УДК 517.98

Ю. Г. Ковальов (Східноукр. нац. ун-т ім. В. Даля, Сєвєродонецьк)

ТОЧКОВІ ВЗАЄМОДІЇ НА ПРЯМІЙ І БАЗИСИ РІСА З δ-ФУНКЦІЙ

We present the description of a relationship between the Sobolev spaces $W_2^1(\mathbb{R})$ and $W_2^2(\mathbb{R})$ and the Hilbert space ℓ_2. Let Y be a finite or countable set of points on $\mathbb{R}$ and let $d := \inf\{|y' - y''|,\ y', y'' \in Y,\ y' \neq y''\}$. By using this relationship, we prove that if $d = 0$, then the systems of delta-functions $\{\delta(x - y_j),\ y_j \in Y,\}$ and their derivatives $\{\delta'(x - y_j),\ y_j \in Y,\}$ do not form Riesz bases in the closures of their linear spans in the Sobolev spaces $W_2^{-1}(\mathbb{R})$ and $W_2^{-2}(\mathbb{R})$ but, conversely, form these bases in the case where $d > 0$. We also present the description of the Friedrichs and Krein extensions and prove their transversality. Moreover, the construction of a basis boundary triple and the description of all nonnegative selfadjoint extensions of the operator A' are proposed.

Приведено описание некоторой связи пространств Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$, $W_2^2(\mathbb{R})$ и гильбертова пространтсва ℓ_2. Пусть Y — конечная или исчислимая монотонная последовательность точек на $\mathbb{R}$ и $d := \inf\{|y'-y''|, y', y'' \in Y, y' \neq y''\}$. С помощью этой связи доказано, что при условии $d = 0$ системы дельта-функций $\{\delta(x - y_j),\ y_j \in Y,\}$ и их производных $\{\delta'(x-y_j),\ y_j \in Y,\}$ не образуют базисы Риса в замыкании своих линейных оболочек в гильбертовых пространствах $W_2^{-1}(\mathbb{R}), W_2^{-2}(\mathbb{R})$, а при условии $d > 0$ — образуют. Дано описание расширений Фридрихся и Крейна, продемонстрирована их трансверсальность, приведены конструкция базисной граничной тройки и описание всех неотрицательных самосопряженных расширений оператора A'.

1. Вступ. Нехай Y – скінченна або зчисленна монотонна послідовність точок на $\mathbb{R}$, що задовольняє умову:

$$d := \inf\{|y' - y''|,\ y', y'' \in Y,\ y' \neq y''\} > 0. \tag{1}$$

Диференціальний оператор A' у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{dom}\,(A') = \left\{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f'(y) = 0,\ y \in Y\right\},\ A' := -\frac{d^2}{dx^2}. \tag{2}$$

є щільно визначеним невід’ємним та симетричним з рівними індексами дефекта та є основою для дослідження гамільтоніанів на дійсній вісі, що відповідають точковим δ' взаємодіям [1] (див. також [4, 8, 16, 17, 23, 24]).

Зауважимо, що спряжений оператор має вигляд [**?**]:

$$\mathrm{dom}\,(A'^*) = \{g \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus Y) : g'(y+) = g'(y-),\ y \in Y\},\ A'^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \tag{3}$$

та A' є звуженням невід’ємного самоспряженого оператора A:

$$\mathrm{dom}\,(A) = W_2^2(\mathbb{R}),\ A = -\frac{d^2}{dx^2}. \tag{4}$$

Символом $\mathbb{J}$ позначимо множину індексів послідовності точок Y.

Базис $\{e_j\}$ простору $\mathfrak{H}$, який можна отримати з ортонормованого базису за допомогою перетворення обмеженим оператором, для якого існує обернений, називається базисом еквівалентним ортонормованому або базисом Риса [12].

Теорема 1. *[12] Зчисленна множина векторів $\{e_j\}$ утворює базис Риса у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{\mathrm{span}}\{e_j\} = \mathfrak{H}$ та існують дві константи $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ та кожного набору комплексних чисел $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ виконується рівність*

$$c_2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq c_1 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2.$$

Якщо $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ утворює базис Риса в $\mathfrak{H}$, то кожний $f \in \mathfrak{H}$ має розкладання $f = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ таке, що $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, та навпаки, якщо $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ збігається у $\mathfrak{H}$.

