УДК 517.95

М. І. Іванчов, Н. Є. Кінаш (Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

We establish conditions for the existence and uniqueness of a smooth solution to the inverse problem for the two-dimensional heat equation with unknown leading coefficient depending on time and the space variable.

Установлены условия существования и единственности гладкого решения обратной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с неизвестным зависящим от времени и пространственной переменной старшим коэффициентом.

Серед обернених задач найбільш поширеними, через їхню практичну цінність та теоретичний інтерес, є коефіцієнтні задачі. Здебільшого їх поділяють на два класи задач зі своїми методами дослідження в залежності від того, залежать невідомі коефіцієнти від часової чи просторових змінних. Найменш дослідженими залишились задачі, в яких невідомі параметри залежать як від часової, так і від просторових змінних. У працях, присвячених цій тематиці, невідомі коефіцієнти мали вигляд або суми [1], або добутку [2, 3] функцій, що залежать окремо від часової і окремо від просторових змінних. Випадок, коли невідомі величини залежали безпосередньо від часової та частини просторових змінних, розглянуто у [4, 5].

У даній роботі у прямокутнику розглядається обернена задача для рівняння теплопровідності з невідомим старшим коефіцієнтом, який залежить від часової та просторової змінних. З використанням функції типу функції Гріна задачу зведено до рівняння щодо невідомого коефіцієнта, існування розв'язку якої доводиться із застосуванням теореми Шаудера. При доведенні єдиності розв'язку використовується теорія інтегральних рівнянь Вольтерра.

1. Формулювання задачі. В області $Q_T := \{(x, y, t): 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(y,t)u_{xx} + u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(y,t)$, початковою та крайовими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \mu_{11}(y,t), \quad u|_{x=h} = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = \mu_{21}(x,t), \quad u|_{y=l} = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{4}$$

та умовою перевизначення

$$a(y,t)u_x(0,y,t) = \mu_3(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{5}$$

де $D := \{(x,y) : 0 < x < h, 0 < y < l\}$. Під розв'язком задачі (1) – (5) будемо розуміти пару функцій [6] $(a(y,t),\, u(x,y,t)) \in C^{\gamma,0}([0,l] \times [0,T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T),\ 0 < \gamma < 1$, що задовольняють умови (1) – (5) у класичному розумінні. Крім того, $a(y,t) > 0,\ (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$.

2. Зведення задачі (1) – (5) до інтегрального рівняння. Припустимо, що виконуються такі умови:

(A$_1$) $\varphi \in C^2(\overline{D})$, $\mu_{1k} \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T])$, $\mu_{2k} \in C^{2,1}([0,h] \times [0,T])$, $k = 1,2$, $\mu_3 \in C^{\gamma,0}([0,l] \times [0,T])$, $f \in C^{1+\gamma,\gamma,0}(\overline{Q}_T)$;

(A$_2$) $\varphi_x(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$, $\mu_{11_t}(y,t) - \mu_{11_{yy}}(y,t) - f(0,y,t) \leq 0$, $\mu_{12_t}(y,t) - \mu_{12_{yy}}(y,t) - f(h,y,t) \geq 0$, $\mu_3(y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,l] \times [0,T]$, $\mu_{2k_x}(x,t) > 0$, $k = 1,2$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$, $f_x(x,y,t) \geq 0$, $(x,y,t) \in \overline{Q}_T$;

(A$_3$) умови узгодження нульового порядку [6, с. 468].

Позначимо $v := u_x$. Від задачі (1) – (5) перейдемо до еквівалентної задачі щодо $(a(y,t), v(x,y,t))$:

$$v_t = a(y,t)v_{xx} + v_{yy} + f_x(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(x,y,0) = \varphi_x(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{7}$$

$$a(y,t)\ v_x|_{x=0} = \mu_{11_t}(y,t) - \mu_{11_{yy}}(y,t) - f(0,y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{8}$$

$$a(y,t)\ v_x|_{x=h} = \mu_{12_t}(y,t) - \mu_{12_{yy}}(y,t) - f(h,y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{9}$$

$$v|_{y=0} = \mu_{21_x}(x,t), \quad v|_{y=l} = \mu_{22_x}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{10}$$

$$a(y,t)v(0,y,t) = \mu_3(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T]. \tag{11}$$

