема 2.34).

Теорема 5 доказана.

Из следующего утверждения видно, что значения угла обхода $\Phi_{ab}(t)$, в некотором смысле, хорошо приближаются значениями $\Phi_{ab}(T_{\sqrt{t}})$. Аналогичный результат для броуновских движений играет важную роль в исследовании совместного распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек [13].

Утверждение 7. *Имеет место сходимость*

$$\frac{\Phi_{ab}(T_{\sqrt{t}}) - \Phi_{ab}(t)}{\ln t} \xrightarrow[t\to\infty]{d} 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Phi_{ab}(T_{\sqrt{t}}) = \gamma(\langle \Phi_{ab} \rangle(T_{\sqrt{t}})) = \gamma(\langle \ln R \rangle(T_{\sqrt{t}})) =$$

$$= \gamma(\langle \ln R \rangle(\inf\{s > 0\colon R(s) = \sqrt{t}\})) =$$

$$= \gamma(\langle \ln R \rangle(\inf\{s > 0\colon \ln R(s) = \ln t/2\})) =$$

$$= \gamma(\langle \ln R \rangle(\inf\{s > 0\colon \beta(\langle \ln R \rangle_s) = \ln t/2\})) =$$

$$= \gamma(\inf\{u > 0\colon \beta(u) = \ln t/2\}) = \gamma(\theta_{1/2\ln t}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что для непрерывной возрастающей функции f с $f(0) = 0$ и любого $y > 0$ справедливо равенство

$$f\left(\inf\{s>0\colon \beta(f(s))=y\}\right)=\inf\{u>0\colon \beta(u)=y\}.$$

Учитывая замечание 7, имеем

$$\left(\frac{\gamma(\theta_{1/2\ln t})}{\ln t},\frac{\gamma(H_t)}{\ln t}\right)\stackrel{d}{=}\left(\gamma\left(\frac{\theta_{1/2\ln t}}{(\ln t)^2}\right),\gamma\left(\frac{H_t}{(\ln t)^2}\right)\right)\xrightarrow[t\to\infty]{d}\big(\gamma(\tau_{1/2}),\gamma(\tau_{1/2})\big).$$

Отсюда

$$\frac{\gamma(\theta_{1/2\ln t})}{\ln t}-\frac{\gamma(H_t)}{\ln t}\xrightarrow[t\to\infty]{d}0.$$

Утверждение 7 доказано.

5. Доказательства основных результатов. Всюду в этом пункте F — броуновский стохастический поток, удовлетворяющий условиям теоремы 3. Рассмотрим траектории $F_t(a)$, $F_t(b)$, $F_t(c)$, вышедшие из попарно различных точек $a,b,c\in\mathbb{R}^2$. Пусть точки $F_t(a)$, $F_t(b)$, $F_t(c)$ имеют координаты

$$F_t(a)=\begin{pmatrix}X_t(a)\\ Y_t(a)\end{pmatrix},\qquad F_t(b)=\begin{pmatrix}X_t(b)\\ Y_t(b)\end{pmatrix},\qquad F_t(c)=\begin{pmatrix}X_t(c)\\ Y_t(c)\end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем пункте, обозначаем

$$X_{ab}(t)=X_t(b)-X_t(a),\qquad X_{ac}(t)=X_t(c)-X_t(a),$$
$$Y_{ab}(t)=Y_t(b)-Y_t(a),\qquad Y_{ac}(t)=Y_t(c)-Y_t(a).$$

Применение изложенной в [4] техники позволяет получить следующие равенства.

Утверждение 8. *Имеют место следующие соотношения*:

$$\langle X_{ab},X_{ab}\rangle(t)=\langle Y_{ab},Y_{ab}\rangle(t)=\int_0^t 2(1-b_L(R_{ab}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ac},X_{ac}\rangle(t)=\langle Y_{ac},Y_{ac}\rangle(t)=\int_0^t 2(1-b_L(R_{ac}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ab},X_{ac}\rangle(t)=\langle Y_{ab},Y_{ac}\rangle(t)=\int_0^t (1+b_L(R_{bc}(s))-b_L(R_{ab}(s))-b_L(R_{ac}(s)))ds.$$

Используя эти соотношения, а также представление взаимных углов обхода частиц в виде стохастических интегралов (см. утверждение 4), получаем следующее утверждение для совместных характеристик.

Утверждение 9. *Совместные характеристики углов обхода частиц одна вокруг другой имеют вид*

$$\langle\Phi_{ab},\Phi_{ac}\rangle_t=\int_0^t\frac{(X_{ab}(s)X_{ac}(s)+Y_{ab}(s)Y_{ac}(s))(1+b_L(R_{bc}(s))-b_L(R_{ab}(s))-b_L(R_{ac}(s)))}{(X_{ab}(s)^2+Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2+Y_{ac}(s)^2)}ds.$$

Полные вариации соответствующих характеристик таковы:

$$\int_0^t |d\langle\Phi_{ab},\Phi_{ac}\rangle_s| =$$

$$= \int_0^t \frac{|(X_{ab}(s)X_{ac}(s)+Y_{ab}(s)Y_{ac}(s))(1+b_L(R_{bc}(s))-b_L(R_{ab}(s))-b_L(R_{ac}(s)))|}{(X_{ab}(s)^2+Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2+Y_{ac}(s)^2)}ds.$$

Для характеристик имеют место следующие оценки.

Утверждение 10. *Для некоторой постоянной* $C_1>0$ *при всех* $t>0$ *выполнено*

$$\langle\Phi_{ab}\rangle_t \le C_1\int_0^t \frac{1}{R^2_{ab}(s)\vee 1}ds,$$

$$\int_0^t |d\langle\Phi_{ab},\Phi_{ac}\rangle_s| \le C_1\int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ac}(s)\vee 1}ds.$$

Доказательство. Поскольку $\dfrac{1-b_L(x)}{x^2}\to\dfrac{1}{2}\beta_L,\ x\to 0$, и $b_L(x)\to 0,\ x\to\infty$, то для некоторого $A>0$

$$\frac{1-b_L(x)}{x^2}\le\frac{A}{x^2\vee 1}$$

при всех $x>0$. Отсюда с учетом равенства

$$\langle\Phi_{ab}\rangle_t = \int_0^t \frac{2(1-b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2}ds$$

непосредственно следует оценка

$$\langle\Phi_{ab}\rangle_t \le C_1\int_0^t \frac{1}{R^2_{ab}(s)\vee 1}ds$$

с постоянной $C_1=2A$.