У цій роботі ми встановлюємо певний зв'язок між простором Соболєва $W_2^1(\mathbb{R})$ та гільбертовим простором ℓ_2. Також певні зв'язки між просторами $W_2^1(\mathbb{R})$, $W_2^2(\mathbb{R})$, $W_2^2(\mathbb{R} \setminus Y)$ та ℓ_2 було встановлено в [14] та за їх допомогою доведено базисність Риса систем дельта-функцій Дірака $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ та їх похідних $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$. Випадки $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}^3$ було розглянуто в [15], також у роботі М. Маламуда і К. Шмюдгена [22] доведено, що умова $d > 0$ є необхідною та достатньою, щоби система функцій $\left\{\frac{\exp(-|x-y_j|)}{|x-y_j|},\ j \in \mathbb{J}\right\}$ утворювала базис Риса у дефектному підпросторі мінімального оператора Шредінгера в $\mathbb{R}^3$. Влистивість базисності Риса дельта-функцій Дірака використовується для опису розширення Фрідріхса оператора A', для опису властивостей диз'юнктності та трансверсальності екстремальних розширень Крейна та Фрідріхса, для побудови граничних трійок, обчисленні функції Вейля та для параметризації усіх невід'ємних самоспряжених розширень (див., наприклад, [4, 14, 22]).

Використовуючи звя'зок просторів Соболєва $W_2^1(\mathbb{R})$ і $W_2^2(\mathbb{R})$ з гільбертовим простором ℓ_2, ми доводимо, що за умови $d = 0$ $(d > 0)$ – системи функцій $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ не утворюють (утворюють) базиси Риса у своїх лінійних оболонках; за умови $d > 0$ описано розширення Фрідріхса та Крейна та доведено їх трансверсальність, побудовано базисні граничні трійки та дано опис усіх невід'ємних самоспряжених розширень опертора A'.

2. Невід'ємні самоспряжені розширення.

Нехай H сепарабільний гільбертів простір та нехай $\mathcal{A}$ щільно визначений невід'ємний симетричний оператор $((\mathcal{A}f, f) \geq 0,\ \forall f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}))$. Оператор $\mathcal{A}$ має хоча б одне невід'ємне самоспряжене розширення $\mathcal{A}_F$ – фрідріхсове розширення (розширення за Фрідріхсом) [**?**, 13]. Позначимо через $\mathcal{A}[\cdot,\cdot]$ замикання півторалінійної форми $\mathcal{A}[f,g] = (\mathcal{A}f, g)$, де $f, g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$, та нехай $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ – область визначення цього замикання. Згідно першої теореми о зображенні [13] існує невід'ємний самоспряжений оператор $\mathcal{A}_F$ асоційований з формою $\mathcal{A}[\cdot,\cdot]$:

$$(\mathcal{A}_F h, \psi) = \mathcal{A}[h, \psi],\ \psi \in \mathcal{D}[\mathcal{A}],\ h \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F).$$

Очевидно, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}^*$, де $\mathcal{A}^*$ спряжений оператор до $\mathcal{A}$. Зауважимо, що $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F) = \mathcal{D}[\mathcal{A}] \cap \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*)$. За другою теоремою о зображенні [13]:

$$\mathcal{D}[\mathcal{A}] = \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F^{1/2}) \quad \text{та} \quad \mathcal{A}[\phi, \psi] = (\mathcal{A}_F^{1/2}\phi, \mathcal{A}_F^{1/2}\psi),\ \phi,\, \psi \in \mathcal{D}[\mathcal{A}].$$

М.Г. Крейн у своїй роботі [20] відкрив ще одне розширення з екстремальною властивістю мінімальності, це розширення називають – *розширення Крейна* оператора $\mathcal{A}$ та позначають $\mathcal{A}_K$. Оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ є невід'ємним самоспряженим розширенням оператора $\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність $\mathcal{A}_K \leq \widetilde{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A}_F$ у сенсі асоційованих замкнених квадратичних форм [20]. У цьому сенсі розширення Фрідріхса є максимальним, а розширення Крейна – мінімальним.

Два самоспряжених розширення $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ і $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ симетричного оператора $\mathcal{A}$ називають диз'юнктними, якщо $\operatorname{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \cap \operatorname{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \operatorname{dom}(\mathcal{A})$; та трансверсальними, якщо $\operatorname{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) + \operatorname{dom}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \operatorname{dom}(\mathcal{A}^*)$. Зауважимо, що з трансверсальності випливає диз'юнктність.

Нехай S замкнений щільно визначений симетричний оператор у гільбертовому просторі H з рівними індексами дефекту: $n_{\pm}(S) = \dim(\mathfrak{N}_{\pm i}) \leq \infty$. Тоді, для оператора S^* існує та не єдиний простір граничних значень.

Означення 1 [9, 11, 12, 18]. *Трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, де $\mathcal{H}$ гільбертів простір, $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ лінійні відображення $\operatorname{dom}(S^*) \to \mathcal{H}$, називається граничною трійкою або простором граничних значень для оператора S^*, якщо для усіх $f, g \in \operatorname{dom}(S^*)$ виконується тотожність Гріна:*

$$(S^*f, g)_H - (f, S^*g)_H = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} \tag{5}$$

і відображення $\mathbf{\Gamma} : f \mapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ є сюр'єкцією $\operatorname{dom}(\mathcal{A}^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

З кожною граничною трійкою $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для оператора S^* пов'язані два самоспряжених розширення S_0 та S_1 оператора S: $S_0 = S^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$ і $S_1 = S^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1)$. Зауважимо, що $\dim(\mathcal{H}) = n_{\pm}(S)$.

