УДК 519.21

О. В. Іванов, І. В. Орловський (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ M-ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ ТА СИНГУЛЯРНИМ СПЕКТРОМ

We study a nonlinear regression model with discrete time and observations errors whose spectrum is singular. Sufficient conditions are obtained for the consistency, asymptotic uniqueness and asymptotic normality of the M-estimates of the unknown parameters.

Получены достаточные условия состоятельнсти, асимптотической единственности и асимптотической нормальности M-оценок неизвестных параметров нелинейных моделей регрессии с дискретным временем и ошибками наблюдений, имеющих сингулярный спектр.

Вступ. У роботі отримано достатні умови консистентності, асимптотичної єдиності та асимптотичної нормальності M-оцінок невідомого параметра нелінійної моделі регресії з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом, який має сингулярний спектр.

Асимптотичні властивості M-оцінок параметрів лінійних та нелінійних моделей регресії з випадковим шумом, що задовольняє умову сильної залежності, досліджувались у роботах [1 – 9] для моделей з дискретним часом та [10 – 17] для моделей з неперервним часом. У роботах [12, 14, 15, 18, 19] вивчались асимптотичні властивості M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії з неперервним часом та слабко залежним випадковим шумом. Дана робота поширює результати [16] на випадок дискретного часу. В ній досліджено M-оцінки, побудовані за допомогою гладких функцій втрат.

Однією з властивостей, досліджених у роботі, є консистентність M-оцінки (пункт 4), оскільки вона є ключовою умовою, потрібною для доведення єдиності (у деякому асимптотичному сенсі) розв’язку системи „нормальних” рівнянь, яка визначає M-оцінку (пункт 3). Достатні умови консистентності M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії отримано у роботах [14, 17, 19].

Зазначимо також, що ключовими моментами доведення асимптотичної нормальності (пункт 2) є застосування граничної теореми для зваженої суми нелінійного перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром з роботи [20] та теореми Брауера про нерухому точку [21]. Для коректного використання цієї теореми і потрібна асимптотична єдиність M-оцінки. Для нелінійних моделей регресії питання асимптотичної єдиності M-оцінок розглядалося в роботах [12, 15, 16].

1. Постановка задачі. На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$ розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j,\theta) + \varepsilon_j, \quad j \geq 1, \tag{1.1}$$

де $g(j,\cdot)\colon \Theta_\beta \to \mathbb{R},\ j \geq 1,$ — неперервні функції, $\Theta_\beta = \bigcup\limits_{\|a\|\leq 1} (\Theta + \beta a),\ \beta > 0$ — деяке число, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ — обмежена опукла відкрита множина, $\theta \in \Theta$ — істинне значення параметра.

Далі ми розглядаємо похідні функції регресії у множині Θ^c (Θ^c — замикання Θ), і тому потрібно, щоб функція регресії g була означена на Θ_β.

Відносно шуму ε_j припустимо наступне:

A$_1$) $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, є локальним функціоналом від гауссівської стаціонарної послідовності ξ_j, тобто $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, де $G(x),\ x \in \mathbb{R}$, — борелева функція, причому $\mathbf{E}\varepsilon_0 = 0,\ \mathbf{E}\varepsilon_0^4 < \infty$;

A$_2$) $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, — стаціонарна гауссівська послідовність з нульовим середнім та коваріаційною функцією (к. ф.) вигляду

$$B(n) = \mathbf{E}\xi_0\xi_n = \sum_{k=0}^{r} A_k B_{\alpha_k,\varkappa_k}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0, \tag{1.2}$$

де

$$B_{\alpha_k,\varkappa_k}(n) = \frac{\cos(\varkappa_k n)}{(1+n^2)^{\alpha_k/2}},$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_r < \pi, \qquad 0 < \alpha_k < 1, \quad k = \overline{0,r}, \qquad \sum_{k=0}^{r} A_k = 1, \quad A_k > 0.$$

Таку модель к. ф. було введено у роботі [22] як приклад спектральної щільності (с. щ.), що має хоч і складний, але явний вигляд. Крім цього, така с. щ. може мати сингулярність не лише в нулі, як у випадку сильно залежного процесу, а і в інших точках. Умову A$_2$ також було використано в роботах [20, 23].

К. ф. $B(n)$ має спектральний розклад

$$B(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z},$$

зі с. щ. $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} A_k f_{\alpha_k,\varkappa_k}(\lambda),\ \lambda \in [-\pi;\pi)$.

Наведемо деякі властивості функцій $f_{\alpha_k,\varkappa_k}$. У неперервному випадку функції

$$B_{\alpha_k,\varkappa_k}(t) = \frac{\cos(\varkappa_k t)}{(1+t^2)^{\alpha_k/2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

відповідає с. щ. вигляду

$$\widetilde{f}_{\alpha_k,\varkappa_k}(\lambda) = \frac{C_1(\alpha_k)}{2}\Big[K_{\frac{\alpha_k-1}{2}}\big(|\lambda+\varkappa_k|\big)|\lambda+\varkappa_k|^{\frac{\alpha_k-1}{2}} + $$
$$+ K_{\frac{\alpha_k-1}{2}}\big(|\lambda-\varkappa_k|\big)|\lambda-\varkappa_k|^{\frac{\alpha_k-1}{2}}\Big], \quad k = \overline{0,r},$$

де $C_1(\alpha) = 2^{\frac{1-\alpha}{2}} / \Big(\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\dfrac{\alpha}{2}\Big)\Big)$ і

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)z\right\} ds, \qquad z \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

є модифікованою функцією Бесселя 3-го роду порядку ν.

Зауважимо, що $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ і для $z \downarrow 0$

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}, \quad \nu > 0.$$

Можна показати, що при $\lambda \to \pm\varkappa_k,\ k = \overline{0,r}$,

$$\widetilde{f}_{\alpha_k,\varkappa_k}(\lambda) \sim \frac{C_2(\alpha_k)}{2}|\lambda \pm \varkappa_k|^{\alpha_k-1}\Big(1 - h_k\big(|\lambda \pm \varkappa_k|\big)\Big),$$

де $C_2(\alpha) = \left[2\Gamma(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^{-1}$,

$$h_k(|\lambda|) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha_k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3-\alpha_k}{2}\right)}\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{1-\alpha_k} + \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha_k+1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\dfrac{3+\alpha_k}{2}\right)}\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{2} - o\big(|\lambda|^2\big), \qquad \lambda \to 0, \quad k = \overline{0,r}.$$

Зауважимо, що с. щ. f та с. щ. $\widetilde{f}(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} A_k \widetilde{f}_{\alpha_k,\varkappa_k}(\lambda)$ неперервного аналога функції $B(n)$ пов'язані між собою співвідношенням [24]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\lambda + 2\pi k).$$

Тому с. щ. f має $2r+2$ різні точки сингулярності $\{-\chi_r, -\chi_{r-1}, \ldots, -\chi_1, -\chi_0, \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_r\}$ за умови A$_2$, коли $\chi_0 \neq 0$ та $0 < \alpha_j < 1,\ j = \overline{0,r}$. Якщо $\chi_0 = 0$, то f має $2r+1$ точку сингулярності.

Означення 1.1. *M-оцінкою невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями $X_j,\ j \in \overline{1,N}$, вигляду* (1.1) *та функцією втрат $\rho(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j,\ j \in \overline{1,N}) \in \Theta^c$, для якого*

$$S_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\tau \in \Theta^c} S_N(\tau), \qquad S_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \rho(X_j - g(j,\tau)).$$

Для принаймні неперервних функцій втрат ρ, за введених на параметричну множину Θ умов, існування M-оцінки $\hat{\theta}_N$ випливає з загальної теореми 3.10 роботи [25] та леми 3.3 [26, с. 336]. Крім цього, $\hat{\theta}_N$ є борелевою функцією спостережень $X_j,\ j \in \overline{1,N}$ [26, 27].

2. Асимптотична нормальність M-оцінок. ***2.1. Умови та формулювання основного результату.*** Зробимо деякі припущення щодо функції регресії $g(j,\tau)$ та функції втрат $\rho(x)$. Нехай $g(j,\tau)$ є двічі неперервно диференційовною по $\tau \in \Theta^c$. Позначимо

$$g_i(j,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(j,\tau), \qquad g_{il}(j,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i \partial \tau_l} g(j,\tau), \qquad \tau \in \Theta^c, \quad i,l = \overline{1,q},$$

$$d_N(\theta) = \mathrm{diag}(d_{iN}(\theta))_{i=1}^q, \qquad d_{iN}(\theta) = \left(\sum_{j=1}^{N} g_i^2(j,\theta)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \liminf_{N\to\infty} N^{-1} d_{iN}^2(\theta) > 0, \quad i = \overline{1,q},$$

$$d_{il,N}(\theta) = \left(\sum_{j=1}^{N} g_{il}^2(j,\theta)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \tau \in \Theta^c, \quad i,l = \overline{1,q}.$$

Літерою k будемо позначати додатні сталі. Припустимо, що для всіх достатньо великих N $(N > N_0)$ виконано такі умови:

B_1) для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ $g(j, \cdot) \in C^2(\Theta^c)$ та
(i) $\max_{1 \le j \le N} \max_{\tau \in \Theta^c} \dfrac{|g_i(j,\tau)|}{d_{iN}(\theta)} \le k^i N^{-1/2}$;
(ii) $\max_{1 \le j \le N} \max_{\tau \in \Theta^c} \dfrac{|g_{il}(j,\tau)|}{d_{il,N}(\theta)} \le k^{il} N^{-1/2}$;
(iii) $\dfrac{d_{il,N}(\theta)}{d_{iN}(\theta) d_{lN}(\theta)} \le \tilde{k}^{il} N^{-1/2},\ i, l = \overline{1, q}$;
C_1) функція ρ є невід'ємною, парною, двічі неперервно диференційовною, $\rho(0) = 0$, а її похідні $\rho' = \psi$ і $\rho'' = \psi'$ задовольняють умови:
(i) $\mathbf{E}\psi\big(G(\xi_0)\big) = 0$;
(ii) $\mathbf{E}\psi'\big(G(\xi_0)\big) > 0$;
(iii) для довільних $x, h \in \mathbb{R}$ та деякої сталої L

$$\big|\psi'(x+h) - \psi'(x)\big| \le L|h|.$$

За умови C_1(iii) для кожного x та деякого $\eta = \eta(x) \in (0,1)$

$$|\psi(x) - \psi(0)| = |\psi'(\eta x)|\ |x| \le \big(|\psi'(0)| + L|\eta x|\big)|x| \le |\psi'(0)|\ |x| + Lx^2,$$

або

$$|\psi(x)| \le |\psi(0)| + |\psi'(0)|\ |x| + Lx^2.$$

Крім того,

$$\big|\psi'(x)\big| \le \big|\psi'(0)\big| + L|x|.$$

Таким чином, випадкові послідовності $\psi\big(G(\xi_j)\big)$ та $\psi'\big(G(\xi_j)\big)$, $j \in \mathbb{Z}$, за умов A_1, A_2, C_1, мають скінченні другі моменти.

