УДК 517.9

С. Т. Гусейнов (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан)

ГЕЛЬДЕРОВА НЕПРЕРЫВНОСТЬ И НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ РЕШЕНИЙ РАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ЧАСТИ ОБЛАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО p-ЛАПЛАСИАН

We consider quasilinear equations of the p-Laplacian type uniformly degenerating in a part of the domain. An analog of the Harnack inequality is proved for nonnegative solutions and the Hölder continuity of the solutions is established by using this inequality.

Розглядаються квазілінійні рівняння типу p-лапласіана, що рівномірно вироджується в частині області. Доведено аналог нерівності Харнака для невід'ємних розв'язків, за допомогою якого встановлено гельдерову неперервність розв'язків.

1. Введение. Рассмотрим в области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = \operatorname{div}\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}a\nabla u\right) = 0, \qquad p > 1, \tag{1.1}$$

с положительным весом $\omega_\varepsilon(x)$, который определим ниже, и измеримой симметричной матрицей $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, удовлетворяющей для почти всех $x \in D$ условию равномерной эллиптичности

$$\gamma^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma|\xi|^2. \tag{1.2}$$

Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, & x \in D^{(1)}, \\ 1, & x \in D^{(2)}, \quad \varepsilon \in (0,1]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Под решением уравнения (1.1) понимается функция $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}a\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = 0 \tag{1.4}$$

на пробных функциях $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{1,p}(D)$ с компактным носителем в D.

Известно [1], что при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0,1]$ любое решение уравнения (1.1) в произвольной подобласти $\overline{D'} \subset D$ принадлежит пространству $C^\alpha(D')$ гельдеровых в D' функций. В случае $p = 2$ было показано [2], что показатель Гельдера для решения уравнения (1.1) не зависит от ε. Для произвольного показателя $p > 1$ этот результат установлен в [3].

Важным для качественной теории свойством решений является неравенство Харнака (см. [4]): если $\omega_\varepsilon \equiv 1$, то для неотрицательного в шаре $B_{4R} \subset D$ решения u уравнения (1.1) выполняется

$$\inf_{B_R} u \geq c \sup_{B_R} u, \qquad c = c(n, p, \gamma) > 0. \tag{1.5}$$

В пункте 2 нами показано, что классическое неравенство (1.5) для решений уравнения (1.1) с постоянной, не зависящей от ε, не имеет места. В настоящей работе мы установим аналог неравенства Харнака для неотрицательных решений с постоянной, не зависящей от ε. Основная цель — получить аналог неравенства (1.5) в окрестности раздела фаз Σ. Прежде чем его сформулировать, обозначим через B_R открытый шар радиуса R с центром на $\Sigma \cap D$ и положим

$$B_R^- = B_R \cap \{x\colon\ -R < x_n < -R/2\}. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1. *Если $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения* (1.1) *в шаре $B_{4R} \subset D$ с центром на Σ, то выполняется неравенство*

$$\inf_{B_R} u \geq \nu \sup_{B_R^-} u, \tag{1.7}$$

в котором положительная постоянная $\nu < 1$ не зависит от u, R и ε.

Отметим, что в случае $p = 2$ аналогичный результат получен в работе [5]. Из неравенства (1.7) следует гельдерова непрерывность решений уравнения (1.1) с показателем Гельдера, не зависящим от ε.

2. Неравенство Харнака. Ниже B_R — шары с центром на $\Sigma \cap D$, $B_R^{(i)} = D^{(i)} \cap B_R$ — полушары, $|E|$ — n-мерная мера Лебега измеримого множества $E \subset R^n$ и

$$\fint_E f dx = \frac{1}{|E|} \int_{|E|} f dx.$$

Будем пользоваться теоремой вложения Соболева

$$\left(\fint_{B_R^{(i)}} |\varphi|^{pk} dx \right)^{1/k} \leq c(n,p) R^p \fint_{B_R^{(i)}} |\nabla \varphi| dx, \qquad \varphi \in C_0^\infty(B_R), \quad k = \frac{n}{n-1}, \quad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

