УДК 517.927

Г. О. Маслюк (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ’ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

We introduce the most general class of linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of order $r \geq 2$ whose solutions belong to the complex Hölder space $C^{n+r,\alpha}([a,b])$, where $n \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \alpha \leq 1$, and $[a,b] \subset \mathbb{R}$. We establish sufficient conditions under which the solutions of these problems continuously depend on the parameter in the Hölder space $C^{n+r,\alpha}([a,b])$.

Введен наиболее широкий класс линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$, решения которых принадлежат комплексному пространству Гельдера $C^{n+r,\alpha}([a,b])$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \alpha \leq 1$ и $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Найдены достаточные условия, при которых решения этих задач непрерывно зависят от параметра в пространстве Гельдера $C^{n+r,\alpha}([a,b])$.

1. Вступ. Питання, пов’язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено щодо задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних лінійних крайових задач вивчали І. Т. Кігурадзе [1 – 3] та його послідовники. Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець і Н. В. Рева [4, 5] отримали суттєві узагальнення цих результатів. Вони стосуються неперервності за параметром розв’язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку у рівномірній нормі. Для систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ ці питання досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [6].

У роботах [7, 8] обґрунтовано граничний перехід для широких класів лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь високих порядків у просторах неперервно диференційовних функцій і просторах Соболєва. Такі задачі названо тотальними щодо вказаних функціональних просторів. Доведено фредгольмовість цих задач, знайдено достатні умови їх коректної розв’язності та неперервної залежності за параметром їх розв’язків у цих просторах.

Щодо комплексних просторів Гельдера, то найбільш широкий клас лінійних крайових задач введено і досліджено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем та В. О. Солдатовим [9] для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Мета даної роботи — поширити вказані результати на системи диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ у просторах Гельдера.

Отримані результати, зокрема, можна застосовувати при дослідженні некласичних багатоточкових крайович задач, у спектральній теорії диференціальних операторів сучасної математичної фізики (див., наприклад, [10 – 12]). Зазначимо, що використаний у роботі підхід можна застосувати і для інших функціональних просторів [18 – 20].

2. Постановка задачі. Нехай задано скінченний відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $n \geq 0$, $m \geq 1$, $r \geq 2$ та дійсне число α таке, що $0 < \alpha \leq 1$. Будемо використовувати комплексні банахові простори Гельдера $(C^{n,\alpha})^m := C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$ та $(C^{n,\alpha})^{m\times m} := C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$. Вони складаються відповідно з усіх вектор-функцій і матриць-функцій порядку m, елементи яких належать простору $C^{n,\alpha} := C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C})$, і наділені нормами, що є сумою норм у $C^{n,\alpha}$ усіх компонент цих функцій.

Нагадаємо означення просторів Гельдера і обговоримо деякі поняття і позначення, пов'язані з цими просторами. Банахів простір $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$ усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, де ціле $l \geq 0$, наділяємо нормою

$$\|x\|_l := \sum_{j=0}^{l} \max\left\{|x^{(j)}(t)| \colon t \in [a,b]\right\}.$$

Простором Гельдера називається такий клас комплекснозначних функцій над $[a,b]$:

$$C^{l,\alpha} := \left\{ x \in C^{(l)} \colon \sup_{t_1,t_2 \in [a,b],\, t_1 \neq t_2} \frac{|x^{(l)}(t_2) - x^{(l)}(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha} < +\infty, \ \text{ де } \ l \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\}.$$

Цей простір є банаховим відносно норми

$$\|x\|_{l,\alpha} := \|x\|_l + \|x^{(l)}\|'_\alpha.$$

Ми будемо використовувати позначення $C^{l,0} := C^{(l)}$ і $\|x\|_{l,0} := \|x\|_l$.

Слід зазначити, що кожен простір $C^{l,\alpha}$ при $0 < \alpha \leq 1$ є банаховою алгеброю відносно деякої норми, еквівалентної $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. Норми у просторах $(C^{n,\alpha})^m$ і $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ також позначаємо через $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. З контексту завжди буде зрозуміло в якому саме просторі Гельдера порядку $n+\alpha$ (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) розглядається ця норма.

