УДК 517.927.4

Д. С. Джумабаев, Р. Е. Утешова (Ин-т матемитики и мат. моделирования МНО Республики Казахстан, Междунар. ун-т информ. технологий, Алматы)

ПРЕДЕЛЬНОЕ С ВЕСОМ РЕШЕНИЕ В СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО СВОЙСТВО*

On a finite interval, we consider a system of nonlinear ordinary differential equations with a singularity at the left endpoint of the interval. The definition of weighted limit solution is introduced and its attracting property is established.

На скінченному інтервалі розглядається система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з особливістю на лівому кінці інтервалу. Введено означення граничного з вагою розв'язку та встановлено його притягувальну властивість.

1. Введение. На $(0,T)$ рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

где $f : (0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, которая в начальной точке интервала $(0,T)$ имеет особенность, отмеченную ниже в условии B_2.

Уравнения с особенностями в конечной точке часто возникают в приложениях. Различные задачи для таких уравнений рассмотрены многими авторами (см. [1 – 8] и приведенную там библиографию).

В [9] для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ введено определение предельного при $t \to \infty$ решения $x_0(t)$. Доказано, что при непрерывной дифференцируемости $f(t,x)$ по x и экспоненциальной дихотомичности на $\mathbb{R}_+$ линеаризованного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x_0(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

нелинейное уравнение имеет решение в некотором функциональном шаре с центром $x_0(t)$, и функция $x_0(t)$ притягивает все решения $x(t)$ из этого функционального шара:

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - x_0(t))|| = 0.$$

В настоящей статье исследуется поведение решений уравнения (1) вблизи особой точки $t = 0$. С этой целью вводится весовая функция, учитывающая особенности правой части уравнения (1), и дается определение предельного с весом при $t \to 0+0$ решения уравнения (1). Установлены условия, при которых уравнение (1) имеет решение в некотором функциональном шаре, и предельное с весом решение притягивает все решения уравнения (1) из этого шара при $t \to 0+0$.

* Выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 4057/UA4).

2. Ограниченные решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами. На интервале $(0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $A(t)$, $\varphi(t)$ непрерывны на $(0,T)$.

Предположим. что матрица уравнения (2) удовлетворяет следующим условиям.

Условие A_1**.** *Функция* $\alpha(t) = \|A(t)\| \equiv \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}(t)|$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\delta\to 0+0} \int\limits_{\delta}^{T} \alpha(t)\,dt = \infty.$$

Условие A_2**.** *Предел* $\lim_{\delta\to 0+0} \dfrac{A(t)}{\alpha(t)} = A_0$, *где* A_0 *— постоянная матрица, собственные значения которой имеют отличные от нуля действительные части:* $\operatorname{Re}\lambda_j(A_0) \neq 0$, $j = \overline{1,n}$.

Введем следующие пространства: $\widetilde{C}(J,\mathbb{R}^n)$ *— пространство непрерывных и ограниченных на* $J \subseteq (0,T)$ *функций* $x\colon J \to \mathbb{R}^n$ *с нормой* $\|x\|_1 = \sup_{t\in J} \|x(t)\|$; $\widetilde{C}_{1/\alpha}(J,\mathbb{R}^n)$ *— пространство непрерывных и ограниченных с весом* $1/\alpha(t)$ *функций* $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ *с нормой* $\|\varphi\|_{1/\alpha} = \sup_{t\in J} \|\varphi(t)/\alpha(t)\|$.

Через S_0 обозначим вещественную неособую $(n\times n)$-матрицу, приводящую матрицу A_0 к обобщенно-жордановой форме

$$\widetilde{A}_0 = S_0 A_0 S_0^{-1} = \left\| \begin{matrix} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{matrix} \right\|,$$

где A_{11}^0 и A_{22}^0 состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матрицы A_0 с отрицательными и положительными действительными частями, число которых обозначим n_1^- и n_2^- соответственно.

Рассмотрим сингулярную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad t \in (0,\delta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}((0,\delta],\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

$$P_1 S_0 x(\delta) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n_2^-}, \tag{4}$$

$$x(t) \in \widetilde{C}\left((0,\delta],\mathbb{R}^n\right), \tag{5}$$

где $P_1 = \left(0, I_{n_2^-}\right)$ — $\left(n_2^- \times n\right)$-матрица.