Для визначення функції $u(x,y,t)$ достатньо скористатись співвідношенням

$$u(x,y,t) = \mu_{11}(y,t) + \int_0^x v(\xi,y,t)\, d\xi.$$

Задачу (6) – (11) зведемо до рівняння

$$a(y,t) = Pa(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{12}$$

в якому оператор P задається рівністю

$$Pa(y,t) = \frac{\mu_3(y,t)}{v(0,y,t)}, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{13}$$

а функція $v(x,y,t)$ визначається як розв'язок задачі (6) – (10) при довільній заданій функції $a \in C^{\gamma,0}([0,l] \times [0,T])$.

3. Існування розв'язку. Насамперед встановимо оцінки розв'язку задачі (6) – (10). Припускаючи відомим коефіцієнт $a \in C^{\gamma,0}([0,l] \times [0,T])$, $a(y,t) > 0$, та використовуючи функцію Гріна $G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ задачі (6) – (10), запишемо розв'язок задачі (6) – (10) у вигляді

$$v(x,y,t) = \iint_D G(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$- \int_0^t \int_0^l G(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - \mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_\eta(x,y,t,\xi,0,\tau)\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^h G_\eta(x,y,t,\xi,l,\tau)\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\iint_D G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Беручи до уваги припущення ($\mathbf{A}_1$), ($\mathbf{A}_2$), звідси отримуємо

$$v(x,y,t)\geq\min\left\{\min_{\overline{D}}\varphi_x(x,y),\min_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{21_x}(x,t),\min_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{22_x}(x,t)\right\}\times$$

$$\times\left(\iint_D G(x,y,t,\xi,\eta,0)\,d\xi d\eta+\int_0^t\int_0^h G_\eta(x,y,t,\xi,0,\tau)d\xi d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^t\int_0^h G_\eta(x,y,t,\xi,l,\tau)d\xi d\tau\right)=$$

$$=\min\left\{\min_{\overline{D}}\varphi_x(x,y),\min_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{21_x}(x,t),\min_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{22_x}(x,t)\right\}:=M_0>0,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T,$$

оскільки сума інтегралів у дужках є розв'язком $\tilde{v}(x,y,t)\equiv 1$ рівняння

$$\tilde{v}_t=a(y,t)\tilde{v}_{xx}+\tilde{v}_{yy},$$

який задовольняє умови

$$\tilde{v}(x,y,0)=1,\quad (x,y)\in\overline{D},$$

$$\tilde{v}_x|_{x=0}=\tilde{v}_x|_{x=h}=0,\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],\quad \tilde{v}|_{y=0}=\tilde{v}|_{y=l}=1,\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T].$$

Звідси випливає оцінка

$$a(y,t)\leq A_1<\infty,\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],\quad \text{де}\quad A_1:=\frac{\max\limits_{[0,l]\times[0,T]}\mu_3(y,t)}{M_0}.$$

Для оцінювання $v(x,y,t)$ зверху зведемо задачу (6)–(10) до інтегрального рівняння за допомогою функції

$$H(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(t-\tau)(\theta(y,t)-\theta(y,\tau))}}\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(y,t)-\theta(y,\tau))}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(y,t)-\theta(y,\tau))}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(t-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(t-\tau)}\right)\right),$$

де $\theta(y,t)=\int_0^t a(y,\tau)d\tau$. Зазначимо, що функція $H(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ задовольняє на межі області D однорідні крайові умови (8)–(10) і є розв'язком рівняння

$$-H_\tau=a(y,\tau)H_{\xi\xi}+H_{\eta\eta}.$$

Використовуючи $H(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ аналогічно функції Гріна задачі (6)–(10), отримуємо рівняння щодо $v(x,y,t)$:

$$v(x,y,t)=v_0(x,y,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D H_{\xi\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(a(\eta,\tau)-a(y,\tau))v(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T,\tag{14}$$

де

$$v_0(x,y,t)=\iint\limits_D H(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l H(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))\,d\eta\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l H(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))\,d\eta\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h H_\eta(x,y,t,\xi,0,\tau)\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h H_\eta(x,y,t,\xi,l,\tau)\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D H(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T.\tag{15}$$

