УДК 552.13

В. П. Щедрик (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КІЛЬЦЯ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1,5 ТА РОЗКЛАДНІСТЬ ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ В ДОБУТОК ЇЇ ПІДГРУП

A ring R is called a ring of stable rank 1.5 if, for any triple $a, b, c \in R$, $c \neq 0$, such that $aR + bR + cR = R$, there exists $r \in R$ such that $(a + br)R + cR = R$. It is proved that a commutative Bezout domain has a stable rank 1.5 if and only if every invertible matrix A can be represented in the form $A = HLU$, where L, U are elements of the groups of lower and upper unitriangular matrices (triangular matrices with 1 on the diagonal) and the matrix H belongs to the group

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists\, H_1 \in \mathrm{GL}_n(R) \colon H\Phi = \Phi H_1\},$$

where $\Phi = \mathrm{diag}\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_1|\varphi_2|\ldots|\varphi_n$, $\varphi_n \neq 0$.

Кольцо R называется кольцом стабильного ранга 1,5, если для каждой тройки $a, b, c \in R$, $c \neq 0$, такой, что $aR + bR + cR = R$, существует такое $r \in R$, что $(a + br)R + cR = R$. Доказано, что коммутативная область Безу имеет стабильный ранг 1,5 тогда и только тогда, когда каждая обратимая матрица A представима в виде $A = HLU$, где L, U — элементы групп нижних и верхних унитреугольных матриц (треугольных матриц, с 1 на диагонали), а матрица H принадлежит группе

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists\, H_1 \in \mathrm{GL}_n(R) \colon H\Phi = \Phi H_1\},$$

где $\Phi = \mathrm{diag}\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_1|\varphi_2|\ldots|\varphi_n$, $\varphi_n \neq 0$.

Вступ. Зображення матриці у вигляді добутку двох і більшої кількості співмножників із заданими властивостями є одним із ефективних методів розв'язання та спрощення матричних задач. Відомо, що над лівим кільцем Ерміта кожна матриця є добутком оборотної та трикутної матриць, над кільцем елементарних дільників — оборотної, діагональної та оборотної матриць.

Зауважимо, що можливість зображення матриці у вигляді добутку заданих співмножників тісно пов'язана зі стабільним рангом кільця, над яким розглядаються ці матриці. Під стабільним рангом кільця R розуміється таке найменше n, що з умови $a_1R + \ldots + a_{n+1}R = R$, $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$, випливає існування таких $b_1, \ldots, b_n \in R$, що

$$(a_1 + a_{n+1}b_1)R + \ldots + (a_n + a_{n+1}b_n)R = R.$$

Такі дослідження проводились у роботах [1 – 4]. Зокрема, було показано [3], що кожна оборотна матриця над комутативним кільцем R є добутком верхньої трикутної, нижньої та верхньої унітрикутних матриць (трикутних матриць, діагональними елементами яких є 1) тоді і тільки тоді, коли R є кільцем Ерміта стабільного рангу 1. Х. Чен [4] узагальнив цей результат на некомутативний випадок.

Допоміжні твердження. Будемо говорити, що кільце R має **стабільний ранг 1,5**, якщо з умови $aR + bR + cR = R$, де $a, b, c \in R$, $c \neq 0$, випливає існування такого $r \in R$, що $(a + br)R + cR = R$.

Кільцями стабільного рангу 1,5 є адекватні кільця [5], факторіальні кільця, комутативні області головних ідеалів. Також такими кільцями є кільця (2×2)-матриць над комутативними областями Безу (областями скінченнопороджених головних ідеалів) стабільного рангу 1,5 [6].

Основною метою цієї роботи є дослідження розкладності повної лінійної групи над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5 у добуток трьох її підгруп, дві з яких є групами верхніх та нижніх унітрикутних матриць.