2.1. Отсутствие классического неравенства Харнака. Покажем отсутствие обычного неравенства Харнака в области $B_{16} \setminus \overline{B_1^{x_0}}$, где $x_0 = (0, \ldots, 0, 4)$. Рассмотрим решение задачи

$$\operatorname{div} \big(\omega_\varepsilon(x) |\nabla u|^{p-2} a \nabla u \big) = 0 \quad \text{в} \quad B_{16} \setminus \overline{B_1^{x_0}}, \qquad u|_{\partial B_{16}} = 0, \quad u|_{\partial B_1^{x_0}} = 1, \tag{2.2}$$

где $x_0 = (0, \ldots, 0, 4)$. Решение ищем минимизацией интегрального функционала

$$F[v] = \int_{B_{16} \setminus \overline{B_1^{x_0}}} \omega_\varepsilon(x) |\nabla v|^{p-2} a \nabla v \cdot \nabla v \, dx \tag{2.3}$$

по функциям $v \in W^{1,p}(B_{16} \setminus \overline{B_1^{x_0}})$, удовлетворяющим граничным условиям (2.2). Пусть φ — непрерывно дифференцируемая функция, равная единице в шаре $B_1^{x_0}$ и нулю вне шара $B_2^{x_0}$. Поскольку решение u задачи (2.2) доставляет минимум функционалу (2.3), то

$$\int\limits_{B_{16}\cap\{x_n<0\}} \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}a\nabla u\cdot\nabla u\,dx \le \int\limits_{B_{16}} \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}a\nabla u\cdot\nabla u\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{B_{16}} \omega_\varepsilon(x)|\nabla \varphi|^{p-2}a\nabla \varphi\cdot\nabla \varphi\,dx \le C,$$

или, поскольку $\omega_\varepsilon(x) = 1$ при $x_n < 0$, в силу (1.2) и выбора φ

$$\int\limits_{B_{16}\cap\{x_n<0\}} |\nabla u|^p\,dx \le C(n,\varphi,\gamma).$$

Отсюда, используя неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{B_{16}\cap\{x_n<0\}} u^p\,dx \le C(n,p)\int\limits_{B_{16}\cap\{x_n<0\}} |\nabla u|^p\,dx,$$

имеем

$$\int\limits_{B_{16}\cap\{x_n<0\}} u^p\,dx \le C(n,p,\varphi,\gamma). \tag{2.4}$$

Пусть y_0 — точка, симметричная точке x_0 относительно Σ. Предполагая, что имеет место классическое неравенство Харнака с постоянной, не зависящей от ε, из (2.4) получаем

$$\sup_{B_1^{y_0}} u^p \le C(n,p)\int\limits_{B_{16}\cap\{x_n<0\}} u^p\,dx \le C(n,p,\varphi,\gamma),$$

откуда

$$\sup_{B_1^{y_0}} u \le C(n,p,\varphi,\gamma). \tag{2.5}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\operatorname{div}\big(\omega_\varepsilon(x)|\nabla w|^{p-2}a\nabla w\big) = 0 \quad \text{в} \quad B_4^{x_0}\setminus\overline{B_1^{x_0}}, \quad w|_{\partial B_4^{x_0}} = 0, \quad u|_{\partial B_1^{x_0}} = 1. \tag{2.6}$$

По принципу максимума

$$u(x) \ge w(x) \quad \text{при} \quad x\in B_4^{x_0}\setminus\overline{B_1^{x_0}}. \tag{2.7}$$

Поскольку $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon$ при $x\in B_4^{x_0}$, то задачу (2.6) можно записать в виде

$$div\big(|\nabla w|^{p-2}a\nabla w\big) = 0 \quad \text{в} \quad B_4^{x_0}\setminus\overline{B_1^{x_0}}, \quad w|_{\partial B_4^{x_0}} = 0, \quad u|_{\partial B_1^{x_0}} = \varepsilon^{-1}.$$

Из нижних оценок (18) и (19) емкостного потенциала работы [6] следует, что

$$\inf_{\partial B_2^{x_0}} w \ge c(n,p,\gamma)\varepsilon^{-1}$$

и в силу (2.7)

$$\inf_{\partial B_2^{x_0}} u \ge c(n,p,\gamma)\varepsilon^{-1}. \tag{2.8}$$

Согласно обычному неравенству Харнака должна выполняться оценка

$$\sup_{\partial B_2^{x_0}} u \le C(n,p,\gamma) \inf_{B_1^{y_0}} u \tag{2.9}$$

Оценки (2.5) и (2.8) противоречат оценке (2.9) при малых значениях ε.