Определение 1. *Задача* (3)–(5) *называется корректно разрешимой, если для любых* $d \in \mathbb{R}^{n_2^-}$ *и* $\varphi(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}((0,\delta],\mathbb{R}^n)$ *она имеет единственное решение* $x(t)$ *и для него справедлива оценка*

$$\sup_{t\in(0,\delta]} \|x(t)\| \le K \max(\|d\|, \|\varphi\|_{1/\alpha}),$$

где K *— постоянная, не зависящая от* $d, \varphi(t)$.

По схеме доказательств теорем 4 и 5 из [10] устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Тогда существует такое* $\delta_0 \in \left(0, \dfrac{T}{2}\right]$, *что при всех* $\delta \in (0, \delta_0]$ *сингулярная краевая задача* (3)–(5) *корректно разрешима.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2 *и* $\lim_{t\to 0+0} \left\|\dfrac{\varphi(t)}{\alpha(t)}\right\| = 0$. *Тогда для всех ограниченных на* $(0, T/2)$ *решений уравнения* (3) *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{t\to 0+0} \|x(t)\| = 0.$$

3. Предельное с весом решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть $x_0(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $(0, T)$ функция.

Введем следующие обозначения:

$$S(x_0(t), J, r) = \left\{x(t) \in \widetilde{C}\,(J, \mathbb{R}^n) : x(t) - x_0(t) \in \widetilde{C}\,(J, \mathbb{R}^n)\,,\ \|x - x_0\|_1 < r\right\},$$

$$G(x_0(t), J, r) = \{(t, x) : t \in J;\ \|x - x_0(t)\| < r\}\,.$$

Условие $\mathrm{B}_\mathbf{1}$. *Функция* $f'_x(t, x)$ *равномерно непрерывна в* $G(x_0(t), (0, T), r)$.

Условие $\mathrm{B}_\mathbf{2}$. *Функция* $\alpha(t) = \|f'_x(t, x_0(t))\|$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\delta\to 0+0} \int\limits_{\delta}^{T/2} \alpha(t)dt = \infty.$$

Условие $\mathrm{B}_\mathbf{3}$. *Предел* $\lim_{t\to 0+0} \dfrac{f'_x(t, x_0(t))}{\alpha(t)} = A_0$, *где* A_0 — *постоянная матрица, собственные значения которой имеют отличные от нуля действительные части:* $\operatorname{Re}\lambda_j(A_0) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Определение 2. *Непрерывно дифференцируемая на* $(0, T/2)$ *функция* $x_0(t)$ *называется предельным с весом* $1/\alpha(t)$ *при* $t \to 0 + 0$ *решением уравнения* (1), *если*

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{\|\dot{x}_0(t) - f(t, x_0(t))\|}{\alpha(t)} = 0.$$

Рассмотрим сингулярную задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in (0, \delta], \quad 0 < \delta < T, \tag{6}$$

$$P_1 S_0[x(\delta) - x_0(\delta)] = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n_2^-}, \tag{7}$$

$$x(t) \in S(x_0(t), (0, \delta], r_0), \quad r_0 > 0, \tag{8}$$

где $P_1 = \left(0, I_{n_2^-}\right) - \left(n_2^- \times n\right)$ −матрица.

Теорема 3. *Пусть* $x_0(t)$ — *предельное с весом* $1/\alpha(t)$ *при* $t \to 0 + 0$ *решение уравнения* (1) *и выполнены условия* B_1 – B_3. *Тогда найдутся такие числа* $\delta_0 \in (0, T)$, $r_0 > 0$ *и* $\rho_0 > 0$, *что для любого* $\delta \in (0, \delta_0]$ *задача* (6)–(8) *имеет единственное решение при всех* $d \in \mathbb{R}^{n_2^-}$, *удовлетворяющих неравенству* $\|d\| < \rho_0$.

Доказательство. Выполнив в (6) – (8) замену $u = x - x_0(t)$, получим сингулярную краевую задачу

$$\frac{du}{dt} = f(t, u + x_0(t)) - \dot{x}_0(t), \quad t \in (0, \delta_0], \tag{9}$$

$$P_{n_2^-} S_0 u(\delta) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n_2^-}, \tag{10}$$

$$u(t) \in S(0, (0, \delta], r_0). \tag{11}$$

Введем следующие обозначения:

$$X = \widetilde{C}\left((0, \delta], \mathbb{R}^n\right), \quad Y = X \dot{+} \mathbb{R}^{n_2^-},$$

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha(t)} \dfrac{d}{dt} \\ \\ O_{n_2^- \times n} \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\alpha(t)} f(t, u(t) + x_0(t)) + \dot{x}_0(t) \\ \\ P_{n_2^-} S_0 u(\delta) - d \end{pmatrix},$$