Нагадаємо, що комутативне кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо для кожної матриці A над R існують такі оборотні матриці відповідних розмірів P, Q, що

$$PAQ = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \Phi, \tag{1}$$

де $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Матриця Φ називається формою Сміта, а матриці P, Q — лівою та правою перетворювальними матрицями матриці A. Співставимо матриці Φ групу Зеліска

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists\, H_1 \in \mathrm{GL}_n(R)\colon H\Phi = \Phi H_1\},$$

що складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{22} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Дослідження цієї групи було розпочато у роботі [8] і продовжено в [9]. Ця група виникла при описові множини лівих перетворювальних матриць матриці A, яку позначимо через $\mathbf{P}_A$. Так, $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Phi P$, де P — довільна матриця, що задовольняє рівність (1).

Окрім того, група $\mathbf{G}_\Phi$ відіграє центральну роль у питанні асоційованості матриць. Так, матриці $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$ асоційовані справа, тобто $A = BU$, $U \in \mathrm{GL}_n(R)$, тоді тільки тоді, коли $P_A = HP_B$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$.

Теорема 1. *Комутативна область Безу R стабільного рангу* 1,5 *є областю елементарних дільників.*

Доведення. На підставі теореми 5.2 з [7] комутативна область Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для кожної трійки взаємно простих елементів $a, b, c \in R$ існують такі $p, q \in R$, що $(ap + bq, cp) = 1$. У розглядуваному випадку, якщо $c \neq 0$, то, згідно з означенням, існує таке r, що $(a + br, c) = 1$, тобто $p = 1$, $q = r$. Якщо $c = 0$, то p, q вибираються з рівності $ap + bq = 1$.

Теорему 1 доведено.

Далі, якщо це спеціально не обумовлено, R є комутативною областю Безу.

Позначимо через $A_{(i)}$ підматрицю матриці $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ вигляду

$$A_{(i)} = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ni} & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Лема 1. *Нехай $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^n$ — оборотна матриця і $HP = Q = [q_{ij}]_{i,j=1}^n$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Тоді*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det P_{(i+1)}\right) = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det Q_{(i+1)}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Доведення. Матриця H має вигляд (2). Тому її підматриця, що складена з m останніх рядків, має вигляд

$$K_s = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_s}{\varphi_1} h_{s1} & \dots & \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}} h_{s,s-1} & h_{ss} & \dots & h_{s,n-1} & h_{sn} \\ \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_1} h_{s+1,1} & \dots & \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_{s-1}} h_{s+1,s-1} & \frac{\varphi_{s+1}}{\varphi_s} h_{s+1,s} & \dots & h_{s+1,n-1} & h_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{s-1}} h_{n,s-1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_s} h_{ns} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} H'_s & H_{(s)} \end{bmatrix},$$

де $s = n - m + 1$. Зауважуючи, що $\dfrac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}} \Big| \dfrac{\varphi_{s+k}}{\varphi_{s-1-l}}$, отримуємо, що всі елементи матриці H'_s діляться на $\dfrac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$. Отже, всі мінори порядку m матриці K_s, за винятком мінора $\det H_{(s)}$, діляться на $\dfrac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$. Звідси випливає, що

$$\left(\det H_{(s)}, \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}} \right) = 1. \tag{3}$$

Оскільки

$$Q_{(s)} = K_s \begin{bmatrix} p_{1s} & p_{1,s+1} & \dots & p_{1n} \\ p_{2s} & p_{2,s+1} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{ns} & p_{n,s+1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

то, використавши формулу Біне – Коші, $\det Q_{(s)}$ можна записати у вигляді

$$\det Q_{(s)} = \sum_m + \det H_{(s)} \det P_{(s)},$$

де $\sum_m$ — сума добутків всеможливих мінорів m-го порядку матриці K_s, за винятком мінора $\det H_{(s)}$, на відповідні мінори матриці P. Оскільки всі мінори $\det H_j$ діляться на $\dfrac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}$, то

$$\det Q_{(s)} = \frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}} d + \det H_{(s)} \det P_{(s)}, \quad d \in R.$$