Далее, из того, что функция $b_L(\|z\|)$ неотрицательно определена, а $b_L(0)=1$, следует существование таких векторов $u,v,w\in\mathbb{R}^3$, что

$$\|u\|=\|v\|=\|w\|=1,\quad (u,v)=b_L(R_{ab}(s)),\quad (u,w)=b_L(R_{ac}(s)),\quad (v,w)=b_L(R_{bc}(s)).$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского к векторам $u-v,\ u-w$, получаем

$$|1+\langle v,w\rangle-\langle u,v\rangle-\langle u,w\rangle| = |\langle u-v,u-w\rangle| \le \|u-v\|\|u-w\| =$$

$$= \sqrt{(u-v,u-v)}\sqrt{(u-w,u-w)} = \sqrt{2-2(u,v)}\sqrt{2-2(u,w)} =$$

$$= 2\sqrt{1-(u,v)}\sqrt{1-(u,w)},$$

или

$$\big|1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s))\big| \le 2\sqrt{1 - b_L(R_{ab}(s))}\sqrt{1 - b_L(R_{ac}(s))}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\big|X_{ab}(s)X_{ac}(s) + Y_{ab}(s)Y_{ac}(s)\big| \le \sqrt{X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2}\sqrt{X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2} = R_{ab}(s)R_{ac}(s).$$

Из предыдущих неравенств получаем

$$\frac{\big|(X_{ab}(s)X_{ac}(s) + Y_{ab}(s)Y_{ac}(s))(1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s)))\big|}{\big(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2\big)\big(X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2\big)} \le$$

$$\le 2\frac{\sqrt{1 - b_L(R_{ab}(s))}\sqrt{1 - b_L(R_{ac}(s))}}{R_{ab}(s)R_{ac}(s)} \le \frac{2A}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)}.$$

Отсюда следует требуемая оценка на $\displaystyle\int_0^t |d\langle\Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_s|$ с $C_1 = 2A$.

Утверждение 10 доказано.

В дальнейших рассуждениях мы оценим поведение характеристик $\langle\Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t$, что сделает возможным применение теоремы 4 в доказательстве утверждения 17. Из этого утверждения с помощью рассуждений, аналогичных используемым в работе [13], несложно будет получить теорему 3.

Использование методов из статьи [8], основанных на применении тауберовых теорем к преобразованию Лапласа математических ожиданий случайных величин вида $\displaystyle\int_0^t f(X_s)ds$ для диффузионного нуль-возвратного процесса X, позволяет получить оценки, которые потребуются для исследования асимптотического поведения характеристики $\langle\Phi_{ab}\rangle_t$.

Утверждение 11. *Для любого $r_0 > 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbb{E}\int\limits_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)\ge r_0} ds \sim C_2(\ln t)^2, \quad t \to \infty,$$

для некоторой постоянной $C_2 > 0$.

Доказательство. Вначале приведем некоторые сведения из теории диффузионных процессов. Пусть X — диффузионный процесс, принимающий значения в $(0, +\infty)$ и удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dw_t,$$

где w — винеровский процесс, функции μ и σ локально липшицевы. Пусть $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая ограниченная функция. Обозначим $\hat{L}(\alpha) = \mathbb{E}_x \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\,dt$. Тогда имеет место равенство (см. [8, 17])

$$\hat{L}(\alpha) = h(\alpha)\int\limits_0^\infty v_1(x \wedge y, \alpha)v_2(x \vee y, \alpha)f(y)M(dy).$$

Здесь M — мера скорости процесса X, имеющая плотность $m(z) = \dfrac{2}{\sigma^2(z)s'(z)}$, $s(z)$ — функция шкалы X, $s'(z) = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \dfrac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$, где z_0 — произвольная точка $(0,\infty)$. Функции v_1, v_2 определяются соотношениями

$$T_c = \inf\{t \geq 0 \colon X_t = c\},$$

$$v_1(x,\alpha) = \begin{cases} \mathbb{E}_x e^{-\alpha T_c}, & x \leq c, \\ \dfrac{1}{\mathbb{E}_c e^{-\alpha T_x}}, & x > c, \end{cases}$$

$$v_2(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbb{E}_c e^{-\alpha T_x}}, & x \leq c, \\ \mathbb{E}_x e^{-\alpha T_c}, & x > c, \end{cases}$$

где c — произвольная фиксированная точка $(0,+\infty)$.

Функция $h(\alpha)$ определяется через вронскиан v_1, v_2:

$$h(\alpha) = \frac{s'(x)}{v_1'(x,\alpha)v_2(x,\alpha) - v_1(x,\alpha)v_2'(x,\alpha)}.$$

Это выражение не зависит от выбора x.