Розширення $\widetilde{S}$ оператора S називається *квазі-самоспряженим* або *власним*, якщо $S \subset \widetilde{S} \subset S^*$. Гранична трійка $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ називається *базисною*, якщо $S_F = S_0$ та $S_K = S_1$ [2, 3].

Теорема 2 [3]. *Нехай S щільно визначений невід'ємний симетричний оператор з трансверсальними розширеннями за Фрідріхсом та Крейном та $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ базисна гранична трійка для S^*. Тоді відображення*

$$\widetilde{S} := S_\Theta \to \Theta := \mathbf{\Gamma}(\operatorname{dom}(\widetilde{S})) = \{(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f),\ f \in \operatorname{dom}(\widetilde{S})\}$$

встановлює бієктивну відповідність між усіма невід'ємними самоспряженими лінійними відношеннями Θ у $\mathcal{H}$ та усіма невід'ємними самоспряженими розширеннями $S_\Theta \subseteq S^*$ оператора S.

3. Оснащені гільбертові простори.

Нехай A – необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H та нехай

$$H_{+2} \subset H_{+1} \subset H \subset H_{-1} \subset H_{-2}$$

– ланцюжок оснащених гільбертових просторів [7, 19], побудованих за допомогою оператора A:

$$H_{+2} = \operatorname{dom}(A),\ H_{+1} = \operatorname{dom}(|A|^{1/2})$$

з нормами

$$||f||_k = \left(\left\| |A|^{k/2} f \right\|^2 + \|f\|^2 \right)^{1/2},\ k = 1, 2.$$

Гільбертові простори з від'ємними індексами H_{-k} $(k = 1, 2)$ – це поповнення H по нормах $||f||_{-k} = \sup\limits_{\|g\|_k = 1} |(f, g)|$.

Оператор A має неперервне продовження $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-2}),\ k = 0, 1$ $(H_0 := H)$ та $|\mathbf{A}|^{1/2} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-1}),\ k = -1, 0$ це продовження $|A|^{1/2}$. Резольвента $\mathrm{R}_z = (A - zI)^{-1}$, $z \in \rho(A)$ має продовження $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(H_{-k}, H_{-k+2}),\ \ k = 0, 1, 2$ [19].

Нехай Φ – підпростір у H_{-2} такий, що $\Phi \cap H = \{0\}$, тоді оператор $\mathcal{A}$, визначений наступним чином [19]

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in H_{+2} : (f,\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi \Big\},\ \mathcal{A} = A \restriction \mathrm{dom}(\mathcal{A}) \tag{6}$$

є замкненим щільно визначеним симетричним з індексами дефекта, що дорівнюють $\dim(\Phi)$. Для дефектного простору $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^* - zI)$ справедлива формула $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \mathbf{R}_z\Phi$. Більш того, якщо A невід'ємний самоспряжений оператор та $\mathcal{A}$ визначено формулами (6), то мають місце такі твердження.

Пропозиція 1 [19]. *Оператор A є розширенням за Фрідріхсом оператора $\mathcal{A}$ тоді и тільки тоді, коли $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$.*

Теорема 3 [5, 6, 20, 21]. *Припустимо, що A є фрідріхсовим розширенням оператора $\mathcal{A}$. Розширення Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$ та оператор A трансверсальні тоді й лише тоді, коли виконується включення $\mathbf{A}^{1/2}H_{-1} \supset \Phi$.*

Простори Соболєва утворюють ланцюжок гільбертових просторів:

$$W_2^2(\mathbb{R}) \subset W_2^1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$$

Трійки $W_2^2(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$ і $W_2^1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R})$ – оснащені гільбертові простори, тобто простір $W_2^{-2}(\mathbb{R})$ (відповідно, $W_2^{-1}(\mathbb{R})$) є множиною усіх неперервних антилінійних функціоналів над $W_2^2(\mathbb{R})$ (відповідно, над $W_2^1(\mathbb{R})$) [7].

Відомо [**?**], що $(\delta_y)' = \delta'(x-y) \in W_2^{-2}(\mathbb{R}) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R})$, $(\delta_y) = \delta(x-y) \in W_2^{-1}(\mathbb{R}) \setminus L_2(\mathbb{R})$, де $\delta(x-y)$ та $\delta'(x-y)$ – дельта-функція Дірака та її похінда.