2.2. Оценка минимума неотрицательного решения. Пусть $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения (1.1), $\tilde{u}(x)$ — четное продолжение $u(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$ относительно гиперплоскости Σ и $B_R \subset D$. Ниже полагаем

$$v(x) = \begin{cases} \min(u(x), \widetilde{u}(x)), & \text{если} \quad x \in D^{(1)}, \\ u(x), & \text{если} \quad x \in D^{(2)}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Лемма 2.1. *Для любого $q > 0$ выполняться неравенство*

$$\inf_{B_R} v \ge c \left(\fint_{B_{2R}} v^{-q}(x) dx \right)^{-1/q} \tag{2.11}$$

с постоянной c, не зависящей от u, R и ε.

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать решение $u(x)$ положительным. В противном случае нужно рассмотреть функцию $u(x) + \delta$ и перейти к пределу при $\delta \to 0$ в оценке (2.11). Предварительно установим, что для любых $R \le \rho < r \le 2R$ и $q_0 > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{B_\rho} v \ge c \left(\frac{r-\rho}{r} \right)^t \left(\fint_{B_r} v^{-q}(x) dx \right)^{-1/q}, \tag{2.12}$$

в котором $t = a(n,q,\gamma) > 0$, а C не зависит от r, ρ, u и ε. Выберем в (1.4) пробную функцию $\xi = u^\beta(x)\eta^p(x)$, где $\eta(x) \in C_0^\infty(B_{3R})$ радиально симметрична и $\beta < 1 - p$. После простых оценок приходим к неравенству

$$\fint_{B_{3R}} |\nabla u|^p u^{\beta-1} \eta^p \omega_\varepsilon(x)\, dx \le c(p,\gamma) \fint_{B_{3R}} u^{\beta+p-1} |\nabla \eta|^p \omega_\varepsilon(x)\, dx. \tag{2.13}$$

В частности, из (1.3) имеем

$$\fint_{B_{3R}^{(2)}} |\nabla u|^p u^{\beta-1} \eta^p dx \le c \fint_{B_{3R}} u^{\beta+p-1} |\nabla \eta|^p dx \tag{2.14}$$

и по теореме вложения Соболева получаем

$$\left(\fint_{B_{3R}^{(2)}} u^{k(\beta+p-1)} \eta^{kp} dx \right)^{1/k} \le c\big(|\beta| + p - 1\big)^p R^p \fint_{B_{3R}} u^{\beta+p-1} |\nabla \eta|^p dx. \tag{2.15}$$

Установим аналогичную оценку в шаре $B_{4R}^{(1)}$. Пусть

$$G_R = B_{3R}^{(1)} \cap \{x : u(x) < \widetilde{u}(x)\} \tag{2.16}$$

и, предположив, что $G_R \neq 0$, возьмем в (1.4) пробную функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} \big(u^\beta(x) - \widetilde{u}^\beta(x)\big)\eta^p(x) \text{в} \quad G_R, \\ 0 \quad \text{в} \quad B_{3R} \backslash G, \end{cases}$$

где η и β имеют тот же смысл, что и выше. Тогда

$$\gamma^{-1}|\beta| \int\limits_{G_R} |\nabla u|^p u^{\beta-1}\eta^p dx \le \gamma|\beta| \int\limits_{G_R} |\nabla u|^{p-1}|\nabla\widetilde{u}|\widetilde{u}^{\beta-1}\eta^p dx +$$

$$+ p\gamma \int\limits_{G_R} |\nabla u|^p \eta^{p-1}|\nabla\eta| u^\beta dx + p\gamma \int\limits_{G_R} |\nabla u|^{p-1}\eta^{p-1}|\nabla\eta|\widetilde{u}^\beta dx.$$

Отсюда, используя определение G_R и неравенство Юнга, находим

$$\int\limits_{G_R} |\nabla u|^p u^{\beta-1}\eta^p dx \le c(p,\gamma)\times$$

$$\times \left(\int\limits_{G_R} |\nabla\tilde{u}|^p \tilde{u}^{\beta-1}\eta^p dx + \int\limits_{G_R} \widetilde{u}^{\beta+1}|\nabla\eta|^p dx + \int\limits_{G_R} u^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx \right). \tag{2.17}$$