Нехай $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ і функція $K \in L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$. Тоді її можна розкласти в цьому просторі в ряд Фур'є

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(K)}{n!} H_n(x), \qquad C_n(K) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \quad n \ge 0,$$

за поліномами Чебишова – Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n \ge 0. \tag{2.1}$$

Означення 2.1. *Функція $K \in L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ має ранг Ерміта m $(\mathrm{Hrank}(K) = m)$, якщо або $C_1(K) \ne 0$ та $m = 1$, або для деякого $m \ge 2$*

$$C_1(K) = \ldots = C_{m-1}(K) = 0, \quad C_m(K) \ne 0.$$

Функції $\psi \circ G$ та $\psi' \circ G$ можна розкласти у ряди Фур'є за поліномами Чебишова – Ерміта у просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$:

$$\psi(G(x)) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n(\psi \circ G)}{n!} H_n(x),$$

$$\psi'(G(x)) = C_0(\psi' \circ G) + \sum_{n=m'}^{\infty} \frac{C_n(\psi' \circ G)}{n!} H_n(x),$$

де $m = \mathrm{Hrank}(\psi \circ G),\ m' = \mathrm{Hrank}(\psi' \circ G);\ C_0(\psi \circ G) = \mathbf{E}\psi\Big(G\big(\xi(0)\big)\Big) = 0$ за умови C_1(i).

Припустимо, що виконується така умова:

C_2) або (i) $\mathrm{Hrank}(\psi \circ G) = 1,\ \alpha > \dfrac{1}{2}$, або (ii) $\mathrm{Hrank}(\psi \circ G) = m,\ \alpha m > 1$, де

$$\alpha = \min_{k=\overline{0,r}} \alpha_k, \tag{2.2}$$

α_k — параметри к. ф. (1.2).

Нехай $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин півінтервалу $[-\pi;\pi)$.

Введемо матричну міру $\mu_N(dx;\theta)$ на $\Big([-\pi;\pi),\mathfrak{B}\Big)$ з матрицею щільності

$$\left(\mu_N^{kl}(x;\theta)\right)_{k,l=1}^q = \left(g_N^k(x,\theta)\overline{g_N^l(x,\theta)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|g_N^k(x,\theta)\right|^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_N^l(x,\theta)\right|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}} \right)_{k,l=1}^q,$$

$$g_N^k(x,\theta) = \sum_{j=1}^N e^{ixj} g_k(j,\theta), \quad k = \overline{1,q}.$$

Зауважимо, що $d_{kN}^2(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_N^k(x,\theta)\right|^2 dx.$

Будемо вважати, що виконується така умова:

B_2) сім'я мір $\mu_N(\cdot;\ \theta)$ слабко збігається при $N \to \infty$ до додатно визначеної матричної міри $\mu(\cdot;\ \theta)$.

Це означає, що компоненти $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ є комплексними зарядами обмеженої варіації, матриці $\mu(B,\theta) = \left(\mu^{kl}(B,\theta)\right)_{k,l=1}^q$ невід'ємно визначені для будь-якого $B \in \mathfrak{B}$, а $\mu([-\pi;\pi);\theta)$ — додатно визначена матриця.

Означення 2.2 [28, 29]. *Матрична міра* $\mu(\cdot;\ \theta) = \left(\mu^{kl}(\cdot;\ \theta)\right)_{k,l=1}^q$ *називається спектральною мірою функції регресії* $g(j,\theta)$.

Запишемо

$$J_N(\theta) = \left(J_{il,N}(\theta)\right)_{i.l=1}^q = \left(d_{iN}^{-1}(\theta) d_{lN}^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^N g_i(j,\theta) g_l(j,\theta) \right)_{i.l=1}^q.$$

Зауважимо, що з умови B_2 випливає, що

$$J_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_N(dx;\theta) \to \int_{-\pi}^{\pi} \mu(dx;\theta) = \mu([-\pi;\pi);\ \theta) = J(\theta) \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{2.3}$$

Позначимо $\Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta)$.

Введемо поняття μ-припустимості с. щ. $f(\lambda)$ (детальніше див. [29, 30]).

Означення 2.3. *С. щ. f називається μ-припустимою, якщо вона μ-інтегровна, тобто всі елементи матриці $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\mu(d\lambda)$ скінченні, та*

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\mu_N(d\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\mu(d\lambda).$$

Достатні умови μ-припустимості с. щ. стаціонарної послідовності, які, зокрема, задовольняє с. щ. f послідовності ξ_j з к. ф. (1.2), можна знайти в роботах [20, 31]. Основна умова полягає в тому, щоб сукупність точок сингулярності f не перетиналась із сукупністю атомів спектральної міри μ, яка є атомною для всіх відомих на сьогодні прикладів її існування.

Нехай $f^{(*1)}(\lambda) = f(\lambda)$ і для $n \geq 2$

$$f^{(*n)}(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\pi)^{n-1}} f(\lambda - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n)\mathbb{1}_{[-\pi,\pi)}(\lambda - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n) \prod_{i=2}^{n} f(\lambda_i)d\lambda_2 \ldots d\lambda_n, \quad \lambda \in [-\pi, \pi),$$

— n-та згортка с. щ. f випадкової послідовності $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma = \Big(E\psi'\big(G(\xi_0)\big)\Big)^{-1}. \tag{2.4}$$

Припустимо, що виконано також таку умову:

D_1) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N_0 = N_0(\varepsilon)$, що для всіх $N > N_0$ система рівнянь $\nabla S_N(\tau) = 0$ має єдиний розв'язок з імовірністю не меншою за $1 - \varepsilon$.

У пункті 3 наведено достатні умови виконання D_1, які одночасно виконуються з умовами наступної теореми, якщо припустити, що $d_{iN}(\theta) = O(N^{\frac{1}{2}})$, $d_{il,N}(\theta) = O(N^{\frac{1}{2}})$, $i, l = \overline{1, q}$.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, *та с. щ. f випадкової послідовності ξ є μ-припустимою у випадку виконання умови* C_2 (i). *Тоді випадковий вектор $\hat{u}_N(\theta) = d_N(\theta)(\hat{\theta}_N - \theta)$ при $N \to \infty$ збігається за розподілом до нормального закону $N(0, \Sigma(\theta))$, де*

$$\Sigma(\theta) = 2\pi\gamma^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi \circ G)}{n!}\, \Lambda(\theta) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda)\mu(d\lambda, \theta) \right) \Lambda(\theta). \tag{2.5}$$

Зауважимо, що коваріаційна матриця (2.5), за умов теореми, є додатно визначеною. Цей факт випливає з леми 2.3, доведеної в наступному підпункті.

2.2. Допоміжні твердження. Розглянемо нормовану M-оцінку

$$\hat{u}_N = \hat{u}_N(\theta) = d_N(\theta)(\hat{\theta}_N - \theta). \tag{2.6}$$

Виконаємо заміну змінних, яка відповідає нормуванню (2.6), у функції регресії та її похідних, тобто

$$g(j, \tau) = g(j, \theta + d_N^{-1}(\theta)u) = h(j, u), \qquad g_i(j, \tau) = g_i\left(j, \theta + d_N^{-1}(\theta)u\right) = h_i(j, u),$$

$$g_{il}(j,\tau) = g_{il}(j,\theta + d_N^{-1}(\theta)u) = h_{il}(j,u), \quad i,l = \overline{1,q}.$$

Будемо також використовувати позначення

$$H(j;u_1,u_2) = h(j,u_1) - h(j,u_2), \qquad H_i(j;u_1,u_2) = h_i(j,u_1) - h_i(j,u_2), \quad i = \overline{1,q}.$$

Введемо вектори

$$M_N(u) = \big(M_N^i(u)\big)_{i=1}^q = \left(\gamma \sum_{j=1}^N \psi(X_j - h(j,u)) \frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)}\right)_{i=1}^q$$

та

$$\Psi_N(u) = \big(\Psi_N^i(u)\big)_{i=1}^q = \left(\gamma \sum_{j=1}^N \psi\big(G(\xi_j)\big) \frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N H(j;0,u)\frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)}\right)_{i=1}^q,$$

де γ задано формулою (2.4).

Вектори $M_N(u)$ та $\Psi_N(u)$ визначені для $u \in U_N^c(\theta)$, $U_N(\theta) = d_N(\theta)(\Theta - \theta)$.

Зауважимо, що за нашими припущеннями множини $U_N(\theta)$ розширюються до $\mathbb{R}^q$ при $N \to \to \infty$. Тоді для довільних $R > 0$ $v(R) := \big\{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\big\} \subset U_N(\theta)$ для $N > N_0(R)$.