Визначимо наступні простори:

$$\begin{aligned} \Phi &= \overline{\mathrm{span}}\,\{\delta'(x-y),\ y \in Y\} \quad (\text{замикання у} \quad W_2^{-2}(\mathbb{R})), \\ \Psi &= \overline{\mathrm{span}}\,\{\delta(x-y),\ y \in Y\} \quad (\text{замикання у} \quad W_2^{-1}(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Зауважимо [**?**], що $\Phi \cap L_2(\mathbb{R}) = \{0\},\ \Psi \cap L_2(\mathbb{R}) = \{0\}$. Тоді, $\mathrm{dom}\,(A') = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) :\ (f,\varphi) = 0,\ \varphi \in \Phi\}$. Позначимо

$$\begin{aligned} H_{+2} &= \mathrm{dom}\,(A) = W_2^2(\mathbb{R}), \qquad & H_{+1} &= \mathrm{dom}\,(A^{1/2}) = W_2^1(\mathbb{R}), \\ H_{-1} &= W_2^{-1}(\mathbb{R}), & H_{-2} &= W_2^{-2}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що за *теоремою вкладання* [7] при $s > n/2$ простір Соболєва $W_2^s(\Omega)$ неперервно вкладено в простір неперервних функцій $C(\overline{\Omega})$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

***Наслідок* 1.** $\{g \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y) :\ g(y+) = g(y-),\ \ y \in Y\} = W_2^1(\mathbb{R})$.

4. Зв'язок просторів Соболєва та гільбертова простору ℓ_2.

Пропозиція 2. *Для будь-якої послідовності $\{c_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2$ існує функція $f(x)$ з простору Соболєва $W_2^1(\mathbb{R})$ така, що*

$$\{f'(y_j)\}_{j\in\mathbb{J}} \notin \ell_2(\mathbb{J}),\ \{f(y_j)\}_{j\in\mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J}),\ y_j \in Y,$$

та, більш того, $\{c_j f'(y_j)\}_{j\in\mathbb{J}} \notin \ell_p(\mathbb{J}),\ 1 \le p < \infty$.

Доведення. Нехай $\{c_k,\ k \in \mathbb{J}\}$ – послідовність з ℓ_2. Якщо існують $c_k = 0$, то видалимо нульові елементи та далі розглядаємо підпослідовність без нулів. Не втрачаючи загальності, припустимо, що $c_k \neq 0,\ \forall k \in \mathbb{J}$. Розглянемо функцію з носієм $\mathrm{supp}\,(g_k) = [-a_k; 3a_k]$:

$$g_k'(x) = \begin{cases} \frac{a_k + x}{a_k c_k}, & -a_k \le x < 0, \\ \frac{a_k - x}{a_k c_k}, & 0 \le x < 2a_k, \\ \frac{x - 3a_k}{a_k c_k}, & 2a_k \le x \le 3a_k, \end{cases}$$

де $a_k = b|c_k|^4$, $b = \frac{d}{4c}$, $c = \max\{|c_k|,\ k \in \mathbb{J}\}$. Тоді

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{(a_k+x)^2}{2a_kc_k}, & -a_k \le x < 0, \\ \frac{2a_k^2-(a_k-x)^2}{2a_kc_k}, & 0 \le x < a_k, \\ \frac{2a_k^2-(a_k-x)^2}{2a_kc_k}, & a_k \le x < 2a_k, \\ \frac{(x-3a_k)^2}{2a_kc_k}, & 2a_k \le x \le 3a_k. \end{cases}$$

Очевидно, що $g_k(x) \in W_2^1(\mathbb{R}), k \in \mathbb{J}$. Нехай $f(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} g_j(x-y_j)$, де $y_j \in Y$ та Y задовольняють умову (1), тоді $f(y_j) = \frac{b|c_j|^4}{c_j}$ та, отже, $\{f(y_j)\}_{j\in\mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J})$. Зауважимо,що $f'(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} g_j'(x-y_j)$ та для будь-якого $j \in \mathbb{J}$ виконується $f'(y_j) = 1/c_j$. Отже, $\{f'(y_j)\}_{j\in\mathbb{J}} \notin \ell_2(\mathbb{J})$ та $\{c_jf'(y_j)\}_{j\in\mathbb{J}} = \{1\}_{j\in\mathbb{J}} \notin \ell_p(\mathbb{J}),\ 1 \le p < \infty$.

Очевидно, що $|f'(x)|^2 = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} |g_j'(x-y_j)|^2$, $|f(x)|^2 = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} |g_j(x-y_j)|^2$ та

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |g_j'(x)|^2dx = \frac{4}{3}b|c_j|^2,\ \int\limits_{\mathbb{R}} |g_j(x)|^2dx = \frac{23}{15}b^3|c_j|^{10}.$$

Отримуємо,

$$||f||_1^2 = \sum_{j\in\mathbb{J}} \int\limits_{y_j-a_j}^{y_j+3a_j} \left(|g_j(x-y_j)|^2 + |g_j'(x-y_j)|^2\right) dx =$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{J}} \int\limits_{-a_j}^{3a_j} \left(|g_j(x)|^2 + |g_j'(x)|^2\right) dx = \sum_{j\in\mathbb{J}} \left(\frac{4}{3}b|c_j|^2 + \frac{23}{15}b^3|c_j|^{10}\right) < \infty.$$

Отже, $f(x) \in W_2^1(\mathbb{R})$.