Применим приведенный результат к процессу R_{ab}. Будем далее в этом доказательстве обозначать $R(t) = R_{ab}(t)$, $t \geq 0$. В [8] при изучении асимптотического поведения расстояния между частицами в броуновском потоке была получена асимптотика функции h

$$h(\alpha) \sim \frac{K}{2}\ln\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \to 0, \tag{11}$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная, для случая изотропного броуновского потока со старшим показателем Ляпунова, равным нулю. Там же было получено выражение для функции шкалы: $s'(z) = \dfrac{z_0}{z}\exp\left(-\int_{z_0}^{z}\dfrac{\delta(y)}{y}\,dy\right)$, где $\delta(y) = \dfrac{b_L(y) - b_N(y)}{1 - b_L(y)}$, а z_0 может быть выбрано произвольным образом. В рассматриваемом случае $b_L(y) = b_N(y)$ и $\delta(y) = 0$. Следовательно, $s'(z) = \dfrac{z_0}{z}$. Мы можем выбрать $z_0 = 1$, и тогда $m(z) = \dfrac{z}{1 - b_L(z)}$. Таким образом, получаем

$$\hat{L}(\alpha) = \mathbb{E}_x \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t} f(R_t)dt = h(\alpha)\int\limits_0^\infty v_1(x \wedge y,\alpha)v_2(x \vee y,\alpha)f(y)\frac{ydy}{1 - b_L(y)}.$$

Применим эту формулу для $f(y) = \dfrac{1}{y^2}\mathbb{1}_{y \geq r_0}$. Итак,

$$\hat{L}(\alpha) = h(\alpha)\int\limits_{r_0}^\infty v_1(x \wedge y,\alpha)v_2(x \vee y,\alpha)\frac{dy}{y(1 - b_L(y))}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \le r_0$. Тогда

$$\hat{L}(\alpha) = h(\alpha) v_1(x,\alpha) \int\limits_{r_0}^{\infty} v_2(y,\alpha) \frac{dy}{y(1-b_L(y))}.$$

Поскольку $v_1(x,\alpha) \to 1$ $(\alpha \to 0)$, то, как легко видеть из определения функции v_1 и возвратности процесса R, остается исследовать асимптотическое поведение интеграла

$$I(\alpha) = \int\limits_{r_0}^{\infty} v_2(y,\alpha) \frac{dy}{y(1-b_L(y))}.$$

Обозначим $\phi(z) = \int_1^z \frac{dx}{\sigma(x)}$, где $\sigma(x) = \sqrt{2(1-b_L(x))}$. Согласно результатам статьи [18] (предложение 5.3), существуют такие $y^\star$ и δ, $\phi(y^\star) > \delta > 0$, что при всех $y \ge y^\star$ и $\alpha > 0$ выполняются неравенства

$$\frac{K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y)-\delta)\big)}{K_0(\sqrt{2\alpha}(\phi(y^\star)-\delta))} \le \frac{v_2(y,\alpha)}{v_2(y^\star,\alpha)} \le \frac{K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y)+\delta)\big)}{K_0(\sqrt{2\alpha}(\phi(y^\star)+\delta))}. \tag{12}$$

Положим $c = y^\star$. Тогда исследуемый интеграл разбивается на сумму двух интегралов:

$$I(\alpha) = \int\limits_{r_0}^{c} v_2(y,\alpha) \frac{dy}{y(1-b_L(y))} + \int\limits_{c}^{\infty} v_2(y,\alpha) \frac{dy}{y(1-b_L(y))} = I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

Асимптотическое поведение первого из этих интегралов очевидно:

$$I_1(\alpha) = \int\limits_{r_0}^{c} v_2(y,\alpha) \frac{dy}{y(1-b_L(y))} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \int\limits_{r_0}^{c} \frac{dy}{y(1-b_L(y))}.$$

Оценим теперь второй интеграл. Используя (12), имеем

$$v_2(y^\star,\alpha) \int\limits_{c}^{\infty} \frac{K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y)-\delta)\big)}{K_0(\sqrt{2\alpha}(\phi(y^\star)-\delta))} \frac{dy}{y(1-b_L(y))} \le I_2(\alpha) = \int\limits_{c}^{\infty} v_2(y,\alpha) \frac{dy}{y(1-b_L(y))} \le$$

$$\le v_2(y^\star,\alpha) \int\limits_{c}^{\infty} \frac{K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y)+\delta)\big)}{K_0(\sqrt{2\alpha}(\phi(y^\star)+\delta))} \frac{dy}{y(1-b_L(y))}.$$

На основании леммы 2 получаем

$$\int\limits_{c}^{\infty} K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y)-\delta)\big) \frac{dy}{y(1-b_L(y))} \sim \int\limits_{c}^{\infty} K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y)+\delta)\big) \frac{dy}{y(1-b_L(y))} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2}(\ln\sqrt{2\alpha})^2 \sim \frac{1}{8}(\ln\alpha)^2 \quad (\alpha \to 0).$$

Поскольку

$$K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y^\star)-\delta)\big) \sim K_0\big(\sqrt{2\alpha}(\phi(y^\star)+\delta)\big) \sim -\ln\sqrt{2\alpha} \sim -\frac{1}{2}\ln\alpha \quad (\alpha\to 0)$$

и

$$v_2(c,\alpha)\to 1 \quad (\alpha\to 0),$$

то $I_2(\alpha) \sim -\frac{1}{4}\ln\alpha$ $(\alpha\to 0)$. Следовательно, и $I(\alpha)\sim -\frac{1}{4}\ln\alpha$ $(\alpha\to 0)$. Поэтому из (11) следует, что

$$\hat{L}(\alpha) \sim h(\alpha)v_1(x,\alpha)I(\alpha) \sim \frac{K}{8}(\ln\alpha)^2 \quad (\alpha\to 0+).$$

2. Пусть $x>r_0$. В этом случае имеем

$$\hat{L}(\alpha) = h(\alpha)\int\limits_{r_0}^{\infty} v_1(x\wedge y,\alpha)v_2(x\vee y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy =$$

$$= h(\alpha)\int\limits_{r_0}^{x} v_1(x\wedge y,\alpha)v_2(x\vee y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy +$$

$$+ h(\alpha)\int\limits_{x}^{\infty} v_1(x\wedge y,\alpha)v_2(x\vee y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy =$$

$$= h(\alpha)v_2(x,\alpha)\int\limits_{r_0}^{x} v_1(y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy +$$

$$+ h(\alpha)\int\limits_{x}^{\infty} v_1(x\wedge y,\alpha)v_2(x\vee y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy.$$

Ясно, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{r_0}^{x} v_1(y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy = \int\limits_{r_0}^{x}\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy.$$

С другой стороны, асимптотика

$$h(\alpha)\int\limits_{x}^{\infty} v_1(x\wedge y,\alpha)v_2(x\vee y,\alpha)\frac{1}{y(1-b_L(y))}dy \sim \frac{K}{8}(\ln\alpha)^2, \quad \alpha\to 0+,$$

следует из предыдущего пункта. Итак, в обоих случаях $\hat{L}(\alpha)\sim\frac{K}{8}(\ln\alpha)^2$, $\alpha\to 0+$. Применяя теперь тауберову теорему Караматы [19, с. 37], получаем

$$L(t) = \mathbb{E}_x\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{R_{ab}(s)^2}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)\ge r_0}ds \sim C_2(\ln t)^2, \quad t\to\infty,$$

для некоторой константы $C_2>0$.