Легко зрозуміти статистичний зміст векторів $M_N(u)$ та $\Psi_N(u)$. Розглянемо функціонал $\gamma S_N(\theta + d_N^{-1}(\theta)u)$. Тоді нормована M-оцінка $\hat{u}_N$ задовольняє систему рівнянь

$$M_N(u) = 0. \tag{2.7}$$

Нехай

$$\eta_j = \gamma\psi\big(G(\xi_j)\big), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

та спостереження мають вигляд

$$Y_j = g(j,\theta) + \eta_j, \quad j = \overline{1,N}. \tag{2.9}$$

Тоді

$$\Psi_N(u) = 0$$

є системою нормальних рівнянь для знаходження нормованої оцінки найменших квадратів

$$\breve{u}_N = \breve{u}_N(\theta) = d_N(\theta)(\breve{\theta}_N - \theta)$$

невідомого параметра θ віртуальної нелінійної моделі регресії (2.9).

Лема 2.1. *Нехай виконуються умови* A_1, A_2, B_1 *та* C_1. *Тоді для довільних* $R > 0,\ r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\max_{u \in v^c(R)} \|M_N(u) - \Psi_N(u)\| > r\right\} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{2.10}$$

Доведення. Для фіксованого i

$$M_N^i(u) - \Psi_N^i(u) =$$

$$= \gamma \sum_{j=1}^N \frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)} \left[\psi(G(\xi_j) + H(j;0,u)) - \psi\big(G(\xi_j)\big) - \psi'\big(G(\xi_j)\big)H(j;0,u)\right] +$$

$$+\gamma \sum_{j=1}^{N} H(j;0,u) \frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)} \zeta_j = I_1(u) + I_2(u),$$

$$\zeta_j = \psi'\big(G(\xi_j)\big) - \mathbf{E}\psi'\big(G(\xi_j)\big), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Доведемо, що $I_1(u)$ та $I_2(u)$ збігаються до нуля за ймовірністю рівномірно по $u \in v^c(R)$. Нехай $u \in v^c(R)$ фіксоване. Тоді $\mathbf{E}I_2(u) = 0$ та

$$\mathbf{E}I_2^2(u) = \gamma^2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} H(j;0,u)H(l;0,u) \frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)} \frac{h_i(l,u)}{d_{iN}(\theta)} \mathbf{cov}(\zeta_j, \zeta_l). \tag{2.11}$$

Маємо

$$\max_{1 \le j \le N} \big|H(j;0,u)\big| = \max_{1 \le j \le N} \left| \sum_{i=1}^{q} \frac{h_i(j,u_N^*)}{d_{iN}(\theta)} u_i \right| \le \|u\| \max_{1 \le j \le N} \left(\sum_{i=1}^{q} \left[\frac{h_i(j,u_N^*)}{d_{iN}(\theta)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\|u_N^*\| \le \|u\|$.

З цієї нерівності завдяки умові B_1(i) випливає, що

$$\max_{1 \le j \le N} \big|H(j;0,u)\big| \le N^{-1/2} \|k\| \|u\|, \tag{2.12}$$

де $k = (k^1, \ldots, k^q)$ — вектор констант з нерівності і умови B_1(i).

Застосовуючи нерівність (2.12) та умову B_1(i) до суми (2.11), отримуємо

$$\mathbf{E}I_2^2(u) \le \gamma^2 \|k\|^2 (k^i)^2 R^2 N^{-2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \mathbf{cov}(\zeta_j, \zeta_l).$$

Покажемо, що

$$N^{-2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \mathbf{cov}(\zeta_j, \zeta_l) \to 0, \quad N \to \infty. \tag{2.13}$$

Використовуючи співвідношення (див., наприклад, [32, с. 58])

$$\mathbf{E}H_n(\xi_j)H_k(\xi_l) = \delta_n^k n! B^n(j-l),$$

де δ_n^k — символ Кронекера, записуємо

$$\mathbf{cov}\left(\psi'\big(G(\xi_j)\big), \psi'\big(G(\xi_l)\big)\right) = \sum_{n=m'}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi' \circ G)}{n!} B^n(j-l).$$

Оскільки $|B(j)| \le 1,\ j \in \mathbb{Z}$, то

$$\left|\mathbf{cov}\left(\psi'\big(G(\xi_j)\big), \psi'\big(G(\xi_l)\big)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=m'}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi' \circ G)}{n!} \big|B(j-l)\big| \le \mathbf{D}\psi'\big(G(\xi_0)\big) \big|B(j-l)\big| \tag{2.14}$$

та

$$N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\mathbf{cov}(\zeta_j,\zeta_l)\le N^{-2}\mathbf{D}\psi'\big(G(\xi_0)\big)\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\big|B(j-l)\big|.$$

З іншого боку,

$$N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\big|B(j-l)\big|\le\sum_{k=0}^{r}A_k\left(N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(1+(j-l)^2)^{\alpha_k/2}}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{r}A_k\left(N^{-1}+2N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{j}{N}\right)\frac{1}{(1+j^2)^{\alpha_k/2}}\right)\le$$

$$\le N^{-1}+2\sum_{k=0}^{r}A_kN^{-\alpha_k}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{j}{N}\right)\left(\frac{j}{N}\right)^{-\alpha_k}\frac{1}{N}\right)\le$$

$$\le N^{-1}+2\sum_{k=0}^{r}A_kN^{-\alpha_k}\int_0^1(1-t)t^{-\alpha_k}dt=N^{-1}+2\sum_{k=0}^{r}\frac{A_kN^{-\alpha_k}}{(1-\alpha_k)(2-\alpha_k)},$$

тобто

$$N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\big|B(j-l)\big|=O(N^{-\alpha}),\tag{2.15}$$

де α задано формулою (2.2). Це означає, що виконується (2.13), і тому $I_2(u)\xrightarrow{\mathrm{P}}0$ при $N\to\infty$ для кожного $u\in v^c(R)$.

Для $u_1,u_2\in v^c(R)$ розглянемо

$$I_2(u_1)-I_2(u_2)=\gamma\sum_{j=1}^{N}H(j;0,u_1)\frac{H_i(j;u_1,u_2)}{d_{iN}(\theta)}\zeta_j-$$

$$-\gamma\sum_{j=1}^{N}H(j;u_1,u_2)\frac{h_i(j;u_2)}{d_{iN}(\theta)}\zeta_j=I_3(u_1,u_2)+I_4(u_1,u_2).$$

Для довільних $h>0,\ r>0$ за нерівністю Маркова

$$\mathrm{P}\left\{\max_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_3(u_1,u_2)|>r\right\}\le r^{-1}\mathbf{E}\max_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_3(u_1,u_2)|\le$$

$$\le 2r^{-1}\gamma\mathbf{E}\big|\psi'\big(G(\xi_0)\big)\big|N\max_{u\in v^c(R)}\max_{1\le j\le N}|H(j;0,u)|\max_{\|u_1-u_2\|\le h}\max_{1\le j\le N}\frac{\big|H_i(j;u_1,u_2)\big|}{d_{iN}(\theta)},\tag{2.16}$$

$$\max_{\|u_1-u_2\|\le h}\max_{1\le j\le N}\frac{\big|H_i(j;u_1,u_2)\big|}{d_{iN}(\theta)}\le$$

$$\le h\max_{1\le j\le N}\sum_{l=1}^{q}\left(\max_{u\in v^c(R)}\frac{\big|h_{il}(j,u)\big|}{d_{il,N}(\theta)}\right)\frac{d_{il,N}(\theta)}{d_{iN}(\theta)d_{lN}(\theta)}\le\sum_{l=1}^{q}k^{il}\tilde{k}^{il}hN^{-1}\tag{2.17}$$

завдяки умовам B_1(i), (iii).

Застосуємо (2.12) та (2.17) до (2.16) і в результаті отримаємо

$$\mathrm{P}\left\{\max_{\|u_1-u_2\|\leq h}\big|I_3(u_1,u_2)\big|>r\right\}\leq k_1 r^{-1}N^{-\frac{1}{2}}h, \tag{2.18}$$

де $k_1=2\gamma\mathbf{E}\big|\psi'\big(G(\xi_0)\big)\big|R\|k\|\left(\sum_{i,l=1}^{q}\ k^{il}\tilde{k}^{il}\right)$.

Аналогічним чином, згідно з умовою B_1(i)

$$\mathrm{P}\left\{\max_{\|u_1-u_2\|\leq h}\big|I_4(u_1,u_2)\big|>r\right\}\leq r^{-1}\mathbf{E}\max_{\|u_1-u_2\|\leq h}\big|I_4(u_1,u_2)\big|\leq$$

$$\leq 2r^{-1}\gamma\mathbf{E}\big|\psi'\big(G(\xi_0)\big)\big|N\max_{u\in v^c(R)}\max_{1\leq j\leq N}\frac{|h_i(j,u)|}{d_{iN}(\theta)}\max_{\|u_1-u_2\|\leq h}\max_{1\leq j\leq N}\big|H(j;u_1,u_2)\big|\leq k_2 r^{-1}h, \tag{2.19}$$

де $k_2=2\gamma\mathbf{E}|\psi'\big(G(\xi_0)\big)|k^i\|k\|$.