Тоді з огляду на рівність (3) отримуємо

$$\left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, \det Q_{(s)} \right) = \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, \det H_{(s)} \det P_{(s)} \right) = \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_{s-1}}, \det P_{(s)} \right).$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай R — комутативна область Безу стабільного рангу* 1,5 *і $a_1, a_2, \dots, a_n$ — взаємно прості елементи кільця R, до того ж $a_n \neq 0$. Тоді існують такі $r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$, що*

$$(a_1 + a_2 r_2 + \dots + a_{n-1} r_{n-1}, a_n) = 1.$$

Доведення. Позначимо $\delta = (a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$. Тоді існують такі $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$, що $\delta = v_2 a_2 + v_3 a_3 + \ldots + v_{n-1} a_{n-1}$. Оскільки $(a_1, \delta, a_n) = 1$, то існує таке r, що $(a_1 + r\delta, a_n) = 1$, тобто $(a_1 + a_2(ru_2) + \ldots + a_{n-1}(ru_{n-1}), a_n) = 1$.

Лему 2 доведено.

Основні результати.

Теорема 2. *Нехай S — оборотна матриця. Для того щоб у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існувала така матриця H, щоб HS була нижньою унітрикутною матрицею, необхідно та достатньо, щоб*

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det S_{(i+1)}\right) = 1, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $HS = T = [t_{ij}]_{i,j=1}^n$ — нижня унітрикутна матриця. Тоді на підставі леми 1

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det S_{(i+1)}\right) = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ t_{i+2,i+1} & 1 & & & 0 \\ \ldots & \ldots & & & \\ t_{n,i+1} & t_{n,i+2} & \ldots & t_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Достатність. Нехай $S = [s_{ij}]_{i,j=1}^2$ — оборотна матриця над R. Маємо

$$(s_{12}, s_{22}) = 1, \quad \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, s_{22}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} s_{12}, s_{22}\right) = 1.$$

Тоді існують такі u_1, u_2, що

$$s_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u_1 + s_{22} u_2 = 1.$$

Це означає, що матриця

$$K = \begin{bmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді

$$KS = \begin{bmatrix} d & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}.$$

З оборотності матриці KS випливає, що $d \in U(R)$. Тому матриця $H = \operatorname{diag}(d^{-1}, \ 1)K$ і буде шуканою. Таким чином, теорема є правильною у випадку матриць другого порядку.

Припустимо правильність теореми для всіх матриць порядку меншого за n і розглянемо оборотну матрицю $S = [s_{ij}]_{i,j=1}^n$. З рівностей (4) випливає

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, (s_{n,i+1}, s_{n,i+2}, \ldots, s_{nn})\right) = 1, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Отже, зокрема,

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, (s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1.$$

Також $(s_{n1}, (s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn})) = 1$. Тому

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\, s_{n1}, (s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = \left(\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\, s_{n1}, s_{n2}\right), (s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1.$$

Зважаючи на те, що

$$\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}, (s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1,$$

отримуємо

$$\left(\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1} s_{n1}, \frac{\varphi_3}{\varphi_2} s_{n2}\right), (s_{n3}, \ldots, s_{nn})\right) = 1.$$

Покроково продовжуючи описаний процес, одержуємо

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\, s_{1n}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}}\, s_{n-2,n}, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\, s_{n-1,n}, s_{nn}\right) = 1.$$

В кільці R існують такі $u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nn}$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\, u_{n1} s_{1n} + \ldots + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\, u_{n,n-1} s_{n-1,n} + u_{nn} s_{nn} = 1.$$

Це означає, що рядок $\begin{bmatrix} \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\, u_{n1} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\, u_{n,n-1} & u_{nn} \end{bmatrix}$ є унімодулярним. Скориставшись теоремою 3.7 із [7], доповнимо цей рядок до оборотної матриці вигляду

$$H_1 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1,n-2} & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2,n-2} & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & u_{n-2,n-2} & u_{n-2,n-1} & u_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\, u_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}\, u_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-2}}\, u_{n,n-2} & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\, u_{n,n-1} & u_{nn} \end{bmatrix},$$