Утверждение 11 доказано.

Утверждение 12. *Имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbb{E}\int\limits_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds \sim C_3\sqrt{t}\ln t, \quad t\to\infty, \tag{13}$$

для некоторой постоянной $C_3 > 0$.

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{E}\int\limits_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds = \mathbb{E}\int\limits_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)\le 1} ds + \mathbb{E}\int\limits_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)> 1} ds =$$

$$= \mathbb{E}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s)\le 1} ds + \mathbb{E}\int\limits_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)> 1} ds. \tag{14}$$

Согласно [8] (предложение 6.1), справедливо соотношение

$$\mathbb{E}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s)\in(0,1]} ds \sim C_3\sqrt{t}\ln t, \quad t\to\infty, \tag{15}$$

для некоторого $C_3 > 0$. Из (14), (15) и утверждения 11 получаем (13).

Утверждение 13. *Пусть* $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *такова, что* $f(t)\to+\infty$ $(t\to\infty)$, $R>0$ *фиксировано и для каждого* $t>0$ B_t — *множество элементарных исходов, для которых*

$$\int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s)\le R} ds \le f(t)(\ln t)^2.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(B_t)\to 1, \quad t\to\infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha = \inf_{r\le R}\frac{2(1-b_L(r))}{r^2} > 0.$$

На множестве исходов $\Omega\setminus B_t$ имеем

$$\langle \ln R_{ab}\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{2(1-b_L(R_s))}{R_s^2} ds \ge \alpha f(t)(\ln t)^2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(\Omega\setminus B_t) \le \mathrm{P}\big(\langle \ln R_{ab}\rangle_t \ge \alpha f(t)(\ln t)^2\big)\to 0, \quad t\to\infty,$$

так как

$$\frac{\langle \ln R_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2} = \frac{\langle \Phi_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \tau_{1/2}$$

согласно утверждению 6.

Утверждение 13 доказано.

Зафиксируем возрастающие функции $f, g, h, k\colon (1, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что $f(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$, $g(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$, $h(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$, $k(t) = 9(\ln t)^2 f(t)$, $\ln\ln(g(t)h(t)) = o(\ln\ln\ln t)$ $(t \to \infty)$, $f(t) = o(\ln t)$ $(t \to \infty)$, $f(t) = o(h(k(t)))$ $(t \to \infty)$, $f(t) = o\left(\dfrac{\ln\ln k(t)}{\ln\ln\ln k(t)}\right)$ $(t \to \infty)$.

***Замечание* 8.** Например, можно положить $f(t) = \ln\ln\ln\ln(t + 10^7)$, $g(t) = h(t) = \ln\ln(t + 10)$.

Применим к непрерывным локальным мартингалам $X(a)$, $X(b)$, $X(c)$ процедуру ортогонализации Грама – Шмидта (см. [4, с. 63]). В результате получим набор локальных мартингалов $X(a)$, $X'(b)$, $X'(c)$, в котором $X'(b)$ ортогонален $X(a)$, $X'(c)$ ортогонален $X(a)$ и $X'(b)$. Аналогичная процедура для $Y(a)$, $Y(b)$, $Y(c)$ даст набор локальных мартингалов $Y(a)$, $Y'(b)$, $Y'(c)$. Пусть $\zeta_t = \begin{pmatrix} X'_t(c) \\ Y'_t(c) \end{pmatrix}$, $\xi_t = F_t(c) - \zeta_t$. Легко видеть, что

$$\xi_t = \int_0^t \frac{b_L(R_{ac}(s)) - b_L(R_{ab}(s))b_L(R_{bc}(s))}{1 - b_L(R_{ab}(s))^2} U(F_s(a), ds) +$$

$$+ \int_0^t \frac{b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s))b_L(R_{ac}(s))}{1 - b_L(R_{ab}(s))^2} U(F_s(b), ds).$$

$X'(c)$, $Y'(c)$ — ортогональные непрерывные локальные мартингалы с совпадающей характеристикой, причем $X'(c)$, $Y'(c)$ ортогональны также локальным мартингалам $X(a)$, $X(b)$, $Y(a), Y(b)$. Обозначим $\eta_t = \dfrac{d\langle X'(c) \rangle_t}{dt} = \dfrac{d\langle Y'(c) \rangle_t}{dt}$. Тогда

$$\zeta_t = \tilde{w}\left(\int_0^t \eta_s ds\right),$$

где $\tilde{w}$ — двумерный винеровский процесс, не зависящий от $\mathcal{F}^{ab} = \sigma(F_s(a),\, F_s(b),\, 0 \le s < \infty)$, $\tilde{w}(0) = F_0(c)$. Несложно показать, что

$$\eta_t = 1 - (b_L(R_{ab}(t)))^2 - \frac{(b_L(R_{bc}(t)) - b_L(R_{ab}(t))b_L(R_{ac}(t)))^2}{(1 - b_L(R_{ab}(t)))^2}.$$

Заметим, что $\eta_s \le 1$ почти наверное при всех s. Выберем $R > 1$ так, что $\eta_s \ge \dfrac{3}{4}$ при любом $s > 0$, как только $R_{ab}(s) \ge R$, $R_{ac}(s) \ge R$, $R_{bc}(s) \ge R$. Возможность такого выбора R следует из явного выражения для η_s и сходимости $b_L(r) \to 0$ $(r \to \infty)$. Обозначим для каждого $t > 1$

$$A_t = \left\{ \omega \in \Omega \colon \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \le R} ds \le (\ln t)^2 f(t), \right.$$

$$\left. \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \le R} ds \le (\ln t)^2 f(t), \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \le R} ds \le (\ln t)^2 f(t) \right\},$$

$$A_t^{ab} = \left\{ \omega \in \Omega \colon \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \le R} ds \le (\ln t)^2 f(t) \right\}.$$

Из утверждения 13 получаем $\mathrm{P}(A_t) \to 1 \ (t \to \infty)$.