Позначимо

$$V(t):=\max_{(x,y)\in\overline{D}}v(x,y,t),\quad a_{\min}(t):=\min_{[0,l]\times[0,t]}a(y,\tau).$$

Враховуючи вигляд функції $H(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ та нерівність $|a(\eta,\tau)-a(y,\tau)|\le A_2|\eta-y|^\gamma$, з (14), (15) знаходимо

$$V(t)\le C_1+\frac{C_2}{\sqrt{a_{\min}(t)}}+\frac{C_3A_2}{a_{\min}(t)}\int\limits_0^t\frac{V(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}},\quad t\in[0,T].\tag{16}$$

Тут і далі через $C_k,\ k=1,2,\ldots,$ позначатимемо сталі, що визначаються відомими величинами. Отримана нерівність має вигляд

$$u(t) \le \varphi(t) + \psi(t) \int\limits_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

де, згідно з (16), $1/2 < \alpha < 1$, а функції $\varphi(t),\ \psi(t)$ є неспадними.

Із (17) знаходимо

$$\int\limits_0^t \frac{u(\sigma)d\sigma}{(t-\sigma)^\alpha} \le \int\limits_0^t \frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{(t-\sigma)^\alpha} + \int\limits_0^t \frac{\psi(\sigma)d\sigma}{(t-\sigma)^\alpha} \int\limits_0^\sigma \frac{u(\tau)d\tau}{(\sigma-\tau)^\alpha} \le$$

$$\le \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\varphi(t) + \psi(t) \int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^t \frac{d\sigma}{(t-\sigma)^\alpha(\sigma-\tau)^\alpha} =$$

$$= \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\varphi(t) + \psi(t)\frac{(\Gamma(1-\alpha))^2}{\Gamma(2(1-\alpha))} \int\limits_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{2\alpha-1}}. \tag{18}$$

Підставляючи (18) у (17), отримуємо

$$u(t) \le \varphi(t)\left(1 + C_4 t^{1-\alpha}\psi(t)\right) + C_5\psi^2(t) \int\limits_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{2\alpha-1}}.$$

Повторюючи вказану процедуру, знаходимо

$$u(t) \le \varphi(t)\left(1 + C_6 t^{1-\alpha}\psi(t)\right)^3 + C_7\psi^4(t) \int\limits_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{4\alpha-3}}.$$

Звідси випливає, що через скінченну кількість кроків k показник степеня $t-\tau$ під знаком інтеграла буде невід'ємним, і ми прийдемо до нерівності

$$u(t) \le \varphi(t)\left(1 + C_8 t^{1-\alpha}\psi(t)\right)^{2^k-1} + C_9\psi^{2^k}(t) \int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Це є нерівність вигляду

$$u(t) \le \varphi_1(t) + \psi_1(t) \int\limits_0^t u(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Її розв'язок визначається таким чином [3]:

$$u(t) \le \varphi_1(t) + \psi_1(t) \int\limits_0^t \varphi_1(\tau) \exp\left(\int\limits_\tau^t \psi_1(\sigma)\,d\sigma\right) d\tau.$$

Оскільки функції $\varphi_1(t),\ \psi_1(t)$ є неспадними, то звідси маємо

$$u(t) \le \varphi_1(t) + t\varphi_1(t)\psi_1(t)\exp(t\psi_1(t)).$$

Отже, розв'язок нерівності (19) має вигляд

$$u(t) \le \varphi(t)\left(1 + C_8 t^{1-\alpha}\psi(t)\right)^{2^k-1} + C_9 t\varphi(t)\left(1 + C_8 t^{1-\alpha}\psi(t)\right)^{2^{k+1}-1} \exp\left(C_9 \psi^{2^k}(t)\right), \quad t \in [0,T].$$

Звідси знаходимо розв'язок нерівності (16):

$$V(t) \le \left(C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\right)\left(1 + \frac{C_{10}t^{\gamma/2}}{a_{min}(t)}\right)^{2^k-1} +$$

$$+C_{11}t\left(C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\right)\left(1 + \frac{C_{10}t^{\gamma/2}}{a_{\min}(t)}\right)^{2^{k+1}-1} \exp\left(\frac{C_{12}}{a_{\min}^{2^k}(t)}\right), \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Надамо нерівності (27) вигляду

$$V(t) \le C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + t^{\gamma/2}r(t),$$