З (2.18) та (2.19) випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{\max_{\|u_1-u_2\|\leq h}\big|I_2(u_1)-I_2(u_2)\big|>r\right\}\leq 2r^{-1}h\left(k_1N^{-1/2}+k_2\right)\leq k_3r^{-1}h. \tag{2.20}$$

Позначимо через N_h скінченну h-сітку кулі $v^c(R)$. Тоді

$$\max_{u\in v^c(R)}\big|I_2(u)\big|\leq\max_{\|u_1-u_2\|\leq h}\big|I_2(u_1)-I_2(u_2)\big|+\max_{u\in N_h}\big|I_2(u)\big|. \tag{2.21}$$

З (2.20) та (2.21) маємо

$$\mathrm{P}\left\{\max_{u\in v^c(R)}\big|I_2(u)\big|>r\right\}\leq 2k_3r^{-1}h+\mathrm{P}\left\{\max_{u\in N_h}\big|I_2(u)\big|>\frac{r}{2}\right\}\quad \text{для будь-якого}\quad r>0.$$

Для $\varepsilon>0$ задамо $h=\dfrac{\varepsilon r}{4k_3}$. Тоді для $N>N_0$ завдяки поточковій збіжності $I_2(u)$ до нуля за ймовірністю

$$\mathrm{P}\left\{\max_{u\in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_3}}}\big|I_2(u)\big|>\frac{r}{2}\right\}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

і, таким чином,

$$\mathrm{P}\left\{\max_{u\in v^c(R)}\big|I_2(u)\big|>r\right\}\leq\varepsilon.$$

З іншого боку, при фіксованих $1\leq j\leq N$, $u\in v^c(R)$ існує таке $\delta\in(0,1)$, що майже напевно (м. н.)

$$\big|\psi(G(\xi_j)+H(j;0,u))-\psi\big(G(\xi_j)\big)-\psi'\big(G(\xi_j)\big)H(j;0,u)\big|=$$
$$=\big|\psi'(G(\xi_j)+\delta H(j;0,u))-\psi'\big(G(\xi_j)\big)\big|\,\big|H(j;0,u)\big|\leq$$
$$\leq L\big|H(j;0,u)\big|^2\leq L\|k\|^2R^2N^{-1}. \tag{2.22}$$

Завдяки умові B_1(i) та (2.22)

$$\max_{u\in v^c(R)} \left|I_1(u)\right| \le L\gamma k^i \left\|k\right\|^2 R^2 N^{-\frac{1}{2}} \text{ м. н.}$$

Лему 2.1 доведено.

Введемо випадковий вектор

$$L_N(u) = (L_N^i(u))_{i=1}^q = \left(\sum_{j=1}^N \left(\eta_j - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j,\theta)}{d_{lN}(\theta)} u_l \right) \frac{g_i(j,\theta)}{d_{iN}(\theta)} \right)_{i=1}^q, \tag{2.23}$$

який відповідає віртуальній лінійній моделі регресії

$$Z_j = \sum_{l=1}^q g_l(j,\theta)\beta_l + \eta_j, \quad j = \overline{1,N},$$

де η_j введено в (2.8). Система нормальних рівнянь

$$L_N(u) = 0, \qquad u = d_N(\theta)(\tau - \beta), \tag{2.24}$$

задає нормовану лінійну оцінку найменших квадратів $\tilde\beta_N$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$. Покладемо

$$\tilde u_N = \tilde u_N(\theta) = d_N(\theta)(\tilde\beta_N - \beta). \tag{2.25}$$

Лема 2.2. *В умовах леми* 2.1 *для довільних* $R > 0,\ r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{ \max_{u\in v^c(R)} \left\|\Psi_N(u) - L_N(u)\right\| > \right\} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{2.26}$$

Доведення. Очевидно,

$$\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) = \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N H(j;0,u)\frac{h_i(j,u)}{d_{iN}(\theta)} -$$

$$-\sum_{j=1}^N \eta_j \frac{g_i(j,\theta)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N \frac{g_i(j,\theta)}{d_{iN}(\theta)} \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j,\theta)}{d_{lN}(\theta)} u_l =$$

$$= \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{H_i(j;u,0)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N H(j;0,u)\frac{H_i(j;u,0)}{d_{iN}(\theta)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \frac{g_i(j,\theta)}{d_{iN}(\theta)} \left[H(j;0,u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j,\theta)}{d_{lN}(\theta)} u_l \right] = I_5(u) + I_6(u) + I_7(u).$$

Для фіксованого $u \in v^c(R)$ за допомогою (2.17) отримуємо

$$\mathbf{E} I_5^2(u) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{cov}(\eta_j,\eta_l) \frac{H_i(j;u,0)}{d_{iN}(\theta)} \frac{H_i(l;u,0)}{d_{iN}(\theta)} \le$$

$$\le \left(\sum_{l=1}^q k^{il} \tilde k^{il} \right)^2 R^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left| \mathbf{cov}(\eta_j,\eta_l) \right|.$$

Покажемо, що

$$N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\,\mathbf{cov}(\eta_j,\eta_l)\to 0,\quad N\to\infty. \tag{2.27}$$

Аналогічно (2.14)

$$\left|\mathbf{cov}\left(\psi\big(G(\xi_j)\big),\psi(G(\xi_l))\right)\right|\le \mathbf{E}\psi^2\big(G(\xi_0)\big)\big|B(j-l)\big|. \tag{2.28}$$

Використовуючи (2.8), (2.15) та (2.28), маємо

$$N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\,\mathbf{cov}(\eta_j,\eta_l)\le \gamma^2\mathbf{E}\psi^2\big(G(\xi_0)\big)N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\,\big|B(j-l)\big|=O(N^{-\alpha}),$$

і (2.27) виконується, тобто $I_5(u)\xrightarrow{\mathrm{P}}0$ при $N\to\infty$ для всіх $u\in v^c(R)$.

З іншого боку, завдяки (2.17)

$$\mathbf{E}\max_{\|u_1-u_2\|\le h}\big|I_5(u_1)-I_5(u_2)\big|=\gamma\mathbf{E}\left|\psi\big(G(\xi_0)\big)\right|\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}\tilde{k}^{il}\right)h,$$

і, як і для $I_2(u)$ у доведенні леми 2.1, можна показати рівномірну по $u\in v^c(R)$ збіжність $I_5(u)$ до нуля за ймовірністю.

Беручи до уваги нерівності (2.12) та (2.17), отримуємо

$$\max_{u\in v^c(R)}\big|I_6(u)\big|\le\|k\|\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}\tilde{k}^{il}\right)R^2N^{-\frac12}\longrightarrow 0,\quad N\to\infty.$$

Зауважимо, що $I_7(u)$ можна записати у вигляді

$$I_7(u)=-\frac12\sum_{l_1=1}^{q}\sum_{l_2=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{N}\,\frac{h_{l_1l_2}(j,u_N^*)}{d_{l_1N}(\theta)d_{l_2N}(\theta)}\frac{g_i(j,\theta)}{d_{iN}(\theta)}\right)u_{l_1}u_{l_2}$$

для деякого $u_N^*\in v(R)$. Тоді за умовою B_1

$$\big|I_7(u)\big|\le\frac{k^i}{2}\sum_{l_1=1}^{q}\sum_{l_2=1}^{q}\,\left(k^{l_1l_2}\tilde{k}^{l_1l_2}|u_{l_1}|\,|u_{l_2}|\right)N^{-\frac12}\le\frac{qk^i}{2}\max_{l_1,l_2=\overline{1,q}}\left[k^{l_1l_2}\tilde{k}^{l_1l_2}\right]\|u\|^2N^{-\frac12},$$

тобто $\max_{u\in v^c(R)}\big|I_7(u)\big|\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Лему 2.2 доведено.

З (2.10) та (2.26) випливає такий наслідок.

***Наслідок* 2.1.** *В умовах леми* 2.1 *для довільних* $R>0$, $r>0$

$$\mathrm{P}\left\{\max_{u\in v^c(R)}\big\|M_N(u)-L_N(u)\big\|>r\right\}\to 0,\quad N\to\infty.$$

З умови B_2 та (2.3) випливає, що для $N > N_0$ матриці $J_N(\theta)$ є додатно визначеними, а тому існують обернені до них $\Lambda_N(\theta) = J_N^{-1}(\theta)$.

Таким чином, за умови B_2 із (2.23) та (2.24) знаходимо (див. (2.25))

$$\tilde{u}_N = \Lambda_N(\theta) d_N^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^{N} \eta_j \nabla g(j,\theta). \tag{2.29}$$

Наступна лема забезпечує додатну визначеність матриць $\int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda)\mu(d\lambda,\theta)$, $n \geq 1$, які є елементами розкладу коваріаційної матриці (2.5) в ряд.

Лема 2.3. *Нехай виконано умови* A_2 *та* B_2. *Тоді матриці*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda)\mu(d\lambda,\theta), \quad n \geq 2,$$

додатно визначені. Якщо $f(\lambda)$ *є* μ*-припустимою, то* $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\mu(d\lambda,\theta)$ — *також додатно визначена матриця.*

Доведення. За умови A_2

$$f^{(*n)}(\lambda) \geq c_n > 0, \qquad n \geq 1, \quad \lambda \in [-\pi;\pi).$$

Оскільки $\mu(d\lambda,\theta)$ — ермітова матриця, то квадратична форма $\sum_{k,l=1}^{q} \mu^{kl}(d\lambda,\theta) z_k \overline{z_l} = m_Z(d\lambda,\theta)$ для будь-яких $Z = (z_1,\ldots,z_q) \in \mathbb{C}^q$ є звичайною мірою. Тоді квадратична форма

$$\left\langle \int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda)\mu(d\lambda,\theta)Z,\ Z \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda) m_Z(d\lambda,\theta) \geq c_n \int_{-\pi}^{\pi} m_Z(d\lambda,\theta) =$$

$$= c_n \left\langle \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda,\theta)Z,\ Z \right\rangle = c_n \langle\, J(\theta)Z,\ Z\rangle > 0,$$

якщо $Z \neq 0$, за умовою B_2.

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої суми від нелінійного перетворення гауссівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром [20].

Теорема 2.2. *Нехай виконано умови* A_1, A_2, B_1(i), B_2 *та одну з наступних умов для функції* $K \in L_2(\mathbb{R},\, \varphi(x)dx)$:

(i) $\mathrm{Hrank}(K) = 1$ *та с. щ.* f *випадкового процесу* ξ *є* μ*-припустимою*;

(ii) $\mathrm{Hrank}(K) = m$ *та* $\alpha m > 1$, *де* α *задано формулою* (2.2).