На скінченному відрізку $[a,b]$ розглянемо лінійну крайову задачу для систем m диференціальних рівнянь r-го порядку

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$B_j y(\cdot) = c_j, \quad j \in \{1,\ldots,r\}. \tag{2}$$

Тут вектор-функція $y(\cdot) \in C^{n+r,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot) \in$ $\in C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$, лінійний неперервний оператор

$$B_j \colon C^{n+r,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m \tag{3}$$

і вектор $c_j \in \mathbb{C}^m$ є заданими. Вектори і вектор-функції вважаємо поданими у вигляді стовпців.

Зауважимо, що кожний довільний лінійний неперервний оператор B_j можна однозначно зобразити у вигляді

$$B_j y = \sum_{k=1}^{n+r} \beta_k y^{(k-1)}(a) + \int_a^b \big(d\Phi(t)\big) y^{(n+r)}(t), \quad y \in (C^{(n+r)})^m, \tag{4}$$

де всі β_k є деякими числовими матрицями розміру $rm \times rm$, а $\Phi(t)$ — матриця-функція розміру $rm \times rm$, утворена скалярними функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$, неперервними справа на (a,b) і рівними нулю при $t = a$. Інтеграл тут розуміється в сенсі Рімана–Стільтьєса. Таке зображення випливає з відомого опису простору, спряженого з $C^{(n+r)}$ (див., наприклад, [14, с. 374]).

Крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для рівняння (1), розв'язок якого розглядається у просторі $C^{n+r,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$. Вона охоплює як усі класичні види крайових умов (умови задачі Коші, багатоточкові умови, інтегральні умови, умови мішаних крайових задач), так і некласичні умови, що містять похідні шуканої функції, порядок яких більший, ніж порядок рівняння (1). За аналогією з роботами [8, 9] задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо простору $C^{n+r,\alpha}$. (У цих роботах поняття тотальної крайової задачі введено щодо просторів Соболєва для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ та просторів Гельдера для систем диференціальних рівнянь порядку $r = 1$.)

Якщо крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то постає важливе питання про неперервну залежність розв'язку $y = y(\cdot,\varepsilon)$ такої задачі за параметром ε у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$, тобто коли

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{n+r,\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{5}$$

Мета роботи полягає у знаходженні достатніх умов для однозначної розв'язності цієї задачі і виконання граничної властивості (5), напевно, мінімальних на класі розглянутих крайових задач.

3. Основні результати. Сформулюємо основні результати статті (вони будуть доведені у пунктах 4, 5). Крайову задачу (1), (2) коротко запишемо у вигляді операторного рівняння

$$(L,B)y = (f,c), \qquad B = (B_1,\ldots,B_r), \qquad c = (c_1,\ldots,c_r),$$

де (L,B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L,B)\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Лінійний оператор* (6) *обмежений і фредгольмовий з індексом нуль.*

З огляду на цю теорему нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2. Скінченний індекс фредгольмового оператора T визначається за формулою

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1))$$

(див., наприклад, [15], лема 19.1.1).

Позначимо через $Y_k(\cdot) \in (C^{n+r,\alpha})^{m\times m}$ єдиний розв'язок відповідного (1) лінійного однорідного диференціального рівняння

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0, \quad t \in (a,b), \tag{7}$$

$$Y_k^{(j)}(t_0) = \delta_{k,j} I_m, \quad k,j = 0,\ldots,r-1. \tag{8}$$

У початкових умовах (8) точка $t_0 \in [a,b]$ фіксована, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку $m \times m$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (1) з $f \equiv 0$ можна записати у вигляді

$$y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot) q_k, \tag{9}$$

де вектор-стовпці $q_k \in \mathbb{C}^m$ є довільними.

Покладемо

$$[B_j Y_k] := \big([B_1 Y_0] \dots [B_r Y_{r-1}]\big), \tag{10}$$

де $j \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{0, \dots, r-1\}$.

Теорема 2. *Оператор* (L, B) *оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця* $[B_j Y_k]$ *є невиродженою, тобто* $\det[B_j Y_k] \neq 0$.