Кроме того, в силу (2.14)

$$\fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} |\nabla\tilde{u}|^p \tilde{u}^{\beta-1}\eta^p dx \le c(p,\gamma) \left(\fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} u^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx + \fint\limits_{B_{3R}} \widetilde{u}^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx \right). \tag{2.18}$$

Складывая (2.17) и (2.18), по определению функции $v(x)$ получаем

$$\fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} |\nabla u|^p u^{\beta-1}\eta^p dx \le c(p,\gamma) \left(\fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} |\nabla\widetilde{u}|^p \tilde{u}^{\beta-1}\eta^p dx + \fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} \tilde{u}^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx + \right.$$

$$\left. + \fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} v^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx \right) \le c(p,\gamma) \left(\fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} \widetilde{u}^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx + \fint\limits_{B_{3R}^{(1)}} u^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx \right).$$

По теореме вложения Соболева (2.1)

$$\left(\fint_{B_{3R}^{(1)}} v^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}dx\right)^{1/k} \leq$$

$$\leq c\big(|\beta|+p-1\big)^p R^p \left(\fint_{B_{3R}^{(1)}} \widetilde{u}^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx + \fint_{B_{3R}^{(1)}} v^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx\right).$$

Поскольку $\tilde{u}(x)$ — четное продолжение $u(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$, приходим к неравенству

$$\left(\fint_{B_{3R}^{(1)}} v^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}dx\right)^{1/k} \leq c\big(|\beta|+p-1\big)^p R^p \fint_{B_{3R}^{(1)}} v^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx. \tag{2.19}$$

Таким образом, в силу (2.15) и (2.19)

$$\left(\fint_{B_{3R}} v^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}dx\right)^{1/k} \leq c(p,\gamma)\big(|\beta|+p-1\big)^p R^p \fint_{B_{3R}} v^{\beta+p-1}|\nabla\eta|^p dx. \tag{2.20}$$

До сих пор предполагалось, что $G_R \neq 0$. Если $G_R = 0$, то $v(x) = \widetilde{u}(x)$ в B_{3R} и (2.20) непосредственно следует из (2.15). Выбирая в (2.20) срезающую функцию $\eta = 1$ в B_r, $|\nabla\eta| \leq$ $\leq cr\big(R(r-\rho)\big)^{-1}$, имеем

$$\left(\fint_{B_r} v^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}dx\right)^{1/k} \leq c\big(|\beta|+p-1\big)^p \left(\frac{r}{r-\rho}\right)^p \fint_{B_r} v^{\beta+p-1}dx. \tag{2.21}$$

Проитерируем это неравенство. Пусть $j = 0, 1, \ldots$. Обозначим $r_j = \rho + 2^{-j}(r-\rho)$, $\chi_j =$ $= -qk^j$ и положим в (2.21) $r = r_j$, $\rho = r_{j+1}$, $\beta = \chi_i + 1 - p$. В результате для

$$\Phi_j = \left(\fint_{B_{r_j}} v^{1/\chi_j}dx\right)^{1/\chi_j}$$

получим рекуррентное соотношение

$$\Phi_j \leq c^{1/|\chi_j|}\left(2^j(1+|\chi_j|)\right)^{p/|\chi_j|}\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{p/\chi_j}\Phi_{j+1},$$

из которого (см. [7]) следует (2.12). Выбирая в этой оценке $\rho = R$ и $r = 2R$, получаем (2.11).

Лемма доказана.

Леммы 2.1 остается в силе и для неотрицательных суперрешений u уравнения (1.1), т. е. таких неотрицательных функций u, что

$$\int\limits_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}a\nabla u\cdot\nabla\xi\,dx\geq 0\quad\forall\xi\in C_0^\infty(D),\quad \xi\geq 0.$$

2.3. Неравенство Харнака. Ниже $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения (1.1) и $B_{3R}\subset D$ — шар с центром на Σ. Для доказательства неравенства Харнака нам потребуется лемма Джона – Ниренберга для функции $v(x)$, определенной в (2.10).