Тоді випадковий вектор

$$\zeta_N = d_N^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^{N} K(\xi_j) \nabla g(j,\theta)$$

асимптотично при $N \to \infty$ *нормальний* $N(0,\bar{\Sigma})$, *де*

$$\bar{\Sigma} = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(K)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda)\mu(d\lambda,\theta).$$

Сформулюємо теорему Брауера про нерухому точку (див., наприклад, [21]).

Теорема 2.3. *Нехай* $F: v^c(R) \to v^c(R)$ *— неперервне відображення. Тоді існує таке* $x_0 \in \in v^c(R)$, *що* $F(x_0) = x_0$.

Нехай для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ — σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} \|x - \| < \varepsilon \right\}, \qquad A_{-\varepsilon} = \mathbb{R}^q \backslash (\mathbb{R}^q \backslash A)_\varepsilon.$$

Наступну теорему доведено в § 3 [33].

Теорема 2.4. *Нехай* ν *— невід'ємна диференційовна функція на* $[0, +\infty)$ *така, що*

$$b = \int_0^\infty |\nu'(\lambda)| \lambda^{q-1} d\lambda < +\infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \nu(\lambda) = 0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ *та довільних* ε, $\delta > 0$ *має місце нерівність*

$$\int_{C_\varepsilon \backslash C_{-\delta}} \nu(\|\lambda\|) d\lambda \le b \left(\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \right) (\varepsilon + \delta).$$

***2.3. Доведення теореми* 2.1.** Покажемо, що для довільного $r > 0$

$$\Delta_N(r) = \mathrm{P}\left\{ \|\hat{u}_N - \tilde{u}_N\| > r \right\} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{2.30}$$

Розглянемо подію $A_N = \left\{ \|\tilde{u}_N\| \in v^c(R - r) \right\}$, де R таке, що для $N > N_0$, завдяки асимптотичній нормальності $\tilde{u}_N$, яка випливає із застосування до (2.29) теореми 2.2, виконується $\mathrm{P}(\bar{A}_N) \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ — фіксоване як завгодно мале число.

Введемо також подію

$$B_N = \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \left\| \Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u)) \right\| \le r \right\}.$$

Позначимо через $\lambda_{\min}(A)$ ($\lambda_{\max}(A)$) найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A.

З (2.3) випливає, що для деякого $\lambda_* > 0$ та всіх $N > N_0$

$$\lambda_{\min}(J_N(\theta)) \ge \lambda_*. \tag{2.31}$$

Тоді з (2.31) та наслідку 2.1 для $N > N_0$ маємо

$$\mathrm{P}(\bar{B}_N) \le \mathrm{P}\left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|M_N(u) - L_N(u)\| > \lambda_* r \right\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Взявши до уваги умову D_1, розглянемо також подію C_N, яка полягає в тому, що M-оцінка $\hat{u}_N$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.7), причому $\mathrm{P}(\bar{C}_N) \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ для $N > N_0$. Отже, для $N > N_0$

$$\mathrm{P}\left(A_N \bigcap B_N \bigcap C_N \right) \ge 1 - \varepsilon. \tag{2.32}$$

Із формул (2.23) та (2.29) отримуємо $\Lambda_N(\theta)L_N(u) = \tilde{u}_N - u$. Якщо подія $A_N \bigcap B_N \bigcap C_N$ сталася, то

$$\|u + \Lambda_N(\theta)M_N(\theta)\| \leq$$
$$\leq \|\tilde{u}_N\| + \|\Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u))\| \leq (R - r) + r = R \quad \text{для} \quad u \in v^c(R),$$

тобто $F_N(u) = u + \Lambda_N(\theta)M_N(u)$ — неперервне відображення $v^c(R)$ в $v^c(R)$.

Застосуємо теорему Брауера про нерухому точку (теорема 2.3) до $F_N(u)$. В результаті отримуємо, що існує точка $u_N^0 \in v^c(R)$ така, що $F(u_N^0) = u_N^0$, або, оскільки $\Lambda_N(\theta)$ є невиродженою, $M_N(u_N^0) = 0$. Завдяки виконанню події C_N єдиним розв'язком системи рівнянь (2.7) в кулі $v^c(R)$ є нормована M-оцінка $\hat{u}_N$.

Таким чином, $\{A_N \bigcap B_N \bigcap C_N\} \subset \big\{\hat{u}_N \in v^c(R)\big\}$ і $\mathrm{P}\big\{\hat{u}_N \in v^c(R)\big\} \geq 1 - \varepsilon$.

Зауважимо, що з (2.32) випливає нерівність

$$1 - \varepsilon \leq \mathrm{P}\Big\{\big\{\hat{u}_N \in v^c(R)\big\} \bigcap B_N\Big\} \leq$$
$$\leq \mathrm{P}\big\{\big\|\Lambda_N(\theta)\big(M_N(\hat{u}_N) - L_N(\hat{u}_N)\big)\big\| \leq r\big\} = \mathrm{P}\left\{\big\|\tilde{u}_N - \hat{u}_N\big\| \leq r\right\} \quad \text{для} \quad N > N_0, \tag{2.33}$$

тобто (2.30) виконується.

Позначимо $\Pi\big(-\infty; y \pm \vec{\varepsilon}\big) = (-\infty; y_1 \pm \varepsilon) \times \ldots \times (-\infty; y_q \pm \varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$. Беручи до уваги (2.30), для функції розподілу $F_N(y, \theta) = \mathrm{P}\big\{\hat{u}_N \in \Pi(-\infty, y)\big\}$ для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\tilde{u}_N \in \Pi\big(-\infty; y - \vec{\varepsilon}\big)\right\} - \Delta_N(\varepsilon) \leq F_N(y, \theta) \leq$$
$$\leq \mathrm{P}\left\{\tilde{u}_N \in \Pi\big(-\infty; y + \vec{\varepsilon}\big)\right\} + \Delta_N(\varepsilon). \tag{2.34}$$

З теореми 2.2, випливає, що випадковий вектор $\tilde{u}_N$ є асимптотично при $N \to \infty$ нормальним $N(0, \Sigma(\theta))$, де $\Sigma(\theta)$ визначена формулою (2.5). Таким чином,

$$\Big|\mathrm{P}\left\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\right\} - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}\big(y \pm \vec{\varepsilon}\big)\Big| \to 0, \quad N \to \infty. \tag{2.35}$$

Нехай $\varphi(y, \theta)$ — гауссівська щільність, що відповідає функції розподілу $\Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y)$.

Оскільки $\lambda_{\min}(\Sigma(\theta)) = \underline{\lambda} > 0$, $\lambda_{\max}(\Sigma(\theta)) = \overline{\lambda} < +\infty$, то

$$\varphi(y, \theta) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \exp\left\{-\|y\|^2 / 2\overline{\lambda}\right\} = \nu(\|y\|).$$

Якщо $A = \Pi(-\infty, y)$, то $A_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y - \vec{\varepsilon}]$, $(\Pi(-\infty, y + \vec{\varepsilon}])_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y] = A^c$. Застосовуючи теорему 2.4 до $\nu(\|y\|)$, для будь-якого $\omega \neq 0$ маємо

$$\big|\Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y + \vec{\omega})\big| = \int\limits_{\Pi} \varphi(y, \theta) dy \leq b \left(\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\right) |\omega|,$$

де

$$\Pi = \begin{cases} \Pi\big(-\infty, y + \overrightarrow{\omega}\big) \backslash A^c, & \text{якщо} \quad \omega > 0, \\ A \backslash A_\omega, & \text{якщо} \quad \omega < 0. \end{cases}$$

Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та для довільного $\varepsilon > 0$

$$F_N(y,\theta) - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y) \leq \Delta_N(\varepsilon) + \left| \mathrm{P}\left\{ \widetilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y + \overrightarrow{\varepsilon}) \right\} - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y + \overrightarrow{\varepsilon}) \right| + \\ + \left| \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y + \overrightarrow{\varepsilon}) - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y) \right|, \tag{2.36}$$

$$\Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y) - F_N(y,\theta) \leq \Delta_N(\varepsilon) + \left| \mathrm{P}\left\{ \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y - \overrightarrow{\varepsilon}) - \widetilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y - \overrightarrow{\varepsilon}) \right\} \right| + \\ + \left| \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y - \overrightarrow{\varepsilon}) \right|. \tag{2.37}$$

Зі співвідношень (2.30) – (2.37) випливає, що $\left| F_N(y,\theta) - \Phi_{0,\Sigma(\theta)}(y) \right| \to 0$ при $N \to \infty$.

Таким чином, теорему 2.1 доведено.

3. Асимптотична єдиність M-оцінок. Знайдемо достатні умови виконання умови D_1, тобто асимптотичної єдиності за ймовірністю M-оцінок параметрів моделі (1.1). Якщо функція регресії та функція втрат диференційовні, то M-оцінка $\hat{\theta}_N$ задовольняє систему рівнянь

$$\nabla S_N(\tau) = 0. \tag{3.1}$$

Деякі подальші умови є модифікаціями припущень, зроблених у підпункті 2.1.

Запишемо

$$\widetilde{J}_N(\theta) = \left(\widetilde{J}_{il,N}(\theta) \right)_{i,l=1}^q = \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j,\theta) g_l(j,\theta) \right)_{i,l=1}^q .$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

B_3) для деякого $\widetilde{\lambda}_* > 0$ та $N > N_0$ $\lambda_{\min}(\widetilde{J}_N(\theta)) \geq \widetilde{\lambda}_*$;

B_4) (i) $\sup_{j \geq 0} \max_{\tau \in \Theta^c} |g_i(j,\tau)| \leq k(i) < \infty$;

(ii) $\sup_{j \geq 0} \max_{\tau \in \Theta^c} |g_{il}(j,\tau)| \leq k(i,l) < \infty$;

(iii) $N^{-1} \Phi_N^{il}(\tau_1,\tau_2) = N^{-1} \sum_{j=1}^N \left(g_{il}(j,\tau_1) - g_{il}(j,\tau_2) \right)^2 \leq k_{il} \|\tau_1 - \tau_2\|^2, \ i,l = \overline{1,q}$, $\tau_1, \tau_2 \in \Theta^c$,

а також

C_3) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| = k_\psi < \infty$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi'(x)| = k_{\psi'} < \infty$.