Теорема 4. *[14] 1) Якщо $g \in W_2^2(\mathbb{R})$, тоді послідовності $\{g(y_j),\ y_j \in Y\}$ та $\{g'(y_j),\ y_j \in Y\}$ належать $\ell_2(\mathbb{J})$. Більш того, існує константа $c > 0$ така, що для усіх g з $W_2^2(\mathbb{R})$ виконуються нерівності:*

$$\|\{g(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \le c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})},\ \|\{g'(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \le c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})}.$$

2) Якщо $\{a_j,\ j \in \mathbb{J}\}$, $\{b_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$, тоді існує функція $g \in W_2^2(\mathbb{R})$ така, що $g(y_j) = a_j,\ g'(y_j) = b_j,\quad \forall j \in \mathbb{J}$.

Наслідок 2. *[14] 1) Якщо $f \in W_2^1(\mathbb{R})$, то послідовність $\{f(y_j),\quad y_j \in Y\}$ належить $\ell_2(\mathbb{J})$.*

2) Для будь-якого $\vec{a} = \{a_j,\ j \in \mathbb{J}\}$ з $\ell_2(\mathbb{J})$ існує функція $g \in W_2^1(\mathbb{R})$ така, що $g(y_j) = a_j,\ j \in \mathbb{J}$.

5. Базисність Риса δ-функцій Дірака та властивості розширень Фрідріхса і Крейна оператора A'. В силу теореми 4 та наслідку 2 справедлива наступна теорема.

Теорема 5. *[14] Нехай послідовність точок $Y = \{y_j,\ j \in \mathbb{J}\}$ задовольняє умову* (1). *Тоді системи функцій $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ і $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ утворюють базиси Риса підпросторів Φ та Ψ, відповідно.*

Теорема 6. *Якщо $d = 0$, то системи функцій $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ і $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ не утворюють базиси Риса підпросторів Φ і Ψ, відповідно.*

Доведення. Нехай $\mathbb{J}=\mathbb{N}$ та $\psi=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j\delta(x-y_j)\in\Psi\subset H_{-1}$, де $\{a_j>0,\ j\in\mathbb{N}\}\in\ell_2(\mathbb{N})$. Тоді

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j\delta(x-y_j)\right\|_{-1}=\sup_{||g||_1=1}\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j g(y_j)\right|.$$

Оскільки, $d=0$, то існує хоча б одна підпослідовність $\{y_{j_i},\ i\in\mathbb{N}\}\subset Y$, що збігається. Нехай $y_{j_i}\to 0,\ i\to\infty$. Очевидно, що існує функція $g(x)\geq 0$ у $W_2^1(\mathbb{R})$ і $n_0,\ n_1\in\mathbb{N}$ такі, що $g(y_{j_i})>1$ якщо $i>n_1$, $g(y_{j_i})=0$ якщо $i<n_0$, і $g(y_{j_i})\to g(0)$ якщо $y_{j_i}\to 0$. Тоді

$$\sup_{||g||_1=1}\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j g(y_j)\right|>\left|\sum_{j>n_1} a_j\right|$$

та чисельний ряд є розбіжним у випадку $\{a_j,\ j\in\mathbb{N}\}\in\ell_2\setminus\ell_1$. Тоді, відповідно до теореми 1 дельта-функції $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ не утворюють базис Риса у підпросторі Ψ. Для системи $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ доведення аналогічне.

Далі припускаємо, що Y задовольняє умову (1).

Пропозиція 3. *Справедлива рівність* $\Phi\cap H_{-1}=\{0\}$.

Доведення. Нехай $\varphi\in\Phi$, тоді за теоремою 5

$$\varphi=\sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\delta'(x-y_j),\ \text{ де }\ \{c_j,\ j\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J}).$$

Припустимо, що $\varphi\in H_{-1}$, тоді $||\varphi||_{-1}=\sup\limits_{||f||_1=1}|(\varphi,f)|<\infty$. Тобто, виконується умова $\sup\limits_{||f||_1=1}\left|\sum\limits_{j\in\mathbb{J}} c_j f'(y_j)\right|<\infty$. В силу теореми 2 отримуємо протиріччя.

Нехай оператори A' і A визначено формулами (2) і (4), відповідно. Тоді з пропозицій 1 та 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3. *Оператор $A'_F=A$ є фрідріхсовим розширенням оператора A'.*

Теорема 7. *Розширення Фрідріхса A'_F і Крейна A'_K оператора A' є трансверсальними.*

Доведення. Нехай $h\in\mathbf{A}^{1/2}H_{-1}$, тоді існує $f\in H_{-1}$ такий, що $h=\mathbf{A}^{1/2}f$. Нехай $\varphi\in\Phi$, тоді

$$\varphi=\sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\delta'(x-y_j),\ \text{ де }\ y_j\in Y,\ \ \{c_j,\ j\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J}).$$

Вектор $\varphi\in\mathbf{A}^{1/2}H_{-1}$ тоді й лише тоді, коли існує $f\in H_{-1}$ такий, що $\mathbf{A}^{1/2}f=\varphi$.