Утверждение 14. *Имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbb{E} \left(\left(\int\limits_0^t |d\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s| \right) \mathbb{1}_{A_t} \right) = o((\ln t)^2), \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Используя утверждение 10, имеем

$$\mathbb{E} \left(\left(\int\limits_0^t |d\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s| \right) \mathbb{1}_{A_t} \right) \le C_1 \int\limits_0^t \mathbb{E} \left(\frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{ac}(s) \vee 1} \mathbb{1}_{A_t} \right) ds \le$$

$$\le C_1 \int\limits_0^t \mathbb{E} \left(\frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{ab}(s) \vee R_{ac}(s) \vee 1} \mathbb{1}_{A_t} \right) ds +$$

$$+ C_1 \int\limits_0^t \mathbb{E} \left(\frac{1}{R_{ab}(s) \vee R_{ac}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{ac}(s) \vee 1} \mathbb{1}_{A_t} \right) ds.$$

Покажем, что

$$\int\limits_0^t \mathbb{E} \left(\frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{ab}(s) \vee R_{ac}(s) \vee 1} \mathbb{1}_{A_t} \right) ds = o((\ln t)^2), \quad t \to \infty.$$

Оценка второго слагаемого суммы аналогична.

Обозначим

$$Q_1^s = \left\{ \omega \colon R_{ab}(s) \ge \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s) \right\},$$

$$Q_2^s = \left\{ \omega \colon R_{ab}(s) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s), \ R_{ac}(s) \ge \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s) h(s) \right\},$$

$$Q_3^s = \left\{ \omega \colon R_{ab}(s) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s), \ R_{ac}(s) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s) h(s) \right\}.$$

Ясно, что

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)\leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_1^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)+$$

$$+\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_2^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)+$$

$$+\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_3^s}\mathbb{1}_{A_t}\right).$$

Оценим отдельно каждое из слагаемых.

1. Имеем $\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_1^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)\leq \frac{1}{g(s)^2}\frac{\ln s}{s}$. Поэтому при $k(t)\geq 1$

$$\int\limits_{k(t)}^{t}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_1^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\leq \frac{1}{g(k(t))^2}\int\limits_{1}^{t}\frac{\ln s}{s}ds=\frac{1}{g(k(t))^2}\frac{(\ln t)^2}{2}. \tag{16}$$

2. Имеем $\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_2^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)\leq \frac{1}{h(s)}\mathbb{E}(\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathbb{1}_{A_t})$, поскольку на Q_2^s выполнено неравенство $R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1\geq R_{ac}(s)\geq h(s)(R_{ab}(s)\vee 1)$ при достаточно больших s. Поэтому

$$\int\limits_{k(t)}^{t}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_2^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\leq$$

$$\leq\int\limits_{k(t)}^{t}\frac{1}{h(s)}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\leq\frac{1}{h(k(t))}\int\limits_{k(t)}^{t}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds.$$

Используя определение множества A_t и утверждение 11, получаем

$$\int\limits_{k(t)}^{t}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\leq$$

$$\leq\mathbb{E}\left(\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{R_{ab}(s)^2}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)\geq 1}ds\right)+(\ln t)^2f(t)\leq C_4(\ln t)^2f(t)$$

для некоторого $C_4>0$ при всех достаточно больших t.

Следовательно,

$$\int\limits_{k(t)}^{t} \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_2^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds \le C_4(\ln t)^2\frac{f(t)}{h(k(t))} \tag{17}$$

при достаточно больших t.

3. Оценка третьего слагаемого суммы потребует более сложных рассуждений. Имеем

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_3^s\bigcap A_t}\right) \le \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathbb{1}_{Q_3^s\bigcap A_t}\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathrm{P}\Big(Q_3^s\cap A_t \mid \mathcal{F}^{ab}\Big)\right).$$

Оценим условную вероятность $\mathrm{P}\big(Q_3^s\cap A_t \mid \mathcal{F}^{ab}\big)$. Ясно, что на множестве $A_t \subseteq \Omega$ при $k(t) = 9(\ln t)^2 f(t) \le s \le t$

$$\int\limits_0^s \mathbb{1}_{R_{ab}(s)\ge R, R_{ac}(s)\ge R, R_{bc}(s)\ge R} ds \ge$$

$$\ge s - \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s)<R} ds - \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s)<R} ds - \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s)<R} ds \ge s - 3(\ln t)^2 f(t) \ge \frac{2}{3}s,$$

$$\int\limits_0^s \eta_u du \ge \frac{3}{4}\int\limits_0^s \mathbb{1}_{R_{ab}(s)\ge R, R_{ac}(s)\ge R, R_{bc}(s)\ge R} ds \ge \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s = \frac{s}{2},$$