Тут числова квадратна матриця $[B_j Y_k]$ порядку $rm \times rm$ утворюється в результаті дії оператора B_j на відповідний стовпець (з тим же номером) матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Розглянемо сім'ю крайових задач вигляду (1), (2), залежних від числового параметра ε:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{11}$$

$$B_j(\varepsilon) y(\cdot,\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \quad j \in \{1, \dots, r\}, \tag{12}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, а число $\varepsilon_0 > 0$ є фіксованим. Тут вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є невідомою, а всі $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, лінійний неперервний оператор $B_j(\varepsilon)\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m$ і $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ — заданими. Крайова задача (11), (12) також є тотальною щодо простору Гельдера $C^{n+r,\alpha}$.

Будемо вважати, що виконується таке припущення.

Припущення. Однорідна гранична крайова задача

$$y^{(r)}(t,0) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,0) y^{(r-j)}(t,0) = 0, \quad t \in [a,b],$$

$$B_j(0) y(\cdot,0) = 0, \quad j \in \{1, \dots, r\},$$

має лише тривіальний розв'язок.

Умови, достатні для однозначної розв'язності задачі (11), (12) і неперервної залежності її розв'язку за малим параметром, дає така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення і при* $\varepsilon \to 0+$ *та* $j \in \{1, \dots, r\}$ *умови*:

(i) $\|A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) - A_{r-j}(\cdot,0)\|_{n,\alpha} \to 0$;

(ii) $B_j(\varepsilon)y \to B_j(0)y$ *для кожного* $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Якщо, окрім цього,

(iii) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{n,\alpha} \to 0$;

(iv) $c_j(\varepsilon) \to c_j(0)$,

то при малих ε *єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (11), (12) *задовольняє граничну властивість* (5).

Зауваження. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ запишемо крайовий оператор $B_j(\varepsilon)$ у вигляді (4), де $\beta_k = \beta_k(\varepsilon)$ і $\Phi(t) = \Phi(t,\varepsilon)$. З теореми Ріса про критерій слабкої збіжності лінійних неперервних функціоналів на $C([a,b],\mathbb{C})$ (див., наприклад, [16]) випливає, що умова (ii) рівносильна виконанню чотирьох умов щодо $\beta_k(\varepsilon)$ і $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$:

(2a) $\beta_k(\varepsilon) \to \beta_k(0)$ для кожного $k \in \{1, \dots, n+r\}$;

(2b) $\|V_a^b \Phi(\cdot,\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm\times rm}} = O(1)$;

(2c) $\Phi(b,\varepsilon) \to \Phi(b,0)$.

При цьому умова $B_j(\varepsilon) \to B_j(0)$ рівносильна умові (2a) і набагато сильніша, ніж умови (2b), (2c) і умова

(2d) $\displaystyle\int_a^t \Phi(s,\varepsilon)ds \to \int_a^t \Phi(s,0)ds$ для кожного $t \in (a,b]$.

4. Доведення теорем 1 і 2. Обмеженість лінійного оператора $L\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to (C^{n,\alpha})^m$ випливає з означення норм у просторах Гельдера і того, що кожний із цих просторів утворює банахову алгебру. Оператор B обмежений за означенням. Доведемо фредгольмовість оператора (L,B).

Означимо лінійний обмежений оператор $C\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm}$, поклавши

$$Cy = (y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)).$$

Оскільки неоднорідна задача Коші

$$(L,C)y = (f,c) \in (C^{n,\alpha})^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

має єдиний розв'язок $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ при будь-якому значенні правої частини рівняння, то оператор (L,C) є бієктивним. За теоремою Банаха про обернений оператор він є оборотним. З іншого боку, оператор (L,B) допускає зображення

$$(L,B) = (L,C) + (0, B-C), \tag{13}$$

де другий доданок — це скінченновимірний оператор. Тоді за теоремою Нікольського [18] (§ 21.5) оператор (L,B) є фредгольмовим з індексом 0.

Теорему 1 доведено.

Наведемо допоміжне твердження, яке буде використано у доведенні теореми 2.

Лема 1. *Для довільних матриці-функції $Y_k(\cdot) \in (C^{n+r,\alpha})^{m\times m}$, вектора $q_k \in \mathbb{C}^m$ та лінійного неперервного оператора $B_j\colon (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m$ справджується рівність*

$$B_j(Y_k(t)\cdot q_k) = [B_jY_k(t)]q_k, \tag{14}$$

де $j \in \{1,\ldots,r\}$, $k \in \{0,\ldots,r-1\}$.

Рівність (14) перевіряється безпосередньо.