Нехай $g\in H_2$, тоді

$$(h,g)=(\mathbf{A}^{1/2}f,g)=(f,A^{1/2}g)=(f,ig').$$

В силу теореми 5

$$(\varphi,g)=\sum_{j\in\mathbb{J}} c_j(\delta'_j,g)=-\sum_{j\in\mathbb{J}} c_j(\delta_j,g')=-\sum_{j\in\mathbb{J}} c_j g'_j(y_j).$$

Зауважимо, що за теоремою 5 $\sum\limits_{j\in\mathbb{J}} c_j\delta_j\in H_{-1}$. Отримуємо, що для будь-якого вектора $\varphi\in\Phi$ існує вектор $f\in H_{-1}$ ($h\in\mathbf{A}^{1/2}H_{-1}$) такий, що $f=-i\sum\limits_{j\in\mathbb{J}} c_j\delta_j$ ($h=\varphi$). Отже, $\mathbf{A}^{1/2}H_{-1}\supset\Phi$. Тоді, з наслідку 3 та теореми 3 випливає трансверсальність розширень A'_F і A'_K.

Теорема 8. *Розширення Крейна A'_K оператора A' має вигляд:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(A'_K) = \left\{g \in W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y):\ g' \in W_2^1(\mathbb{R}),\ g'(y) = 0,\ y \in Y\right\}, \\ &A'_K = -\frac{d^2}{dx^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення. Оскільки розширення Фрідріхса A'_F і Крейна A'_K диз'юнктні, трансверсальні та є власними розширеннями оператора A', то $\mathrm{dom}\,(A'_K) = \{g \in \mathrm{dom}\,(A'^*):\ g \notin \mathrm{dom}\,(A) - \mathrm{dom}\,(A')\}$. З рівностей (3) та $\mathrm{dom}\,(A) - \mathrm{dom}\,(A') = \left\{g \in W_2^2(\mathbb{R}):\ g'(y) \neq 0,\ \ y \in Y\right\}$, отримуємо, що

$$\mathrm{dom}\,(A'_K) = \left\{g \in W_2^2(\mathbb{R}\setminus Y):\ \ g'(y+) = g'(y-),\ \ g'(y) = 0,\ \ y \in Y\right\}$$

або

$$\mathrm{dom}\,(A'_K) = \Big\{\, g \in W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y): \\ g' \in W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y),\ g'(y+) = g'(y-),\ \ g'(y) = 0,\ \ y \in Y\,\Big\}$$

З останнього співвідношення та наслідку 1 випливає (7).

6. Базисні граничні трійки для оператора A'^*.

Теорема 9. *Нехай оператори A' і A визначено формулами* (2) *і* (4)*, відповідно, множина точок Y задовольняє умову* (1) *та $z \in \mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, $\mathrm{Im}\sqrt{z} \geq 0$, тоді системи функцій*

$$\begin{aligned} &\left\{\varphi_{k,z} := \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}e^{i\sqrt{z}(x-y_k)} & x < y_k, \\ -\frac{1}{2}e^{i\sqrt{z}(x-y_k)} & x > y_k, \end{array}\right.\ \ k \in \mathbb{J}\right\}, \\ &\left\{\tau_{k,z} := \tfrac{-i(x-y_k)}{4\sqrt{z}}e^{i\sqrt{z}|x-y_k|},\ k \in \mathbb{J}\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

утворюють базиси Риса у замиканні своїх лінійних оболонок та

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}_z(A') = \overline{\mathrm{span}}\,\{\varphi_{k,z},\ k \in \mathbb{J}\}, \\ &(-A - zI)^{-1}\mathfrak{N}_z(A') = \overline{\mathrm{span}}\,\{\tau_{k,z},\ k \in \mathbb{J}\}; \end{aligned} \tag{9}$$

До того ж,

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}(A'^*) = \left\{f = f_0 + \sum_{j\in\mathbb{J}} a_{fj}\varphi_j(x) + \sum_{j\in\mathbb{J}} b_{fj}\tau_j(x), \{a_{fj}\}, \{b_{fj}\}_{j\in\mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J})\right\}, \\ &A'^* f = -f_0'' - \sum_{j\in\mathbb{J}} a_{fj}\varphi_j(x) + \sum_{j\in\mathbb{J}} b_{fj}\left(\varphi_j(x) - \tau_j(x)\right), \end{aligned} \tag{10}$$

де $f_0 \in \mathrm{dom}\,(A')$, $\varphi_j(x) := \varphi_{j,-1}(x)$ і $\tau_j(x) := \tau_{j,-1}(x)$.