Лемма 2.2. *Для любого шара $B_r\subset B_{3R}$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{B_r}|\nabla\ln v|^p dx\leq c(n,p,\gamma)r^{n-p}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Как и выше, не ограничивая общности будем считать, что решение положительно, и положим $B_r^{(i)}=B_r\cap D^{(i)},\ i=1,2$. Возьмем срезающую функцию $\eta\in C_0^\infty(B_{3R})$ такую, что $\eta=1$ в B_r, $|\nabla\eta|\leq cr^{-1}$. Полагая в (1.4) $\xi=u^{1-p}\eta^p$, как и в (2.13), получаем

$$\int\limits_{B_r}|\nabla\ln u|^p\eta^p\omega_\varepsilon(x)dx\leq c(p,\gamma)r^{-p}\int\limits_{B_r}\omega_\varepsilon dx\leq c(n,p,\gamma)r^{n-p}.$$

Отсюда в силу (1.3) следует, что

$$r^{-p}\int\limits_{B_{2r}^{(2)}}|\nabla\ln u|^p\eta^p dx\leq c(n,p,\gamma)r^{-p}\int\limits_{B_r}\omega_\varepsilon\,dx\leq r^{n-p}, \tag{2.23}$$

и если $B_r\subset D^{(2)}$, то оценка (2.22) доказана. Пусть теперь $B_r\cap D^{(1)}\neq\varnothing$. Для доказательства аналогичной оценки в $B_r^{(1)}$ сначала предположим, что множество G_R (2.16) непусто, и выберем в (1.4) пробную функцию

$$\xi=\begin{cases}\left(u^{1-p}(x)-\widetilde{u}^{1-p}(x)\right)\eta^p(x) & \text{в}\quad G_R,\\ 0\quad\text{в}\quad B_{3R}\backslash G_R.\end{cases}$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\int\limits_{G_R}|\nabla\ln u|^p\eta^p dx\leq c(\gamma,p)\Bigg(\int\limits_{G_R}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\ln\tilde{u}|\widetilde{u}^{-1}\eta^p dx+$$

$$+\int\limits_{G_R}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\eta|\widetilde{u}^{-1}\eta^{p-1}dx+\int\limits_{G_R}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\eta|u^{-1}\eta^{p-1}dx\Bigg).$$

Поскольку $u(x)\leq\widetilde{u}(x)$ в G_R, с помощью неравенства Юнга находим

$$\int\limits_{G_R}|\nabla\ln u|^p\eta^p dx\leq c(\gamma,p)\Bigg(\int\limits_{G_R}|\nabla\ln\widetilde{u}|^p\eta^p dx+\int\limits_{G_R}|\nabla\eta|^p dx\Bigg)\leq$$

$$\leq c(\gamma, p)\left(\int\limits_{G_R} |\nabla \ln \widetilde{u}|^p \eta^p dx + r^{n-p}\right). \tag{2.24}$$

Сначала рассмотрим случай, когда центр шара B_r расположен в $\overline{D}^{(2)}$. Тогда в силу (2.23)

$$\int\limits_{B_{2r}^{(1)}} |\nabla \ln \tilde{u}|^p \eta^p dx \leq c(n, p, \gamma) r^{n-p}. \tag{2.25}$$

Складывая (2.24) и (2.25), имеем

$$\int\limits_{B_{2r}^{(1)}} |\nabla \ln v|^p \eta^p dx \leq c(p, \gamma)\left(\int\limits_{B_{2r}^{(1)}} |\nabla \ln \widetilde{u}|^p \eta^p dx + r^{n-p}\right) \leq c(p, \gamma) r^{n-p}. \tag{2.26}$$

Отсюда, учитывая (2.23), получаем неравенство

$$\int\limits_{B_{2r}^{(1)}} |\nabla \ln v|^p \eta^p dx \leq c(n, p, \gamma) r^{n-p}, \tag{2.27}$$

из которого следует (2.22).

Если множество G_R пусто, то $v(x) = \widetilde{u}(x)$ в $B_{3R}^{(1)}$ из (2.23). Рассмотрим теперь случай, когда $G_R \neq \varnothing$ и центр шара B_r расположен в $D^{(1)}$. Обозначим через $\widehat{B}_r$ образ шара B_r при зеркальном отображении относительно гиперплоскости Σ.