поэтому

$$\frac{s}{2} \le \int\limits_0^s \eta_u du \le s.$$

Следовательно, при $k(t) \le s \le t$

$$\mathrm{P}\Big(Q_3^s\cap A_t \mid \mathcal{F}^{ab}\Big)(\omega) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\omega\in A_t,\, R_{ab}(s) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}}g(s),\, R_{ac}(s) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}}g(s)h(s) \;\middle|\; \mathcal{F}^{ab}\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\omega\in A_t,\, R_{ac}(s) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}}g(s)h(s) \;\middle|\; \mathcal{F}^{ab}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\omega\in A_t,\, \|F_s(c)-F_s(a)\| \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}}g(s)h(s) \;\middle|\; \mathcal{F}^{ab}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\omega\in A_t,\, \|\xi_s+\zeta_s-F_s(a)\| \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}}g(s)h(s) \;\middle|\; \mathcal{F}^{ab}\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\omega\in A_t,\, \left\|\xi_s+\tilde{w}\left(\int\limits_0^s \eta_u du\right)-F_s(a)\right\| \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}}g(s)h(s) \;\middle|\; \mathcal{F}^{ab}\right) \le$$

$$\leq \mathrm{P}\bigg(\omega \in A_t^{ab},\, \exists\tau \in \Big[\frac{s}{2}, s\Big]\colon \|\xi_s + \tilde{w}(\tau) - F_s(a)\| \leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s)h(s) \,\bigg|\, \mathcal{F}^{ab}\bigg) =$$

$$= \mathbb{1}_{\omega \in A_t^{ab}}\, \mathrm{P}\bigg(\exists\tau \in \Big[\frac{s}{2}, s\Big]\colon \|\xi_s + \tilde{w}(\tau) - F_s(a)\| \leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s)h(s) \,\bigg|\, \mathcal{F}^{ab}\bigg).$$

Ясно, что

$$\mathrm{P}\bigg(\exists\tau \in \Big[\frac{s}{2}, s\Big]\colon \|\xi_s + \tilde{w}(\tau) - F_s(a)\| \leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s)h(s) \,\bigg|\, \mathcal{F}^{ab}\bigg) \leq$$

$$\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \mathrm{P}\bigg(\exists\tau \in \Big[\frac{s}{2}, s\Big]\colon \tilde{w}(\tau) \in B_{\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\ln s}} g(s)h(s)}(z)\bigg) =$$

$$= \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \mathrm{P}\bigg(\exists\tau \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]\colon \tilde{w}(\tau) \in B_{\frac{1}{\sqrt{\ln s}} g(s)h(s)}(z)\bigg).$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^2} \mathrm{P}\bigg(\exists\tau \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]\colon \tilde{w}(\tau) \in B_{\frac{1}{\sqrt{\ln s}} g(s)h(s)}(z)\bigg) \leq C_5 \frac{\ln\ln \dfrac{\sqrt{\ln s}}{g(s)h(s)}}{\ln \dfrac{\sqrt{\ln s}}{g(s)h(s)}} \leq C_6 \frac{\ln\ln\ln s}{\ln\ln s}$$

для некоторых $C_5, C_6 > 0$ при всех достаточно больших s. Следовательно,

$$\mathrm{P}\Big(Q_3^s \cap A_t \mid \mathcal{F}^{ab}\Big) \leq C_6 \frac{\ln\ln\ln s}{\ln\ln s} \mathbb{1}_{A_t^{ab}}.$$

Значит,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} \mathrm{P}\Big(Q_3^s \cap A_t \mid \mathcal{F}^{ab}\Big)\right) \leq C_6 \frac{\ln\ln\ln s}{\ln\ln s} \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} \mathbb{1}_{A_t^{ab}}\right).$$

Отсюда для достаточно больших t получаем

$$\int\limits_{k(t)}^{t} \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{ab}(s) \vee R_{ac}(s) \vee 1} \mathbb{1}_{Q_3^s} \mathbb{1}_{A_t}\right) ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{k(t)}^{t} \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} \mathrm{P}(Q_3^s \cap A_t \mid \mathcal{F}^{ab})\right) ds \leq$$

$$\leq C_6 \int\limits_{k(t)}^{t} \frac{\ln\ln\ln s}{\ln\ln s} \mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} \mathbb{1}_{A_t^{ab}}\right) ds \leq$$

$$\leq C_6 \frac{\ln\ln\ln k(t)}{\ln\ln k(t)} \mathbb{E}\left(\int\limits_{k(t)}^{t} \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} \mathbb{1}_{A_t^{ab}} ds\right).$$

Но, используя утверждение 11 и определение множества A_t^{ab}, имеем

$$\mathbb{E}\left(\int\limits_{k(t)}^{t}\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}\mathbb{1}_{A_t^{ab}}ds\right)\le\mathbb{E}\left(\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{R_{ab}(s)^2}\mathbb{1}_{R_{ab}(s)\ge 1}ds\right)+(\ln t)^2 f(t)\sim$$

$$\sim C_7(\ln t)^2 f(t),\quad t\to\infty,$$

при некотором $C_7>0$.

Итак, при некотором $C_8>0$ для всех достаточно больших t получаем

$$\int\limits_{k(t)}^{t}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{Q_3^s}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\le C_8\frac{\ln\ln\ln k(t)}{\ln\ln k(t)}(\ln t)^2 f(t). \tag{18}$$

Из утверждения 12 следует, что

$$\int\limits_{0}^{k(t)}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\le\int\limits_{0}^{k(t)}\mathbb{E}\frac{1}{R_{ab}(s)^2\vee 1}ds\sim$$

$$\sim C_3\sqrt{k(t)}\ln k(t)=o((\ln t)^2),\quad t\to\infty. \tag{19}$$

Теперь из (16) – (19) при достаточно больших t имеем

$$\int\limits_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds\le$$

$$\le\int\limits_{0}^{k(t)}\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{ab}(s)\vee 1}\frac{1}{R_{ab}(s)\vee R_{ac}(s)\vee 1}\mathbb{1}_{A_t}\right)ds+\frac{1}{g(k(t))^2}\frac{(\ln t)^2}{2}+$$

$$+C_4(\ln t)^2\frac{f(t)}{h(k(t))}+C_8\frac{\ln\ln\ln k(t)}{\ln\ln k(t)}(\ln t)^2 f(t)=o((\ln t)^2),\quad t\to\infty.$$

Утверждение 14 доказано.

Утверждение 15. *Имеет место сходимость*

$$\frac{\int_0^t|d\langle\Phi_{ab},\Phi_{ac}\rangle_s|}{(\ln t)^2}\xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{P}}0.$$

Доказательство. Это утверждение является следствием утверждения 14 и того факта, что $\mathrm{P}(A_t)\to 1$ $(t\to\infty)$.

Аналогичные рассуждения позволяют получить следующее утверждение.