яка є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$. Тоді

$$H_1 S = \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{q} \\ \mathbf{p} & 1 \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} s'_{n1} & s'_{n2} & \ldots & s'_{n,n-1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s'_{1n} & s'_{2n} & \ldots & s'_{n-1,n} \end{bmatrix}^T$. Тоді

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & -\mathbf{q} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}}_{H_2} H_1 S = \begin{bmatrix} S_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{p} & 1 \end{bmatrix},$$

де $S_2 = [s''_{ij}]_{i,j=1}^{n-1}$. Оскільки $H_2 H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, то за лемою 1

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det \begin{bmatrix} s''_{i+1,i+1} & \ldots & s''_{i+1,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s''_{n-1,i+1} & \ldots & s''_{n-1,n-1} & 0 \\ s'_{n,i+1} & \ldots & s'_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \det\begin{bmatrix} s''_{i+1,i+1} & \dots & s''_{i+1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ s''_{n-1,i+1} & \dots & s''_{n-1,n-1}\end{bmatrix}\right) = 1, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Розглянемо матрицю $\Phi_{n-1} = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$. Згідно з припущенням індукції, у групі $\mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$ існує така матриця K, що KS_2 — нижня унітрикутна матриця. Тоді

$$\begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} H_2 H_1 S$$

також буде нижньою унітрикутною матрицею, і для завершення доведення потрібно лише зауважити, що $\begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Теорему 2 доведено.

Нехай $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ — неособлива d-матриця над R, тобто матриця, в якій $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Позначимо через $U_n^{up}(R)$ та $U_n^{lw}(R)$ групи верхніх та нижніх унітрикутних $(n \times n)$-матриць над R відповідно.

Теорема 3. *Нехай R — комутативна область Безу. Наступні умови є еквівалентними:*

1) *R має стабільний ранг* 1,5;

2) $\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Phi U_2^{lw}(R) U_2^{up}(R)$ *для всіх неособливих d-матриць Φ над R;*

3) $\mathrm{GL}_n(R) = \mathbf{G}_\Phi U_n^{lw}(R) U_n^{up}(R)$ *для всіх неособливих d-матриць Φ над R та для кожного $n \geq 2$.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \mathrm{GL}_2(R)$. Тоді

$$(a_{21}, a_{22}) = 1 \Rightarrow \left(a_{21}, a_{22}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

В кільці R існує таке r, що

$$\left(a_{22} + a_{21} r, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Розглянемо матрицю $AU = [a'_{ij}]_{i,j=1}^2$, де

$$U = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$\left(a'_{22}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = 1,$$

то на підставі теореми 1 у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $HAU = V$ — нижня унітрикутна матриця. Тоді $A = H^{-1} V U^{-1}$. Таким чином,

$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Phi U_2^{lw}(R) U_2^{up}(R).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай $(a, b, c) = 1$, $abc \neq 0$. Маємо

$$a = (a, b) a_1, \quad b = (a, b) b_1, \quad (a_1, b_1) = 1.$$

Існують такі u, v, що $a_1 u + b_1 v = 1$. Отже, матриця

$$\begin{bmatrix} u & -v \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = A$$

є оборотною. Розглянемо d-матрицю $\Phi = \operatorname{diag}(1, c)$. Згідно з умовою теореми, матриця A є добутком трьох матриць: $A = HUV$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $U \in U_2^{lw}(R)$, $V \in U_2^{up}(R)$. Зауважуючи, що

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ ch_{21} & h_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

отримуємо

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} = H^{-1}AV^{-1} = H^{-1}\left(\begin{bmatrix} u & -v \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ ch_{21} & h_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & ur - v \\ b_1 & b_1 r + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & ch_{21}(ur - v) + h_{22}(b_1 r + a_1) \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$ch_{21}(ur - v) + h_{22}(b_1 r + a_1) = 1.$$

Звідси випливає, що $(b_1 r + a_1, c) = 1$. Зважаючи на те, що $((a, b), c) = 1$, отримуємо

$$((a, b)(b_1 r + a_1), c) = (a + br, c) = 1.$$

Це означає, що кільце R має стабільний ранг 1,5.