де $r(t)$ — неперервна функція на $[0,T]$. Тоді з (12), (13) отримуємо

$$a_{\min}(t) \ge \frac{\min\limits_{[0,l]\times[0,T]} \mu_3(y,t)}{C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + t^{\gamma/2}r(t)}, \quad t \in [0,T],$$

або

$$C_1 a_{\min}(t) + C_2\sqrt{a_{\min}(t)} + t^{\gamma/2}r(t)a_{\min}(t) \ge C_{13}, \tag{21}$$

де $C_{13} := \min_{[0,l]\times[0,T]} \mu_3(y,t)$. Оскільки $t^{\gamma/2}r(t)a_{\min}(t) \to 0$ при $t \to 0$, то існує таке число $T_0 \in (0,T]$, що виконується нерівність

$$t^{\gamma/2}r(t)a_{\min}(t) \le \frac{1}{2}C_{13}, \quad t \in (0,T_0].$$

Тоді з (21) одержуємо оцінку

$$a(y,t) \ge A_0 > 0, \quad t \in [0,T_0], \tag{22}$$

в якій A_0 виражається через сталі C_1, C_2, C_{13}. Застосовуючи (22) до (20), знаходимо оцінку $V(t)$ або

$$v(x,y,t) \le M_1, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{T_0} := \overline{D} \times [0,T_0].$$

З теореми 10.1 [6, с. 238] випливає, що при виконанні припущень **($\mathbf{A}_1$)** функція $v(x,y,t)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma \in (0,1)$ і справджується нерівність

$$|v(x,y_1,t) - v(x,y_2,t)| \le M_2|y_1 - y_2|^\gamma, \quad (x,y_k,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \quad k = 1,2,$$

в якій стала M_2 визначається заданими величинами, зокрема сталими A_0, A_1, M_1. Це дає змогу з рівняння (12) отримати оцінку його розв'язків

$$\|a(y,t)\|_{C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])} \le A_3.$$

Визначимо множину $\mathcal{N} := \{a \in C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])\colon \|a\|_{C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])} \le A_3\}$. Беручи до уваги походження сталої A_3, очевидно, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Щоб встановити, що оператор P є цілком неперервним у просторі неперервних функцій, за теоремою Асколі – Арцела достатньо показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $|Pa(y_1,t_1) - Pa(y_2,t_2)| < \varepsilon$ при $|y_1 - y_2| < \delta$, $|t_1 - t_2| < \delta$. Для цього скористаємося зображенням $v(0,y,t)$ за допомогою (14), (15) і для прикладу розглянемо для будь-якої функції $a(y,t) \in \mathcal{N}$ різницю

$$\Delta := \left| \int_0^t \int_0^l H(0,y_1,t,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau - \int_0^t \int_0^l H(0,y_2,t,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau \right|$$

з деякою неперервною функцією $\mu(y,t)$. Виділимо з $H(0,y,t,0,\eta,\tau)$ доданок, що відповідає $n = m = 0:$

$$\Delta_1 := \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^l (\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau))^{-1/2} \exp\left(-\frac{(y_1-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) \mu(\eta,\tau)\,d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^l (\theta(y_2,t) - \theta(y_2,\tau))^{-1/2} \exp\left(-\frac{(y_2-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) \mu(\eta,\tau)\,d\eta \right|.$$

Звідси отримуємо

$$\Delta_1 \le C_{14} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^l \left| \frac{1}{\sqrt{\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(y_2,t) - \theta(y_2,\tau)}} \right| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(y_1-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) d\eta + C_{14} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau)}} \times$$

$$\times \left| \exp\left(-\frac{(y_1-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(y_2-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) \right| d\eta := \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