Доведення. Нехай $\mathcal{F}:\ L_2(\mathbb{R}, dx) \to\ L_2(\mathbb{R}, dp)$ – перетворення Фур'є: $\widehat{f}(p) = (\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim\limits_{R\to\infty}\int_R^R f(x)e^{-ipx}dx$. Зауважимо, що $(\mathcal{F}\delta_y)(p) = \widehat{\delta}_y(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipy}$, $(\mathcal{F}\delta'_y)(p) = \widehat{\delta}'_y(p) = \frac{ipe^{-ipy}}{\sqrt{2\pi}}$, та перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ є унітарним відображенням. До того ж

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\widehat{A}) = \widehat{H}_{+2} = \left\{\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}, dp):\ \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(p)|^2(p^4+1)dp < \infty\right\}, \\ &\mathrm{dom}\,(\widehat{A}^{1/2}) = \widehat{H}_{+1} = \left\{\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}, dp):\ \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(p)|^2(p^2+1)dp < \infty\right\}, \\ &(\widehat{A}^{1/2}\widehat{f})(p) = p\widehat{f}(p),\ \ (\widehat{A}\widehat{f})(p) = p^2\widehat{f}(p). \end{aligned}$$

Тоді $\widehat{\varphi}_{k,z}(p) = (\widehat{A} - zI)^{-1}\widehat{\delta}'_k(p) = \frac{ipe^{-ipy_k}}{\sqrt{2\pi}(p^2-z)}$ та $\widehat{\tau}_{k,z}(p) = (\widehat{A} - zI)^{-2}\widehat{\delta}'_k(p) = \frac{ipe^{-ipy_k}}{\sqrt{2\pi}(p^2-z)^2}$. Проводячи зворотні перетворення Фур'є, отримаємо (8). З унітарності $\mathcal{F}$ та теореми 5 випливає (9).

Оскільки $\tau_k = (A+I)^{-1}\varphi_k$, то $A\tau_k = \varphi_k - \tau_k$. Тоді [10]

$$\begin{aligned}&\operatorname{dom}(A'^*) = \operatorname{dom}(A') \dotplus \mathfrak{N}_{-1} \dotplus (A+I)^{-1}\mathfrak{N}_{-1},\\ &A'^*(f_0 + f_1 + f_2) = A'f_0 - f_1 + Af_2,\end{aligned}$$

що еквівалентно (10).

Теорема 10. *Нехай* $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{J})$ *та лінійні оператори* $G, \Gamma : \operatorname{dom}(A'^*) \to \mathcal{H}$ *визначено наступним чином* ($f \in \operatorname{dom}(A'^*)$):

$$\begin{aligned}&Gf = \{f(y_k-) - f(y_k+)\}_{k\in\mathbb{J}} = \{a_{fk}\}_{k\in\mathbb{J}},\\ &\Gamma f = \{(f, \delta'_k)\}_{k\in\mathbb{J}} = \left\{\sum_{j\in\mathbb{J}} e^{-|y_k-y_j|}\left(-\tfrac{1}{2}a_{fj} + \tfrac{1}{4}b_{fj}(1 - |y_k - y_j|)\right)\right\}_{k\in\mathbb{J}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Тоді $\Pi = \{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ *є базисною граничною трійкою оператора* A'^*.

Доведення. Нехай $f \in \operatorname{dom}(A'^*)$, тоді $f(y_k-) - f(y_k+) = a_{fk}(\varphi_k(y_k-) - \varphi_k(y_k+)) = a_{fk}$, оскільки $\varphi_k(y_k-) - \varphi_k(y_k+) = 1$ та $\varphi_j(y_k-) - \varphi_j(y_k+) = 0,\ j \neq k$; $\varphi'_j(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-y_j|}$ та $\tau'_j(x) = -\frac{1}{4}e^{-|x-y_j|}(1 - |x - y_j|)$. Звідси випливає (11).

Нехай $f, g \in \operatorname{dom}(A'^*)$, тоді $f = f_0 + \sum_{j\in\mathbb{J}} a_{fj}\varphi_j(x) + \sum_{j\in\mathbb{J}} b_{fj}\tau_j(x)$ і $g = g_0 + \sum_{j\in\mathbb{J}} a_{gj}\varphi_j(x) + \sum_{j\in\mathbb{J}} b_{gj}\tau_j(x)$, де $f_0, g_0 \in \operatorname{dom}(A')$, $\{a_{fj}\}, \{b_{fj}\}, \{a_{gj}\}, \{b_{gj}\}_{j\in\mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J})$. Тоді $(A'^*f, g) - (f, A'^*g) = \sum_{j,k}(\varphi_j, \varphi_k)(b_{fj}\overline{a}_{gk} - a_{fj}\overline{b}_{gk})$, де $(\varphi_j, \varphi_k) = (\tau_j, \delta'_k) = -\tau'_j(y_k) = \frac{1}{4}e^{-|y_k-y_j|}(1 - |y_k - y_j|)$. З іншого боку, $(\Gamma f, Gg)_{\mathcal{H}} - (Gf, \Gamma g)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\sum_{j,k} e^{-|y_k-y_j|}(1 - |y_k - y_j|)(b_{fj}\overline{a}_{gk} - a_{fj}\overline{b}_{gk})$. Отже, тотожність Гріна (5) виконується.