Утверждение 16. *Для попарно различных точек плоскости a, b, c, d имеет место*

$$\frac{\int_0^t|d\langle\Phi_{ab},\Phi_{cd}>_s|}{(\ln t)^2}\xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{P}}0.$$

Рассмотрим в условиях теоремы 3 траектории частиц $F_t(x_i),\ 1 \le i \le m,$ выходящие из попарно различных точек плоскости $x_1, \ldots, x_m$. Для каждой пары частиц $k,\ l,\ k \ne l$, обозначим $R_{kl}(t) = \|F_t(x_k) - F_t(x_l)\|,\ \Phi_{kl}(t)$ — угол обхода траектории $F_s(x_k)$ вокруг частицы $F_s(x_l)$ к моменту времени t. В предыдущих рассуждениях мы показали, что

$$\frac{\int_0^t |d\langle \Phi_{ij}, \Phi_{kl} >_t|}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{P}} 0$$

при $\{i,j\} \ne \{k,l\}$. Несложно проверить, что для всех $i,\ j,\ k,\ l$ имеет место соотношение

$$\langle \Phi_{ij}, \Phi_{kl}\rangle_t = \langle \ln R_{ij}, \ln R_{kl}\rangle_t.$$

Поэтому

$$\frac{\int_0^t |d\langle \ln R_{ij}, \ln R_{kl}\rangle_t|}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{P}} 0$$

при $\{i,j\} \ne \{k,l\}$. Также можно показать, что

$$\frac{\int_0^t |d\langle \ln R_{ij}, \Phi_{kl} >_s|}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{P}} 0$$

при $\{i,j\} \ne \{k,l\}$.

В дальнейших выкладках мы будем использовать обозначение

$$f^{(h)}(u) = \frac{1}{h} f(h^2 u), \quad h > 0.$$

Приведенные оценки позволяют получить следующий результат.

Утверждение 17. *Пусть $\{\alpha_n\}$ — такая последовательность положительных чисел, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. Пусть $(\beta_{kl},\ \gamma_{kl},\ 1 \le k < l \le m)$ — ассоциированные с локальными мартингалами $(\ln R_{kl},\ \Phi_{kl},\ 1 \le k < l \le m)$ броуновские движения (см. определение 5). Тогда*

$$\left(\beta_{kl}^{(\alpha_n)}, \gamma_{kl}^{(\alpha_n)},\ 1 \le k < l \le m\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\beta_{kl}^{\infty}, \gamma_{kl}^{\infty},\ 1 \le k < l \le m\right),$$

где $\beta_{kl}^{\infty},\ \gamma_{kl}^{\infty},\ 1 \le k < l \le m,$ — независимые в совокупности броуновские движения,

$$\beta_{kl}^{(a)}(t) = \frac{1}{a}\beta_{kl}(a^2 t), \qquad \gamma_{kl}^{(a)}(t) = \frac{1}{a}\gamma_{kl}(a^2 t).$$

Доказательство. Из утверждений 15, 16 следует, что существует такая последовательность $\{H_n\}$, что $H_n \to \infty\ (n \to \infty),\ \alpha_n = o(\ln H_n)\ (n \to \infty)$, для любых $p,\ q,\ k,\ l,\ \{p,q\} \ne \{k,l\}$, выполнено

$$\frac{\int_0^{H_n} |d\langle \Phi_{pq}, \Phi_{kl}\rangle_{H_n}|}{\alpha_n^2} = \frac{\int_0^{H_n} |d\langle \ln R_{pq}, \ln R_{kl}\rangle_{H_n}|}{\alpha_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Рассмотрим последовательность наборов локальных мартингалов

$$\left(\frac{\ln R_{kl}}{\alpha_n},\, \frac{\Phi_{kl}}{\alpha_n},\, 1 \le k < l \le m\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и пусть $(\beta^n_{kl},\, \gamma^n_{kl},\, 1 \le k < l \le m)$ — ассоциированные с этими локальными мартингалами броуновские движения (см. определение 5). Заметим, что имеют место соотношения

$$\beta^n_{kl}(s) = \frac{1}{\alpha_n}\beta_{kl}(\alpha_n^2 s), \quad s \ge 0,$$

$$\gamma^n_{kl}(s) = \frac{1}{\alpha_n}\gamma_{kl}(\alpha_n^2 s), \quad s \ge 0.$$

Утверждение 6 и условия на последовательность $\{H_n\}$ делают возможным применение теоремы 4 к последовательности локальных мартингалов

$$\left(\frac{\ln R_{kl}}{\alpha_n},\, \frac{\Phi_{kl}}{\alpha_n},\, 1 \le k < l \le m\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Следовательно, имеет место следующая слабая сходимость в пространстве $C[0,\infty)$:

$$\left(\beta^n_{kl},\, \gamma^n_{kl},\, 1 \le k < l \le m\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} \left(\beta^\infty_{kl},\, \gamma^\infty_{kl},\, 1 \le k < l \le m\right),$$

где $\beta^\infty_{kl},\, \gamma^\infty_{kl},\, 1 \le k < l \le m,$ — независимые в совокупности броуновские движения.

Утверждение 17 доказано.

Отсюда несложно получить основной результат статьи (теорему 3). Рассуждения при этом аналогичны используемым в работе [13] при исследовании совместного асимптотического распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек плоскости. Итак, мы рассматриваем случайные моменты времени

$$T_{kl}(r) = \inf\{s > 0 \colon R_{kl}(s) = r\}$$

и показываем, что углы обхода $\Phi_{kl}(t)$ в некотором смысле хорошо приближаются углами $\Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t}))$. Точнее говоря, согласно утверждению 7

$$\frac{\Phi_{kl}(t) - \Phi_{kl}\left(T_{kl}(\sqrt{t})\right)}{\frac{1}{2}\ln t} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{P}} 0,$$

в то время как

$$\frac{\Phi_{kl}\left(T_{kl}(\sqrt{t})\right)}{\frac{1}{2}\ln t} \xrightarrow[t\to\infty]{d} \xi,$$

где ξ — случайная величина, имеющая стандартное распределение Коши. Остается показать, что

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\ln t}\Phi_{kl}\left(T_{kl}(\sqrt{t})\right),\, 1 \le k < l \le m\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (\xi_{kl},\, 1 \le k < l \le m), \tag{20}$$

где ξ_{kl} — независимые случайные величины с распределением Коши. Последнее соотношение получается из утверждения 17 применением следующей леммы из работы [13].