Відносно M-оцінки припустимо таке:

D_2) $\hat{\theta}_N$ є слабко консистентною оцінкою θ в тому сенсі, що для довільного $r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{ \|\hat{\theta}_N - \theta\| \geq r \right\} = O(N^{-\alpha}), \quad N \to \infty,$$

де α задано формулою (2.2).

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови* A_1, A_2, B_3, B_4, C_1, C_3 *та* D_2. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $N_0 = N_0(\varepsilon)$, *що для* $N > N_0$ *система рівнянь* (3.1) *має єдиний розв'язок з імовірністю не меншою за* $1 - \varepsilon$.

Доведення. Нагадаємо, що γ задано в (2.4). Позначимо

$$H(j;\tau,\theta) = g(j,\tau) - g(j,\theta), \qquad H_i(j;\tau,\theta) = g_i(j,\tau) - g_i(j,\theta),$$

$$H_{il}(j;\tau,\theta) = g_{il}(j,\tau) - g_{il}(j,\theta), \quad i,l = \overline{1,q},$$

$$G_N(\tau) = \left(G_N^{il}(\tau) \right)_{i,l=1}^q = \left(\gamma \frac{\partial^2 S_N(\tau)}{\partial \tau_i \partial \tau_l} \right)_{i,l=1}^q .$$

Для доведення теореми покажемо, що матриця Гессе $G_N(\tau)$ функціонала $\gamma S_N(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі істинного значення параметра θ з імовірністю, що прямує до одиниці при $N \to \infty$.

Для довільних $i, l = \overline{1, q}$

$$G_N^{il}(\tau) = \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \psi'(X_j - g(j,\tau)) g_i(j,\tau) g_l(j,\tau) -$$

$$-\gamma N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \psi(X_j - g(j,\tau)) g_{il}(j,\tau) = {}_1G^{il}(\tau) + {}_2G^{il}(\tau). \tag{3.2}$$

Розглянемо другий доданок у (3.2):

$${}_2G^{il}(\tau) = -\gamma N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \Big[\psi\big(G(\xi_j) - H(j;\tau,\theta)\big) - \psi\big(G(\xi_j)\big)\Big] g_{il}(j,\tau) -$$

$$-\gamma N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \psi\big(G(\xi_j)\big) H_{il}(j;\tau,\theta) - \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \psi\big(G(\xi_j)\big) g_{il}(j,\theta) =$$

$$= {}_3G^{il}(\tau) + {}_4G^{il}(\tau) + {}_5G^{il}.$$

Завдяки умові B_4(i)

$$|H(j;\tau,\theta)| = \left| \sum_{i=1}^{q} g_i(j,\tau_j^*)(\tau_i - \theta_i) \right| \le \|\overline{k}\| \|\tau - \theta\|, \tag{3.3}$$

де $\tau_j^* = \theta + \eta(\tau - \theta)$, $\eta = \eta_j \in (0,1)$, $\overline{k} = \big(k(1), \ldots, k(q)\big)$. Крім того, для деякого $\delta_N \in (0,1)$

$$\psi(G(\xi_j) - H(j;\tau,\theta)) - \psi\big(G(\xi_j)\big) = \psi'\big(G(\xi_j) - \delta_j H(j;\tau,\theta)\big) H(j;\tau,\theta). \tag{3.4}$$

Тоді з урахуванням умов C_3, B_4(ii) та формул (3.3), (3.4) отримуємо

$$|{}_3G^{il}(\tau)| \le \gamma k_{\psi'} k(i,l) \|\overline{k}\| \|\tau - \theta\|. \tag{3.5}$$

За умовами C_3 та B_4(iii)

$$|{}_4G^{il}(\tau)| \le \gamma \left(N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \psi^2\big(G(\xi_j)\big) \right)^{\frac{1}{2}} \Big(N^{-1} \Phi_N^{il}(\tau,\theta) \Big)^{\frac{1}{2}} \le \gamma k_\psi k_{il}^{\frac{1}{2}} \|\tau - \theta\|. \tag{3.6}$$

З (2.15) та (2.28) випливає, що

$$\mathbf{E}\Big({}_5G^{il}\Big)^2 \le \gamma^2 k^2(i,l) \mathbf{E}\psi^2\big(G(\xi_0)\big) N^{-2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \big|B(j-l)\big| = O(N^{-\alpha}),$$

а тому

$$\Big|{}_5G^{il}\Big| \xrightarrow{\text{P}} 0, \quad N \to \infty. \tag{3.7}$$

Із нерівностей (3.5) – (3.7) видно, що

$$\left|{}_2G^{il}(\tau)\right| \le \gamma\left(k_{\psi'}k(i,l)\|\overline{k}\| + k_\psi k_{il}^{\frac{1}{2}}\right)\|\tau-\theta\| + |{}_5G^{il}| = K_{il}^{(2)}\|\tau-\theta\| + |{}_5G^{il}|. \tag{3.8}$$

З іншого боку,

$${}_1G^{il}(\tau) = \gamma N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Big[\psi'(G(\xi_j)-H(j;\tau,\theta)) - \psi'\big(G(\xi_j)\big)\Big]g_i(j,\tau)g_l(j,\tau)+$$

$$+\gamma N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\psi'\big(G(\xi_j)\big)\Big[g_i(j,\tau)H_l(j;\tau,\theta) + g_l(j,\theta)H_i(j;\tau,\theta)\Big]+$$

$$+\gamma N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Big[\psi'\big(G(\xi_j)\big) - \mathbf{E}\psi'\big(G(\xi_j)\big)\Big]g_i(j,\theta)g_l(j,\theta) + \widetilde{J}_N^{il}(\theta) =$$

$$= {}_6G^{il}(\tau) + {}_7G^{il}(\tau) + {}_8G^{il} + \widetilde{J}_N^{il}(\theta).$$

За умовами B_4, C_1(iii) та (3.3)

$$\left|{}_6G^{il}(\tau)\right| \le \gamma Lk(i)k(l)\|\overline{k}\|\|\tau-\theta\|. \tag{3.9}$$

Крім того, аналогічно (3.6)

$$\left|{}_7G^{il}(\tau)\right| \le \gamma k_{\psi'}\Big(k(i)\left\|\overline{k_l}\right\| + k(l)\|\overline{k_i}\|\Big)\|\tau-\theta\|, \tag{3.10}$$

де $\overline{k_i} = \big(k(i,1),\ldots,k(i,q)\big)$, $i=\overline{1,q}$.

Нарешті, за формулами (2.14) та (2.15) отримуємо

$$\mathbf{E}\left({}_8G^{il}\right)^2 \le \gamma^2k^2(i)k^2(l)\mathbf{D}\psi'\big(G(\xi_0)\big)N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\big|B(j-l)\big| = O(N^{-\alpha}),$$

звідки випливає, що

$$\left|{}_8G^{il}\right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad N\to\infty. \tag{3.11}$$

Із співвідношень (3.9) – (3.11) знаходимо

$$\left|{}_1G^{il}(\tau) - \widetilde{J}_N^{il}(\theta)\right| \le \gamma\left(Lk(i)k(l)\left\|\overline{k}\right\| + k_{\psi'}\left(k(i)\|\overline{k_l}\| + k(l)\|\overline{k_i}\|\right)\right)\|\tau-\theta\| +$$

$$+\left|{}_8G^{il}\right| = K_{il}^{(1)}\|\tau-\theta\| + \left|{}_8G^{il}\right|. \tag{3.12}$$

З огляду на властивість власних чисел суми двох симетричних матриць (див. [34, с. 101 – 103]) записуємо

$$\left|\lambda_{\min}(G_N(\tau)) - \lambda_{\min}(\widetilde{J}_N(\theta))\right| \le q\max_{1\le i,l\le q}\left|G_N^{il}(\tau) - \widetilde{J}_N^{il}(\theta)\right| \le$$

$$\le q\left(\max_{1\le i,l\le q}\left|{}_1G^{il}(\tau) - \widetilde{J}_N^{il}(\theta)\right| + \max_{1\le i,l\le q}\left|{}_2G^{il}(\tau)\right|\right). \tag{3.13}$$

Нехай $r = \widetilde{\lambda}_*/4q$, де $\widetilde{\lambda}_*$ — число з умови B_3. Якщо відбувається подія

$$\Omega_r = \left\{ \max_{1\le i,l\le q} \left(\left| {}_5G^{il} \right| + \left| {}_8G^{il} \right| \right) < r, \|\hat{\theta}_N - \theta\| \le \frac{r}{R} \right\},$$

де $R = \max_{1\le i,l\le q} \left(K_{il}^{(1)} + K_{il}^{(2)} \right)$, $K_{il}^{(1)}$ та $K_{il}^{(2)}$ — сталі з формул (3.12) та (3.8) відповідно, то з (3.13) випливає, що

$$\mathrm{P}\left(\Omega_r\right) \le \mathrm{P}\left\{ \left| \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_N)) - \lambda_{\min}(\widetilde{J}_N(\theta)) \right| \le 4qr \right\} \le$$

$$\le \mathrm{P}\left\{ \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_N)) - \lambda_{\min}(\widetilde{J}_N(\theta)) \ge -\frac{\widetilde{\lambda}_*}{2} \right\} \le \mathrm{P}\left\{ \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_N)) \ge \frac{\widetilde{\lambda}_*}{2} \right\}$$

для $N > N_0$ згідно з умовою B_3. Для довільного $\varepsilon > 0$ та $N > N_0$ внаслідок (3.8), (3.12) та умови D_2 виконується $\mathrm{P}(\overline{\Omega}_r) < \varepsilon$. Таким чином, $\mathrm{P}\{\Omega_r\} \ge 1-\varepsilon$ для $N > N_0$. Це означає, що $\hat{\theta}_N$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.1) з імовірністю не меншою за $1-\varepsilon$, оскільки матриця Гессе $G_N(\tau)$ функціонала $\gamma S_N(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі точки θ з імовірністю, що прямує до одиниці при $N \to \infty$.