Очевидно, оператор G є сюр'єкцією. З наслідку 2 $\{f'(y_k)\}_{k\in\mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J})$. З включення $\operatorname{dom}(A'^*) = \{f \in W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y) :\ f' \in W_2^1(\mathbb{R})\} \supset W_2^2(\mathbb{R})$ та теореми 4 випливає сюр'єктивність оператора Γ.

З наслідку 1 випливає, що $\ker(G) = \{f \in \operatorname{dom}(A'^*) :\ f(y_k-) = f(y_k+),\ k \in \mathbb{J}\} = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}\setminus Y) : f(y_k-) = f(y_k+),\ f'(y_k-) = f'(y_k+), k \in \mathbb{J}\} = W_2^2(\mathbb{R})$. Оскільки, $\ker(\Gamma) = \{f \in \operatorname{dom}(A'^*) :\ f'(y_k) = 0,\ k \in \mathbb{J}\} = \{f \in W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y) : f' \in W_2^1(\mathbb{R}),\ f'(y_k) = 0,\ k \in \mathbb{J}\} = \operatorname{dom}(A'_K)$, то $\Pi = \{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ – базисна гранична трійка для A'^*.

З теорем 2, 9, 10 та наслідку 3 випливає теорема.

Теорема 11. *Нехай оператор* A' *задано формулами* (2), *тоді відображення*

$$\begin{aligned}\Theta \mapsto A'_\Theta = A'^* \upharpoonright \Big\{ &f \in \operatorname{dom}(A'^*) :\ \Big(\{(f, \delta'_j),\ j \in \mathbb{J}\},\\ &\{f(y_j-) - f(y_j+),\ j \in \mathbb{J}\}\Big) \in \Theta\Big\}\end{aligned}$$

встановлює бієктивну відповідність між усіма невід'ємними самоспряженими розширеннями оператора A' *та усіма невід'ємними самоспряженими лінійними відношеннями* Θ *в* $\ell_2(\mathbb{J})$.

Література

1. *Albeverio S., Gesztesy F., Hфegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics // Texts and Monogr. Phys. – New York: Springer-Verlag, 1988. – 452 p.
2. *Arlinskii Yu., Hassi S., Sebestyen Z., de Snoo H.* On the class of extremal extensions of a nonnegative operators // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2001. – **127**. – P. 41 – 81.
3. *Arlinskii Yu. M.* Positive spaces of boundary values and sectorial extensions of a nonnegative symmetric operator // Ukr. Math. Zh. – 1988. – **40**, № 1. – P. 5 – 10.
4. *Arlinskii Yu. M., Kovalev Yu. G.* Operators in divergence form and their Friedrichs and Kreĭn extensions // Opuscula math. – 2011. – **31**, № 4. – P. 501 – 517.
5. *Arlinskii Yu. M., Tsekanovskii E. R.* The von Neumann problem for nonnegative symmetric operators // Integral Equat. and Oper. Theory. – 2005. – P. 315 – 356.
6. *Arlinskii Yu. M.* Non-self-adjoint contractive extensions of Hermitian contractions and M. G. Kreĭn's theorems Tsekanovskii E. R. // Uspekhi Mat. Nauk. – 1982. – **37**, № 1. – P. 131 – 132.
7. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
8. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН УССР. – 1967. – **137**, № 5. – С. 1011 – 1014.
9. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210 – 216.
10. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – № 1. – С. 187 – 246.
11. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
13. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Springer-Verlag, 1966.
14. *Kovalev Yu. G.* 1D Nonnegative Schrödinger operators with point interactions // Mat. Stud. – 2013. – **39**, № 2. – P. 150 – 163.
15. *Ковалев Ю. Г.* К теории неотрицательных гамильтонианов на плоскости и в пространстве // Укр. мат. бюл. – 2014. – **11**, № 2. – С. 203 – 226.
16. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schr(H_o)dinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Different. Equat. – 2010. – **249**, № 2. – P. 253 – 304.
17. *A. N. Kochubei* One dimensional point interactions // Ukr. Math. J. – 1989. – **41**, № 10. – P. 90 – 95.
18. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41 – 48.
19. *Koshmanenko V. D.* Singular bilinear forms in perturbation theory of selfadjoint operators. – Kiev: Naukova Dumka, 193. – 195 p.
20. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 1. – С. 431 – 495.
21. *Маламуд М. М.* О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 215 – 234.
22. *Malamud M. M., Schmüdgen K.* Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions // J. Funct. Anal. – 2012. – **263**. – P. 3144 – 3194.
23. *Mikhailets V. A.* The one-dimensional Schrödinger operator with point interactions // Dokl. Akad. Nauk. – 1994. – **49**. – P. 345 – 349.
24. *Mikhailets V. A.* Spectral properties of the one-dimensional Schrödinger operator with point intersections // Repts Math. Phys. – 1995. – **36**, № 2/3. – P. 495 – 500.

Одержано 14.01.17