За теоремою 1 оператор (6) є оборотним тоді і тільки тоді, коли $\ker(L,B) = \{0\}$. Тому для доведення теореми 2 достатньо показати, що $\ker(L,B) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det[B_jY_k(t)] = 0$.

Нехай $\ker(L,B) \neq \{0\}$. Тоді існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L,B)y = (0,0)$, який можна записати у вигляді (9), де хоча б один із вектор-стовпців $q_0, q_1, \ldots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. За лемою 1

$$0 = B_jy(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} B_j(Y_k(\cdot)q_k) = \sum_{k=0}^{r-1}[B_jY_k(\cdot)]q_k.$$

Отже, стовпці матриці (10) є лінійно залежними і вона є виродженою.

Навпаки, нехай матриця (10) є виродженою. Тоді її стовпці є лінійно залежними і

$$\sum_{k=0}^{r-1}[B_jY_k(\cdot)]q_k = 0 \tag{15}$$

для деяких вектор-стовпців $q_0, q_1, \ldots, q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, серед яких принаймні один відмінний від нуля. Означимо ненульову функцію $y(\cdot) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ за формулою (9). Для неї $Ly = 0$ і

$$B_j y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} B_j(Y_k(\cdot)q_k) = \sum_{k=0}^{r-1} [B_j Y_k(\cdot)]q_k = 0$$

за лемою 1 і рівністю (15). Отже, $y \in \ker(L, B)$ і тому $\ker(L, B) \neq \{0\}$.

Теорему 2 доведено.

5. Доведення теореми 3. Розглянемо спочатку параметричну сім’ю неоднорідних задач Коші для системи $k \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) + g(t, \varepsilon), \qquad t \in [a, b], \quad y(a, \varepsilon) = h(\varepsilon). \tag{16}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^k$ є шуканою, а матриця-функція $A(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{k \times k}$, вектор-функція $g(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^k$ і вектор $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}^k$ — заданими. Як відомо, ця задача має єдиний розв’язок для кожного фіксованого ε.

Лема 2. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі умови*:

(a) $A(\cdot, \varepsilon) \to A(\cdot, 0)$ *у* $(C^{n,\alpha})^{k \times k}$;

(b) $g(\cdot, \varepsilon) \to g(\cdot, 0)$ *у* $(C^{n,\alpha})^k$;

(c) $h(\varepsilon) \to h(0)$.

Тоді при $\varepsilon \to 0+$

$$\|y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0)\|_{n+1,\alpha} \to 0. \tag{17}$$

Це твердження є безпосереднім наслідком основної теореми із статті [9].

Доведемо спочатку теорему 3 щодо задач Коші

$$L(\varepsilon)x(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad t \in [a, b], \tag{18}$$

$$x^{(j-1)}(a, \varepsilon) = h_j(\varepsilon), \quad j \in \{1, \ldots, r\}, \tag{19}$$

де параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Єдиний розв’язок $x(\cdot, \varepsilon)$ такої задачі належить простору $(C^{n+r,\alpha})^m$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* (i), (iii) *теореми* 3 *і, крім того*,

$$h_j(\varepsilon) \to h_j(0), \quad \varepsilon \to 0+ \quad \textit{для кожного} \quad j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{20}$$

Тоді

$$\|x(\cdot, \varepsilon) - x(\cdot, 0)\|_{n+r,\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{21}$$

Доведення. При $r = 1$ лема 3 рівносильна лемі 2. Нехай $r \geq 2$. Як відомо (див., наприклад, [13], п. 2.5), крайова задача (18), (19) рівносильна задачі (16), в якій

$$A(\cdot, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m \\ -A_0(\cdot; \varepsilon) & -A_1(\cdot; \varepsilon) & -A_2(\cdot; \varepsilon) & \ldots & -A_{r-1}(\cdot; \varepsilon) \end{pmatrix} \in (C^{n,\alpha})^{rm \times rm},$$

де 0_m і I_m позначають відповідно нульову і одиничну матриці порядку m, а

$$g(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}(0, f(\cdot,\varepsilon)), \qquad h(\varepsilon) := \mathrm{col}(h_1(\varepsilon),\ldots,h_r(\varepsilon)).$$

Розв'язки цих задач пов'язані між собою співвідношенням

$$y(\cdot,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(\cdot,\varepsilon), x'(\cdot,\varepsilon)\ldots, x^{r-j}(\cdot,\varepsilon)). \tag{22}$$

При цьому умови (i), (iii) теореми 3 і умова (20) рівносильні відповідно умовам (a), (b) і (c) леми 2. Окрім того, (21) $\Leftrightarrow$ (17) за умови (22). Отже, твердження леми 3 випливає зі справедливості леми 2.