Теорему 3.1 доведено.

4. Консистентність M-оцінок. Знайдемо достатні умови виконання умови D_2, тобто слабкої консистентності M-оцінок параметрів моделі (1.1). Введемо такі припущення:

C_4) функція $\rho(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\rho(0) = 0$ та задовольняє умову Ліпшиця: для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ та деякої сталої C_ρ: $|\rho(x) - \rho(y)| \le C_\rho\, |x-y|$:

C_5) для будь-якого $r > 0$ існує таке $\Delta(r) > 0$, що

$$\inf_{u\in U^c(\theta)\setminus v(r)} N^{-1}\mathbf{E}S_N^*(u) \ge \mathbf{E}\rho(\varepsilon_0) + \Delta(r),$$

де $U^c(\theta) = \Theta^c - \theta$, $S_N^*(u) = S_N(\theta+u)$;

B_5) (i) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\sup_{u_1,u_2\in U^c(\theta)\,:\, \|u_1-u_2\|\le\delta} N^{-1}\sum_{j=1}^{N} |g(j,\theta+u_1) - g(j,\theta+u_2)| < \varepsilon;$$

(ii) для будь-якого $r > 0$ існує таке $\kappa = \kappa(r) > 0$, що

$$\sup_{u\in v^c(r)\bigcap U^c(\theta)} N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \left(g(j,\theta+u) - g(j,\theta)\right)^2 \le \kappa(r).$$

Теорема 4.1. *Якщо виконано умови* A_1, A_2, B_5, C_4 *та* C_5, *то для будь-якого* $r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{ \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| \ge r \right\} = O(N^{-\alpha}), \quad N \to \infty,$$

де α *задано формулою* (2.2).

Доведення. Позначимо

$$\delta_N(\theta,u)=S_N^*(u)-\mathbf{E}S_N^*(u),\ \delta_N(\theta,0)=S_N^*(0)-\mathbf{E}S_N^*(0)=\sum_{j=1}^N \rho(\varepsilon_j)-N\mathbf{E}\rho(\varepsilon_0).$$

За означенням M-оцінки маємо

$$S_N(\hat\theta_T)=S_N^*(\hat\theta_N-\theta)=\min_{u\in U^c(\theta)} S_N^*(u),$$

$$S_N^*(\hat\theta_T-\theta)\le S_N^*(0)=\delta_N(\theta,0)+N\mathbf{E}\rho(\varepsilon_0) \text{ м. н.}$$

Нехай $r_0>0$ — таке число, що $\max_{\tau\in\Theta^c}\|\tau-\theta\|\le r_0$. За умови C_5 для будь-яких $r\in(0,r_0)$ та $\gamma'\in(0,1)$

$$\mathrm{P}\Big(r\le\Big\|\hat\theta_N-\theta\Big\|\le r_0\Big)\le$$

$$\le\mathrm{P}\Big(\Big\{r\le\Big\|\hat\theta_N-\theta\Big\|\le r_0\Big\}\bigcap\Big\{S_N^*\left(\hat\theta_T-\theta\right)\le\delta_N(\theta,0)+N\mathbf{E}\rho(\varepsilon_0)\Big\}\Big)\le$$

$$\le\mathrm{P}\left(\inf_{u\in(v^c(r_0)\setminus v(r))\cap U^c(\theta)} N^{-1}S_N^*(u)\le N^{-1}\delta_N(\theta,0)+\mathbf{E}\rho(\varepsilon_0)\right)\le$$

$$\le\mathrm{P}\left(\inf_{u\in(v^c(r_0)\setminus v(r))\cap U^c(\theta)} N^{-1}S_N^*(u)\le\right.$$

$$\left.\le N^{-1}\delta_N(\theta,0)+\inf_{u\in(v^c(r_0)\setminus v(r))\cap U^c(\theta)} N^{-1}\mathbf{E}S_N^*(u)-\Delta(r)\right)\le$$

$$\le\mathrm{P}\left(N^{-1}\delta_N(\theta,0)\ge(1-\gamma')\Delta(r)\right)+$$

$$+\mathrm{P}\left(\inf_{u\in(v^c(r_0)\setminus v(r))\cap U^c(\theta)} N^{-1}\delta_N(\theta,u)\le-\gamma'\Delta(r)\right)\le$$

$$\le\mathrm{P}\left(\sup_{u\in v^c(r_0)\bigcap U^c(\theta)} N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u)\right|\ge\gamma'\Delta(r)\right)+$$

$$+\mathrm{P}\left(N^{-1}\delta_N(\theta,0)\ge(1-\gamma')\Delta(r)\right)=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2\,.$$

Оцінимо ймовірність P_1. Нехай $F^{(1)},\ldots,F^{(p)}\subset v^c(r_0)$ — замкнені множини, діаметри яких не перевищують значення δ з умови B_5(i) для $r=r_0$ та $\varepsilon=\nu\Delta(r)\gamma'/\left(2C_\rho\right)$, $\nu\in(0,1)$ — деяке число, причому $\bigcup\limits_{i=1}^p F^{(i)}=v^c(r_0)$.

Зафіксуємо точки $u_i\in F^{(i)}\bigcap U^c(\theta),\ i=\overline{1,p}$. Тоді

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}\left(\sup_{u\in\bigcup\limits_{i=1}^p\left(F^{(i)}\cap U^c(\theta)\right)} N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u)\right|\ge\gamma'\Delta(r)\right)=$$

$$=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^p\left(\sup_{u\in F^{(i)}\cap U^c(\theta)} N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u)\right|\ge\gamma'\Delta(r)\right)\right)\le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}\left(\sup_{u',u''\in F^{(i)}\cap U^c(\theta)} N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u')-\delta_N(\theta,u'')\right| + N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u_i)\right| \geq \gamma'\Delta(r)\right).$$

Використовуючи умову C_4, маємо

$$\left|\delta_N(\theta,u')-\delta_N(\theta,u'')\right| \leq \left|S_N^*(u')-S_N^*(u'')\right| + \mathbf{E}\left|S_N^*(u')-S_N^*(u'')\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \left|\rho\left(X_j - g(j,\theta+u')\right) - \rho\left(X_j - g(j,\theta+u'')\right)\right| +$$

$$+\mathbf{E}\sum_{j=1}^{N} \left|\rho\left(X_j - g(j,\theta+u')\right) - \rho\left(X_j - g(j,\theta+u'')\right)\right| \leq$$

$$\leq 2C_\rho \sum_{j=1}^{N} \left|g(j,\theta+u') - g(j,\theta+u'')\right|.$$

Таким чином, беручи до уваги умову B_5(i), отримуємо

$$\sup_{u',u''\in F^{(i)}\bigcap U^c(\theta)} 2N^{-1}C_\rho \sum_{j=1}^{N} \left|g(j,\theta+u') - g(j,\theta+u'')\right| \leq 2C_\rho\varepsilon = \nu\gamma'\Delta(r).$$

Тому

$$\mathrm{P}_1 \leq \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}\left(N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u_i)\right| \geq (1-\nu)\gamma'\Delta(r)\right). \qquad (4.1)$$

Оцінимо кожен із доданків останньої суми окремо:

$$\mathrm{P}\left(N^{-1}\left|\delta_N(\theta,u_i)\right| \geq (1-\nu)\gamma'\Delta(r)\right) \leq \frac{N^{-2}\mathbf{E}\delta_N^2(\theta,u_i)}{\left((1-\nu)\gamma'\Delta(r)\right)^2},$$

де $\delta_N(\theta,u_i) = S_N^*(u_i) - \mathbf{E}S_N^*(u_i) = \sum_{j=1}^{N} \rho\left(X_j - g(j,\theta+u_i)\right) - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}\rho\left(X_j - g(j,\theta+u_i)\right).$

Позначимо $\Delta g(j,\theta+u_i) = g(j,\theta+u_i) - g(j,\theta)$ та

$$\rho\left(X_j - g(j,\theta+u_i)\right) = \rho\left(\varepsilon_j - \Delta g(j,\theta+u_i)\right) = Z(\varepsilon_j) = Z\big(G(\xi_j)\big).$$

Тоді

$$\mathbf{E}\delta_N^2(\theta,u_i) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbf{E}Z(\varepsilon_j)Z(\varepsilon_l) - \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}Z(\varepsilon_j)\right)^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbf{cov}\left(Z(\varepsilon_j),\, Z(\varepsilon_l)\right).$$

Оскільки при кожному фіксованому $j \in \overline{1,N}$

$$\mathbf{E}Z^2(\varepsilon_j) = \mathbf{E}\left(\rho\left(G(\xi_j) - \Delta g(j,\theta+u_i)\right)\right)^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left|\rho\left(G(\xi_j) - \Delta g(j,\theta+u_i)\right) - \rho(0)\right|^2 \leq C_\rho^2\mathbf{E}\left|G(\xi_j) - \Delta g(j,\theta+u_i)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2C_\rho^2\left(\mathbf{E}G^2(\xi_0 + \Delta^2 g(j,\theta+u_i)\right) < \infty,$$

то функцію $Z(G(\cdot))$ можна розкласти у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ у ряд за поліномами Чебишова – Ерміта (2.1), причому

$$Z(G(x)) = \rho\left(G(x) - \Delta g(j, \theta + u_i)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(j, u_i)}{n!} H_n(x),$$

$$C_n(j, u_i) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho\left(G(x) - \Delta g(j, \theta + u_i)\right) H_n(x)\varphi(x)dx, \quad n \geq 0, \quad C_0(j, u_i) = \mathbf{E}Z(\varepsilon_0).$$

Аналогічно (2.14)

$$\mathbf{cov}\left(Z(\varepsilon_j),\, Z(\varepsilon_l)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(j, u_i)C_n(l, u_i)}{n!} B^n(j - l) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2(j, u_i)}{n!} \big|B(j - l)\big| \leq \mathbf{E}Z^2(\varepsilon_0)\big|B(j - l)\big|. \tag{4.2}$$

Тоді при $N \to \infty$

$$N^{-2}\mathbf{E}\delta_N^2(\theta, u_i) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbf{cov}\left(Z(\varepsilon_j),\, Z(\varepsilon_l)\right) \leq N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbf{E}Z^2(\varepsilon_0)\big|B(j - l)\big| \leq$$

$$\leq 2C_\rho^2 N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \left(\mathbf{E}G^2(\xi_0) + \Delta^2 g(j, \theta + u_i)\right)\big|B(j - l)\big| \leq$$

$$\leq 2C_\rho^2 N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \big|B(j - l)\big| + 2C_\rho^2 N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \Delta^2 g(j, \theta + u_i)\big|B(j - l)\big| = S_1 + S_2.$$

З (2.15) випливає, що $S_1 = O(N^{-\alpha})$.