Випадок, коли $a = 0$ чи $b = 0$, є очевидним.

3) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3). Доведення проведемо методом математичної індукції. Для матриць порядку 2, як ми показали, твердження є правильним. Припустимо його правильність для матриць порядку меншого за n. Оскільки 2) $\Leftrightarrow$ 1), то R є комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5. Нехай $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тоді

$$(a_{n1}, \ldots, a_{nn}) = 1 \Rightarrow \left(a_{n1}, \ldots, a_{nn}, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Згідно з лемою 2, існують такі $r_1, \ldots, r_{n-1}$, що

$$\left(a_{nn} + a_{n,n-1}r_{n-1} + \ldots + a_{n1}r_1, \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right) = 1.$$

Розглянемо матрицю $AU_n = [a'_{ij}]_{i,j=1}^n$, де

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & r_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & r_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $((a'_{n1}, \ldots, a'_{n,n-1}), a'_{nn}) = 1$ і

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, a'_{nn}\right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}(a'_{n1},\ldots,a'_{n,n-1}),a'_{nn}\right)=1.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\,a'_{n1},\frac{\varphi_n}{\varphi_2}\,a'_{n2},\ldots,\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\,a'_{n,n-1},a'_{nn}\right)=1.$$

Із доведення достатності теореми 2 випливає, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_n, що

$$H_nAU_n=\begin{bmatrix}A_1 & \mathbf{0}\\ A_2 & 1\end{bmatrix}.$$

Розглянемо d-матрицю $\Phi_{n-1}=\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$. Оскільки $A_1\in\mathrm{GL}_{n-1}(R)$, то згідно з припущенням $A_1=H_{n-1}V_{n-1}U_{n-1}$, де $H_{n-1}\in\mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$, $V_{n-1}\in U^{lw}_{n-1}(R)$, $U_{n-1}\in U^{up}_{n-1}(R)$. Отже,

$$H_nAU_n=\begin{bmatrix}A_1 & \mathbf{0}\\ A_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{n-1}V_{n-1}U_{n-1} & \mathbf{0}\\ A_2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}H_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{bmatrix}V_{n-1} & \mathbf{0}\\ A_2U_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix}U_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}}_{N}=MSN.$$

Таким чином, матрицю A можна записати у вигляді $A=(H_n^{-1}M)S(NU_n^{-1})$. Зауважуючи, що $H_n^{-1}M\in\mathbf{G}_\Phi$, $S\in U_n^{lw}(R)$, $NU_n^{-1}\in U_n^{up}(R)$, отримуємо

$$\mathrm{GL}_n(R)=\mathbf{G}_\Phi U_n^{lw}(R)U_n^{up}(R).$$

Теорему 3 доведено.

Зауваження. Теорема 3 є відповіддю на питання Б. Забавського, яке він задав автору під час його виступу на семінарі „The problems of elementary divisor rings” у Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Література

1. *Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T.* Products of three triangular matrices // Linear Algebra and Appl. – 1999. – **292**. – P. 61 – 71.
2. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, вып. 2. – С. 17 – 27.
3. *Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T.* Products of three triangular matrices over commutative rings // Linear Algebra and Appl. – 2002. – **348**. – P. 1 – 6.
4. *Chen H.* Rings related to stable range conditions. – World Sci., 2011. – Vol. 11.
5. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225 – 236.
6. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 849 – 860.
7. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
8. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14 – 21.
9. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79 – 99.

Одержано 22.07.15