Оцінимо різницю

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(y_2,t) - \theta(y_2,\tau)}} \right| =$$

$$= \frac{|\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau) - \theta(y_2,t) + \theta(y_2,\tau)|}{\sqrt{(\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau))(\theta(y_2,t) - \theta(y_2,\tau))}\left(\sqrt{\theta(y_1,t) - \theta(y_1,\tau)} + \sqrt{\theta(y_2,t) - \theta(y_2,\tau)}\right)} \le$$

$$\le \frac{\int_\tau^t |a(y_1,\sigma) - a(y_2,\sigma)|d\sigma}{2A_0^{3/2}(t-\tau)^{3/2}} \le \frac{C_{15}|y_1-y_2|^\gamma}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Тоді

$$\Delta_{1,1} \le C_{16}|y_1-y_2|^\gamma \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_0^l \exp\left(-\frac{(y_1-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) d\eta \le C_{17}|y_1-y_2|^\gamma.$$

За теоремою про середнє знаходимо

$$\left|\exp\left(-\frac{(y_1-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(y_2-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right)\right| = \frac{|(\eta-y_1)^2-(\eta-y_2)^2|}{4(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(\eta-\tilde{y})^2}{4(t-\tau)}\right) \le$$
$$\le \frac{(|\eta-y_1|+|\eta-y_2|)|y_1-y_2|}{4(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(\eta-\tilde{y})^2}{4(t-\tau)}\right),$$

де точка $\tilde{y}$ належить проміжку, який сполучає точки y_1 та y_2.

Використовуючи нерівність [7, с. 30]

$$\exp\left(-\frac{(\eta-\tilde{y})^2}{4(t-\tau)}\right) \le C_{18} \exp\left(-\frac{C_{19}(\eta-y_k)^2}{t-\tau}\right), \quad k=1,2,$$

та оцінку

$$|y_1-y_2|^{1-\gamma} \le C_{20}(|\eta-y_1|^{1-\gamma}+|\eta-y_2|^{1-\gamma}),$$

отримуємо

$$\Delta_{1,2} \le C_{21}|y_1-y_2|^\gamma \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int\limits_0^l \exp\left(-\frac{(\eta-\tilde{y})^2}{4(t-\tau)}\right) \times$$
$$\times \left(|\eta-y_1|^{1-\gamma}+|\eta-y_2|^{1-\gamma}\right)\left(|\eta-y_1|+|\eta-y_2|\right) d\eta \le$$
$$\le C_{22}|y_1-y_2|^\gamma \left(\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int\limits_0^l \exp\left(-\frac{(\eta-y_1)^2}{4(t-\tau)}\right)|\eta-y_1|^{2-\gamma} d\eta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int\limits_0^l \exp\left(-\frac{(\eta-y_2)^2}{4(t-\tau)}\right)|\eta-y_2|^{2-\gamma} d\eta\right) \le C_{23}|y_1-y_2|^\gamma.$$

Отже,

$$\Delta \le C_{24}|y_1-y_2|^\gamma, \quad t \in [0,T_0].$$

Різниця

$$\Delta_2 := \left|\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^l H(0,y,t_1,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau - \int\limits_0^{t_2}\int\limits_0^l H(0,y,t_2,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau\right|$$

оцінюється, як в одновимірному випадку [3]. Отже, оператор P є цілком неперервним у просторі неперервних функцій. Тепер покажемо, що будь-яка фундаментальна в $C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])$ послідовність функцій $\{a_n(y,t)\}$ збігається до деякої функції $a(y,t)$ з цього простору. З вищенаведеного випливає, що послідовність $\{a_n(y,t)\}$ збігається рівномірно до $a(y,t)$ і справджуються оцінки

$$|a_n(y_1,t)-|a_n(y_2,t)|\leq A_4|y_1-y_2|^{\gamma}\ \ \forall y_1,y_2\in[0,l]\ \ \forall a_n,\ \ n\in\mathbb{N}$$

зі сталою A_4, не залежною від n та $y_1, y_2 \in [0,l]$. Переходячи в останній нерівності до границі, при $n\to\infty$, отримуємо

$$|a(y_1,t)-|a(y_2,t)|\leq A_4|y_1-y_2|^{\gamma}\ \ \forall y_1,y_2\in[0,l].$$

Отже, оператор P є цілком неперервним у просторі $C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])$. Після цього, застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора до рівняння (12), переконуємося в існуванні його розв'язку $a\in C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])$, який, згідно з (22), задовольняє оцінку $a(y,t)\geq A_0, (y,t)\in[0,l]\times[0,T_0]$. Отже, правильною є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення* **(A_1)–(A_3)**. *Тоді можна вказати таке значення* $T_0\in(0,T]$, *що існує розв'язок* $(a(y,t),u(x,y,t))$ *задачі* (1)–(5) *із класу* $C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$ *такий, що* $a(y,t)>0,\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T_0]$.