Лемма 5. *Допустим, что для всех $j = 1, \ldots, k$ и $n = 1, 2, \ldots$ X_j^n — такие случайные элементы со значениями в сепарабельном метрическом пространстве S_j, что для каждого j распределение X_j^n не зависит от n, и при $n \to \infty$*

$$(X_j^n,\, j = 1, \ldots, k) \xrightarrow{d} (X_j,\, j = 1, \ldots, k).$$

Тогда для измеримых борелевских функций $\phi_j : S_j \to T_j$ со значениями в некоторых сепарабельных метрических пространствах T_j имеет место сходимость

$$(\phi_j(X_j^n),\, j = 1, \ldots, k) \xrightarrow{d} (\phi_j(X_j),\, j = 1, \ldots, k).$$

Итак, пусть $\{t_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $t_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Положим $\alpha_n = \dfrac{1}{2} \ln t_n$, и пусть, как в доказательстве утверждения 17,

$$\beta_{kl}^n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \beta_{kl}(\alpha_n^2 s), \quad s \geq 0,$$

$$\gamma_{kl}^n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\alpha_n^2 s), \quad s \geq 0.$$

Мы применяем лемму 5 к наборам двумерных броуновских движений X_{kl}^n, где

$$X_{kl}^n(t) = \beta_{kl}^n(t) - \beta_{kl}^n(0) + i\gamma_{kl}^n(t),$$

а в качестве $\phi_j : C[0, \infty) \times C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ используем одну и ту же функцию

$$\phi(u(\cdot), v(\cdot)) = \phi(u(\cdot) + iv(\cdot)) = v(\inf\{s \colon u(s) = 1\}).$$

Применение леммы дает сходимость по распределению набора случайных величин $\gamma_{kl}^n(\inf\{u \colon \beta_{kl}^n(u) - \beta_{kl}^n(0) = 1\})$ к набору независимых случайных величин с распределением Коши. Легко видеть, что $\beta_{kl}^n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ при всех $k < l$ и

$$\gamma_{kl}^n\big(\inf\{u \colon \beta_{kl}^n(u) = 1\}\big) - \gamma_{kl}^n\big(\inf\{u \colon \beta_{kl}^n(u) - \beta_{kl}^n(0) = 1\}\big) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Следовательно, и

$$\big(\gamma_{kl}^n(\inf\{u \colon \beta_{kl}^n(u) = 1\}),\, 1 \leq k < l \leq m\big) \xrightarrow[n \to \infty]{d} (\xi_{kl},\, 1 \leq k < l \leq m),$$

где ξ_{kl} — независимые случайные величины с распределением Коши.

Заметим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \ln t_n} \Phi_{kl}\left(T_{kl}(\sqrt{t_n})\right) = \gamma_{kl}^n(\inf\{u \colon \beta_{kl}^n(u) = 1\}).$$

Тем самым, имеем

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2} \ln t_n} \Phi_{kl}\left(T_{kl}(\sqrt{t_n})\right),\, 1 \leq k < l \leq m \right) \xrightarrow[n \to \infty]{d} (\xi_{kl},\, 1 \leq k < l \leq m).$$

Поскольку последовательность $\{t_n\}$ произвольна, мы получили (20), и доказательство теоремы 3 завершено.

Литература

1. *Монин А. С., Яглом И. М.* Статистическая гидромеханика: В 2 ч. – М.: Наука, 1967. – Ч. 2. – 720 с.
2. *Le Jan Y.* On isotropic Brownian motions // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1985. – **70**, № 1. – S. 609 – 620.
3. *Kesten H., Papanicolaou G.* A limit theorem for turbulent diffusion // Communs Math. Phys. – 1979. – **65**, № 2. – P. 97 – 128.
4. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge: Univ. Press, 1997. – 346 p.
5. *Zirbel C. L., Woyczyński W. A.* Rotation of particles in polarized Brownian flows // Stochastics and Dynamics. – 2002. – **2**, № 1. – P.109 – 129.
6. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. – New York: Springer, 1987. – 258 p.
7. *Baxendale P. H.* The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms // Lyapunov Exponents: Lect. Notes Math. – New York: Springer, 1986. – **1186**. – P. 322 – 337.
8. *Zirbel C. L., Woyczyński W. A.* Mean occupation times of continuous one-dimensional Markov processes // Stochast. Process. and Appl. – 1997. – **69**, № 2. – P. 161 – 178.
9. *Jean-Luc Thiffeault.* Braids of entangled particle trajectories // Chaos. – 2010. – **20**, № 1.
10. *Yor M.* Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes correles // Progr. Probab. – 1991. – **28**. – P. 441 – 455.
11. *Zirbel C. L.* Stochastic flows — dispersion of a mass distribution and Lagrangian observations of a random field: PhD Thesis. – Princeton Univ., 1993.
12. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. – Springer, 2002. – 638 p.
13. *Pitman J., Yor M.* Asymptotic laws of planar Brownian motion // Ann. Probab. – 1986. – **14**, № 3. – P. 733 – 779.
14. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. – М., 1963. – Ч. 2. – 516 с.
15. *Revuz D., Yor M.* Continuous martingales and Brownian motion. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. – 535 p.
16. *Mörters P., Peres Y.* Brownian motion. – Cambridge Univ. Press, 2010. – 416 p.
17. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968. – 396 с.
18. *Zirbel C. L., Woyczyński W. A.* Translation and dispersion of mass by isotropic Brownian flows // Stochast. Process. and Appl. – 1997. – **70**, № 1. – P. 1 – 29.
19. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge Univ. Press, 1987. – 494 p.

Получено 29.03.16