где $O_{n_2^- \times n}$ — нулевая $\left(n_2^- \times n\right)$-матрица, и запишем задачу (9) – (11) в виде операторного уравнения

$$A(u) \equiv Hu + F(u) = 0.$$

Норма элемента $y \in Y$ определяется соотношением

$$\|y\|_Y = \left\| \left(\widetilde{f}(t)/\alpha(t), d\right) \right\|_Y = \max\left(\left\| \widetilde{f} \right\|_{1/\alpha}, \|d\| \right).$$

Выполнение условия B_1 обеспечивает существование производной Фреше для оператора $F(u)$:

$$F'(u) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\alpha(t)} f'_x(t, u(t) + x_0(t)) \\ \\ P_1 S_0 J_\delta \end{pmatrix},$$

которая является равномерно непрерывной в $S(0, r) \subset \widetilde{C}\left((0, \delta], \mathbb{R}^n\right)$. Здесь линейный оператор $J_\delta : \widetilde{C}\left((0, \delta], \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}^n$ определяется равенством $J_\delta x(t) = x(\delta)$.

Уравнение $[H + F'(0)]\, u = y,\ u \in X,\ y \in X$, эквивалентно линейной сингулярной краевой задаче

$$\frac{du}{dt} = f'_x(t, x_0(t))u + \widetilde{f}(t), \quad t \in (0, \delta], \quad \widetilde{f}(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}((0, \delta], \mathbb{R}), \tag{12}$$

$$P_1 S_0(\delta) u(\delta) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n_2^-}, \tag{13}$$

$$u(t) \in \widetilde{C}((0, \delta], \mathbb{R}^n). \tag{14}$$

Согласно теореме 1, существует такое $\delta_0 \in (0, T/2]$, что при всех $\delta \in (0, \delta_0]$ краевая задача (12) – (14) для любых $d \in \mathbb{R}^{n_2^-}$ и $\widetilde{f}(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}\left((0, \delta], \mathbb{R}^n\right)$ имеет единственное решение $u(t)$ и для него справедлива оценка

$$\|u(t)\|_1 = \sup_{t\in(0,\delta]} \|u(t)\| \le \gamma_0 \max\left(\|d\|, \|\widetilde{f}\|_{1/\alpha}\right),$$

где γ_0 — постоянная, не зависящая от $d, \widetilde{f}(t)$. Следовательно, оператор $H + F'(0)$ обратим и $\left\|[H + F'(0)]^{-1}\right\|_{L(Y,X)} \le \gamma_0$.

Выберем $\varepsilon > 0$ удовлетворяющим неравенству $\varepsilon\gamma_0 < 1$. В силу равномерной непрерывности $F'(u)$ в $S(0,r)$ найдется такое $r_0 \in (0,r]$, что для всех $u \in S(0,r_0)$ выполняется неравенство $\|F'(u) - F'(0)\|_{L(X,Y)} \le \varepsilon$.

Поскольку $x_0(t)$ — предельное с весом $1/\alpha(t)$ при $t \to 0+0$ решение уравнения (6), то существует такое число $\delta_0 \in (0, T/2]$, что

$$\frac{\gamma_0}{1-\varepsilon\gamma_0}\left\|H\cdot 0 + F'(0)\right\| = \frac{\gamma_0}{1-\varepsilon\gamma_0}\sup_{t\in(0,\delta_0]}\frac{\|\dot{x}_0(t) - f(t, x_0(t))\|}{\alpha(t)} < r_0.$$

Итак, для любых $\delta \in (0,\delta_0]$ и $d \in R^{n_2^-}: \|d\| < \rho_0,\ \rho_0 < r_0(1-\varepsilon\gamma_0)/\gamma_0$, все условия теоремы 6 из [9, с. 18] выполнены и задача (9)–(11), а следовательно и задача (6)–(8), имеет единственное решение.

Теорема 3 доказана.

Следующая теорема устанавливает притягивающее свойство предельного с весом $1/\alpha(t)$ при $t \to 0+0$ решения.

Теорема 4. *Пусть $x_0(t)$ — предельное с весом $1/\alpha(t)$ при $t \to 0+0$ решение уравнения* (1) *и выполнены условия* B_1 – B_3. *Тогда:*

1) *существуют числа $\delta_0 > 0,\ r_0 \in (0,r]$, при которых в $S(x_0(t),\ (0,\delta_0], r_0)$ уравнение* (1) *имеет хотя бы одно решение;*

2) *для любого решения $x(t)$ уравнения* (1), *принадлежащего $S(x_0(t),(0,\delta_0],r_0)$, имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{t\to 0+0}\|x(t) - x_0(t)\| = 0.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 3.