Оцінимо суму S_2, використавши умову B_5(ii):

$$S_2 = 2C_\rho^2 N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \Delta^2 g(j, \theta + u_i)\big|B(j - l)\big| =$$

$$= 2C_\rho^2 N^{-1}\sum_{j=1}^{N} \Delta^2 g(j, \theta + u_i)\left(N^{-1}\sum_{l=1}^{N} \big|B(j - l)\big|\right) \leq$$

$$\leq 2C_\rho^2 N^{-1}\kappa(r_0)\sum_{l=-N}^{N} |B(l)| \leq 4C_\rho^2\kappa(r_0)N^{-1}\sum_{l=0}^{N} |B(l)|\,.$$

Оскільки за аналогічних (2.15) міркувань

$$N^{-1}\sum_{l=0}^{N} |B(l)| \leq N^{-1} + \sum_{k=0}^{r} A_k N^{-\alpha_k}\left(\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{l}{N}\right)^{-\alpha_k}\frac{1}{N}\right) \leq$$

$$\leq N^{-1} + \sum_{k=0}^{r} \frac{A_k N^{-\alpha_k}}{1-\alpha_k} = O(N^{-\alpha}),$$

то $N^{-2}\mathbf{E}\delta_N^2(\theta, u_i) = O(N^{-\alpha})$. Отже,

$$\mathrm{P}\left(N^{-1}\left|\delta_N(\theta, u_i)\right| \geq (1-\nu)\gamma'\Delta(r)\right) = O(N^{-\alpha}), \quad i = \overline{1,p}. \tag{4.3}$$

З (4.1) та (4.3) отримуємо $\mathrm{P}_1 = O(N^{-\alpha})$.

З іншого боку,

$$\mathrm{P}_2 \leq \frac{N^{-2}\mathbf{E}\delta_N^2(\theta,0)}{((1-\gamma')\Delta(r))^2} = \big((1-\gamma')\Delta(r)\big)^{-2} N^{-2} \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbf{cov}\left(\rho(\varepsilon_j),\, \rho(\varepsilon_l)\right).$$

Зауважимо, що $\mathbf{E}\rho^2(\varepsilon_j) \leq C_\rho^2 \mathbf{E}\left|\varepsilon_0\right|^2 < \infty$, тобто функцію $\rho \circ G$ можна розкласти в ряд Фур'є за поліномами Чебишова – Ерміта в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$:

$$\rho(G(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} H_n(x), \qquad C_n = \int_{\mathbb{R}} \rho(G(x)) H_n(x)\varphi(x)dx,\ n \geq 0.$$

Таким чином, аналогічно (4.2)

$$\mathbf{cov}\left(\rho(\varepsilon_j),\, \rho(\varepsilon_l)\right) \leq \mathbf{E}\rho^2(\varepsilon_0)\big|B(j-l)\big|.$$

З останньої нерівності та (2.15) випливає, що

$$N^{-2}\mathbf{E}\delta_N^2(\theta,0) = N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbf{cov}\left(\rho(\varepsilon_j),\, \rho(\varepsilon_l)\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\rho^2(\varepsilon_0) N^{-2} \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \big|B(j-l)\big| = O(N^{-\alpha}).$$

Отже, $\mathrm{P}_2 = O(N^{-\alpha})$.

Теорему 4.1 доведено.

Література

1. *Koul H. L.* M-estimators in linear models with long range dependent errors // Statist. and Probab. Lett. – 1992. – **14**. – P. 153 – 164.
2. *Koul H. L.* Asymptotics of M-estimations in non-linear regression with long-range dependence errors // Proc. Athens Conf. Appl. Probab. and Time Ser. Anal.: Springer Verlag Lect. Notes Statist. – 1996. – II. – P. 272 – 291.
3. *Koul H. L., Mukherjee K.* Regression quantiles and related processes under long range dependent errors // J. Multivar. Anal. – 1994. – **51**. – P. 318 – 337.
4. *Giraitis L., Koul H. L., Surgailis D.* Asymptotic normality of regression estimators with long memory errors // Statist. and Probab. Lett. – 1996. – **29**. – P. 317 – 335.
5. *Koul H. L., Surgailis D.* Asymptotic expansion of M-estimators with long memory errors // Ann. Statist. – 1997. – **25**. – P. 818 – 850.
6. *Koul H. L., Surgailis D.* Second order behavior of M-estimators in linear regression with long-memory errors // J. Statist. Planning and Inference. – 2000. – **91**. – P. 399 – 412.

7. *Koul H. L., Surgailis D.* Robust estimators in regression models with long memory errors // Theory and Appl. Long-Range Dependence / Eds P. Doukhan, G. Oppenheim and M. S. Taqqu. – Boston: Birkhäuser, 2003. – P. 339 – 353.
8. *Giraitis L., Koul H. L.* Estimation of the dependence parameter in linear regression with long-range dependent errors // Statist. and Probab. Lett. – 1996. – **29**. – P. 317 – 335.
9. *Koul H. L., Baillie R. T., Surgailis D.* Regression model fitting with a long memory covariance process // Econ. Theory. – 2004. – **20**. – P. 485 – 512.
10. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Asymptotic behavior of M-estimators in continuous-time non-linear regression with long-range dependent errors // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2002. – **10**, № 3. – P. 201 – 222.
11. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Robust estimators in nonlinear regression models with long-range dependence // Optimal Design and Related Areas in Optimization and Statistics / Eds L. Pronzato and A. Zhigljavsky. – Berlin: Springer, 2009. – P. 193 – 221.
12. *Ivanov A. V.* Asymptotic properties of L_p-estimators // Theory Stochast. Process. – 2008. – **14(30)**, № 1. – P. 60 – 68.
13. *Ivanov A. V., Orlovsky I. V.* L_p-estimates in nonlinear regression with long-range dependence // Theory Stochast. Process. – 2002. – **7(23)**, № 3-4. – P. 38 – 49.
14. *Іванов О. В., Орловський І. В.* Конзистентність M-оцінок у нелінійних моделях регресії з неперервним часом // Наук. вісті НТУ України „КПІ”. – 2005. – № 4(42). – С. 140 – 147.
15. *Іванов О. В., Орловський І. В.* Про єдиність M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії // Наук. вісті НТУ України „КПІ”. – 2009. – № 4(46). – С. 135 – 141.
16. *Іванов О. В., Орловський І. В.* Асимптотичні властивості M-оцінок параметрів нелінійної регресії з випадковим шумом, що має сингулярний спектр // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2015. – Вип. 93. – С. 34 – 49.
17. *Савич І. М.* Конзистентність квантильних оцінок у моделях регресії з сильно залежним шумом // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2010. – Вип. 82. – С. 128 – 136.
18. *Orlovsky I. V.* M-estimates in nonlinear regression with weak dependence // Theory Stochast. Process. – 2003. – **9(25)**, № 1-2. – P. 108 – 122.
19. *Ivanov A. V., Orlovsky I. V.* Consistency of M-estimates in general nonlinear model // Theory Stochast. Process. – 2007. – **13(29)**, № 1-2. – P. 86 – 97.
20. *Ivanov A. V., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Savych I. N.* Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian processes with singular spectra // Ann. Probab. – 2013. – **41**, № 2. – P. 1088 – 1114.
21. *Гончаренко Ю. В., Ляшко С. И.* Теорема Брауэра. – Киев: Кий, 2000.
22. *Anh V. V., Knopova V. P., Leonenko N. N.* Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence // Aust. NZ J. Statist. – 2004. – **46**. – P. 275 – 296.
23. *Ivanov A. V., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Zhurakovsky B. M.* Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors // Statist.: J. Theor. and Appl. Statist. – 2015. – **49**, № 1. – P. 156 – 186.
24. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. – М.: Мир, 1974.
25. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. – 1969. – **14**. – P. 249 – 272.
26. *Шметтерер Л.* Введение в математическую статистику. – М.: Наука, 1976.
27. *Jennrich R. I.* Asymptotic properties of non-linear least squares estimators // Ann. Math. Statist. – 1969. – **40**. – P. 633 – 643.
28. *Grenander U.* On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance // Ann. Statist. – 1954. – **25**, № 2. – P. 252 – 272.
29. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970.
30. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977.
31. *Іванов О. В., Савич І. М.* μ-Припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму в нелінійних моделях регресії // Наук. вісті НТУ України „КПІ”. – 2009. – № 1. – С. 143 – 148.
32. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища шк., 1986.
33. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. – М.: Наука, 1982.
34. *Wilkinson J. H.* The algebraic eigen value problem. – Oxford: Clarendon Press, 1982.

Одержано 04.07.16