Согласно неравенству (2.23) для шара $\widehat{B}_{2r}$ выполняется

$$\int\limits_{\widehat{B}_{2r}^{(2)}} |\nabla \ln u|^p \eta^p dx \leq \int\limits_{B_{2r}^{(1)}} |\nabla \ln \widetilde{u}|^p \eta^p dx \leq c(n, p, \gamma) r^{n-p}. \tag{2.28}$$

Далее, как и выше, складывая (2.24) и (2.28), вновь получаем (2.26), что вместе с (2.23) приводит к неравенству (2.27), из которого следует (2.22). Если множество G_R пусто, то (2.22) следует из (2.23) и (2.28).

Лемма доказана.

Лемма 2.2 справедлива и для неотрицательных суперрешений уравнения (1.1). Следствием полученного результата является лемма Джона – Ниренберга, доказательство которой можно найти в [7].

Следствие. *Существуют положительные постоянные q и c, не зависящие от u, R, ε и такие, что*

$$\left(\fint\limits_{B_{2R}} v^{-q}(x) dx\right)^{-1/q} \geq c(n, p, \gamma)\left(\fint\limits_{B_{2R}} v^{q}(x) dx\right)^{1/q}. \tag{2.29}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения (1.1) и B_R^- — множество, определенное в (1.6). Используя (2.11) и (2.29), получаем

$$\inf_{B_R} u(x) \geq c(n,p,\gamma) \left(\fint_{B_{2R}} v^q(x)dx \right)^{1/q} \geq c(n,p,\gamma) \inf_{B_R^-} u(x).$$

Теперь неравенство (1.7) следует из классического неравенства Харнака для решений уравнения (1.1) в области $D^{(2)}$, согласно которому

$$\inf_{B_R^-} u(x) \geq c(n,p,\gamma) \sup_{B_R^-} u(x).$$

Теорема доказана.

2.4. Гельдеровская непрерывность решений. Из работы [1] известно, что решение гельдерово внутри $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$. Остается доказать гельдеровость решения в $\Sigma \cap D$, так как искомую гельдеровость внутри D можно получить элементарной „склейкой" гельдеровости в $\Sigma \cap D$ и $D^{(1)}$, $D^{(2)}$. Пусть $\overline{B}_{4R} \subset D$ — шар с центром на Σ и

$$M_{4R} = \sup_{B_{4R}} u(x), \qquad m_{4R} = \inf_{B_{4R}} u(x),$$

$$M_R^- = \sup_{B_R^-} u(x), \qquad m_R^- = \inf_{B_R^-} u(x).$$

Поскольку функции $M_{4R} - u(x)$ и $u(x) - m_{4R}$ являются неотрицательными решениями в B_{4R}, то по неравенству Харнака (1.7)

$$M_{4R} - M_R \geq \nu(M_{4R} - m_R^-), \quad m_R - m_{4R} \geq \nu(M_R^- - m_{4R}).$$

Складывая эти соотношения и используя то, что $\nu < 1$, получаем лемму об осцилляции

$$M_R - m_R \geq (1-\nu)(M_{4R} - m_{4R}),$$

показывающую гельдеру непрерывность решений на $\Sigma \cap D$.

Литература

1. *Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N.* On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**, № 3. – P. 481 – 495.
2. *Алхутов Ю. А., Гусейнов С. Т.* Гельдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2009. – **45**, № 1. – С. 54 – 59.
3. *Huseynov S. T.* On Holder property of solutions of degenerate quasilinear elliptic equations // Appl. Math. Sci. – 2015. – **9**, № 100. – P. 4979 – 4986.
4. *Serrin J.* Local behavior of solutions of quasi-linear equation // Acta Math. – 1964. – **111**, Issue 1. – P. 247 – 302.
5. *Алхутов Ю. А., Хренова Е. А.* Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2012. – С. 7 – 15.
6. *Maz'ya V. G.* On the continuity at a boundary point of solutions of quasi-linear elliptic equations // Vestn. Leningr. Univ. Math. – 1976. – **3**. – P. 225 – 242.
7. *J. Mozer* A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, № 3. – P. 457 – 468.

Получено 30.01.17