Пусть $\widetilde{x}(t) \in S(x_0(t),(0,\delta_0],r_0)$ — решение уравнения (1). Тогда $u(t) = \widetilde{x}(t) - x_0(t)$ — ограниченное на $(0,\delta_0]$ решение линейного уравнения

$$\frac{du}{dt} = \widetilde{A}(t)u + F_0(t), \quad t \in (0,\delta_0], \tag{15}$$

с матрицей

$$\widetilde{A}(t) = \int_0^1 f'_x[t, \theta\widetilde{x}(t) + (1-\theta)x_0(t)]d\theta$$

и правой частью $F_0(t) = f(t, x_0(t)) - \dot{x}_0(t)$. При выполнении условия B_1 из неравенства

$$\|\theta\widetilde{x}(t) + (1-\theta)x_0(t) - x_0(t)\| \le \|\widetilde{x}(t) - x_0(t)\| < r_0,$$

следует, что для матрицы $\widetilde{A}(t)$ выполняются условия A_1, A_1. Поскольку $x_0(t)$ — предельное с весом $1/\alpha(t)$ при $t \to 0+0$ решение уравнения (1), то $\lim_{t\to 0+0}\left\|\dfrac{F_0(t)}{\alpha(t)}\right\| = 0$. Следовательно, к уравнению (15) применима теорема 2, согласно которой получаем

$$\lim_{t\to 0+0}\|\widetilde{x}(t) - x_0(t)\| = 0.$$

Теорема 4 доказана.

4. Пример. На интервале (0,1) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^2}\left(x_1^2 - x_2\right) + \frac{1}{t}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{t^2}\left(x_1 - x_2^2\right) + \sin t. \end{aligned} \tag{16}$$

Выберем в качестве $x_0(t)$ вектор $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что (16) удовлетворяет условиям $\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_3$. Для данной системы уравнений $\alpha(t) = 1/t^2$, $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, и матрица $S_0 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ приводит A_0 к обобщенно-жордановой форме. Тогда краевые условия (7), (8) для системы уравнений (16) принимают вид

$$x_1(\delta) + (\sqrt{3}-2)x_2(\delta) = d + \sqrt{3} - 1, \quad d \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$x(t) \in S(x_0(t), (0,\delta], r_0), \quad r_0 > 0. \tag{18}$$

Согласно теореме 3, найдутся числа такие $\delta_0 > 0$, $r_0 > 0$ и $\rho_0 > 0$, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ задача (16) – (18) имеет единственное решение при всех $d \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $\|d\| < \rho_0$. Более того, все решения системы уравнений (16), принадлежащие $S(x_0(t), (0,\delta], r_0)$, удовлетворяют соотношению $\lim_{t\to 0+0} x(t) = x_0$.

Литература

1. *Кигурадзе И. Т., Шехтер Б. Л.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. – 1987. – **30**. – С. 105 – 201.
2. *Самойленко А. М., Шкиль М. И., Яковец В. П.* Линейные системы дифференциальных уравнений с вырождением. – Киев: Вища шк., 2000. – 294 с.
3. *Самойленко А. М.* Узагальнена теорема про середнє значення для аналітичной функции та алгоритм визначення функції середніх значень // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 6. – С. 765 – 787.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Задачи с начальными асимптотическими данными для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. – 2006. – **407**, № 2. – С. 172 – 175.
5. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**. – С. 198 – 209.
6. *Kiguradze I. T.* Nonlinear nonlocal problems for second-order differential equations with respect to the phase variable // Different. Equat. – 2014. – **50**, № 8. – P. 1025 – 1041.
7. *Shampine L. F.* Singular boundary value problems for ODEs // Appl. Math. and Comput. – 2013. – **138**, № 2. – P. 99 – 112.
8. *Rachunkova I., Stanek S., Tvrdy M.* Solvability of nonlinear singular problems for ordinary differential equations. – Hindawi Publ., Corp., 2009. – 268 p.
9. *Джумабаев Д. С.* Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 1. – С. 13 – 29.
10. *Джумабаев Д. С.* Аппроксимация ограниченного решения и экспоненциальная дихотомия на оси // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – **30**, № 11. – С. 1646 – 1660.

Получено 03.06.17