4. Єдиність розв'язку.

Теорема 2. *Припустимо, що виконується умова* $\mu_3(y,t)\neq 0,\ y\in[0,l],\ t\in[0,T]$. *Тоді розв'язок задачі (1)–(5) єдиний у класі* $C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T])\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $a(y,t)>0,\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T]$.

Доведення. Припустимо, що задача (1)–(5) має два різних розв'язки $(a_i(y,t),\ u_i(x,y,t))$, $i\in\{1,2\}$, із зазначеного класу. Позначимо $a(y,t):=a_1(y,t)-a_2(y,t)$, $u(x,y,t):=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t)$. Для пари функцій $(a(y,t),\ u(x,y,t))$ отримуємо задачу

$$u_t=a_1(y,t)u_{xx}+u_{yy}+a(y,t)u_{2xx}(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{23}$$

$$u|_{t=0}=0,\quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{24}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=h}=0,\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{25}$$

$$u|_{y=0}=u|_{y=l}=0,\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{26}$$

$$a(y,t)u_{1x}(0,y,t)=-a_2(y,t)u_x(0,y,t),\quad y\in[0,l],\quad t\in[0,T]. \tag{27}$$

За допомогою функції Гріна $G=G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ задачі (23)–(26) знайдемо її розв'язок

$$u(x,y,t)=\int\limits_0^t\iint\limits_D G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a(\eta,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T,$$

і підставимо його у (27):

$$a(y,t)u_{1x}(0,y,t)=-a_2(y,t)\int\limits_0^t\iint\limits_D G_x(0,y,t,\xi,\eta,\tau)a(\eta,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\ \ (x,y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Оскільки

$$u_{1x}(0,y,t)=\frac{\mu_3(y,t)}{a_1(y,t)}\neq 0,$$

то отримуємо однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду з інтегровним ядром, яке має лише тривіальний розв'язок $a(y,t)\equiv 0,\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T]$. Тоді рівняння (23) стає однорідним, а розв'язок задачі (23)–(24) — тривіальним: $u(x,y,t)\equiv 0,\ (x,y,t)\in\overline{Q}_T$.

Теорему 2 доведено.

Насамкінець відмітимо одне з можливих застосувань задачі (1) – (5). Нехай $\Omega_T := \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < h, 0 < x_2 < \psi(x_1, t), 0 < t < T\}$, де функція $\psi(x_1, t)$ є невідомою, і для рівняння теплопровідності

$$u_t = \Delta u + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T,$$

розглянемо задачу з вільною межею. Після заміни

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{x_2}{\psi(x_1, t)}, \quad t = t,$$

отримаємо у відомій фіксованій області $\tilde{Q}_T := \{(y_1, y_2, t) : 0 < y_1 < h, 0 < y_2 < 1, 0 < t < T\}$ обернену задачу для рівняння, аналогічного рівнянню (1):

$$v_t = v_{y_1 y_1} + \frac{1}{\psi^2(y_1, t)} v_{y_2 y_2} + b(y_1, y_2, t) v_{y_2} + f_1(y_1, y_2, t).$$

Тут $\dfrac{1}{\psi^2(y_1, t)}$ — невідомий коефіцієнт, а $b(y_1, y_2, t)$ — функція, яка визначається через $\psi(y_1, t)$ та її похідні.

Література

1. *Саватеев Е. Г.* О задаче идентификации коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1995. – **36**, № 1. – С. 177 – 185.
2. *Ivantchov M. I.* Determination simultanee de deux coefficients aux variables diverses dans une equation parabolique // Мат. студ. – 1998. – **10**, № 2. – С. 173 – 187.
3. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud. Monogr. Ser. – 2003. – 240 p.
4. *Безнощенко Н. Я.* О существовании решения задач определения коэффициентов при старших производных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 6. – С. 996 – 1000.
5. *Безнощенко Н. Я.* Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 11. – С. 1908 – 1915.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

Одержано 27.06.16,
після доопрацювання — 28.12.16