Встановимо існування і єдиність розв'язку крайової задачі (11), (12) при малих значеннях параметра ε.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (i) *і* (ii) *теореми* 3 *і припущення. Тоді для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Доведення. Розглянемо при кожному $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ і $k \in \{0,\ldots,r-1\}$ задачу Коші (7), (8), де

$$Y_k^{(r)}(\cdot) = Y_k^{(r)}(\cdot,\varepsilon), \qquad A_{r-j}(\cdot) = A_{r-j}(\cdot,\varepsilon).$$

Вона складається з m задач Коші вигляду (18), (19) з $f = 0$ відносно вектор-функцій $x(\cdot,\varepsilon)$, які є стовпцями матриці $Y_k(\cdot,\varepsilon)$. Тоді згідно з лемою 3

$$\big\|Y_k(\cdot,\varepsilon) - Y_k(\cdot,0)\big\|_{n+r,\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{23}$$

Звідси на підставі умови (ii) теореми 3 випливає збіжність при $\varepsilon \to 0+$ блочних числових матриць

$$([B_1(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\ldots[B_r(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]) \to ([B_1(0)Y_0(\cdot,0)]\ldots[B_r(0)Y_{r-1}(\cdot,0)]). \tag{24}$$

Тут гранична матриця невироджена згідно з припущенням і теоремою 2. Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det\big([B_1(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\ldots[B_r(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big) \neq 0. \tag{25}$$

Отже, за теоремою 2 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним.

Лему 4 доведено.

Розглянемо напіводнорідну крайову задачу

$$L(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \qquad B_j(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \quad j \in \{1,\ldots,r\}, \tag{26}$$

залежну від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$.

Лема 5. *Нехай виконуються умови* (i), (ii), (iv) *теореми* 3. *Тоді*

$$\big\|\upsilon(\cdot,\varepsilon) - \upsilon(\cdot,0)\big\|_{n+r,\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{27}$$

Доведення. Запишемо при кожному $\varepsilon \to 0+$ розв'язок однорідного диференціального рівняння (26) у вигляді

$$\upsilon(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon) \tag{28}$$

з довільними вектор-функціями $q_0(\varepsilon), ..., q_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, де кожна матриця-функція $Y_k(\cdot, \varepsilon)$ належить простору $(C^{n+r,\alpha})^{m\times m}$. За лемою 1 маємо

$$B_j(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r-1} B_j(\varepsilon)(Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{r-1}[B_j(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)]q_k(\varepsilon).$$

Тому друга рівність у формулі (26) рівносильна, тому що

$$\sum_{k=0}^{r-1}[B_j(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)]q_k(\varepsilon) = c_j(\varepsilon). \tag{29}$$

Рівність (29) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\big([B_1(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)]\ \ldots\ [B_r(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big)q(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) \tag{30}$$

відносно координат стовпця $q(\varepsilon) := \mathrm{col}(q_0(\varepsilon), \ldots, q_{r-1}(\varepsilon))$.

Звідси на підставі умови (iv) теореми 3 і формул (24), (25) випливає, що система (30) має єдиний розв'язок при достатньо малих ε і він задовольняє граничну умову $q(\varepsilon) \to q(0) \in \mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Із нього і співвідношення (23) отримуємо формулу (27).

Лему 5 доведено.

Доведемо тепер справедливість граничної рівності без припущення про однорідність диференціального рівняння (11). Для кожного достатньо малого $\varepsilon \geq 0$ покладемо

$$z(\cdot,\varepsilon) = y(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,\varepsilon),$$

де вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком неоднорідної крайової задачі (11), (12), а вектор-функція $x(\cdot,\varepsilon)$ — розв'язком задачі Коші (18), (19) з $h_j(\varepsilon) \equiv 0$. Тоді $z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \qquad B_j(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon), \qquad \tilde{c}(\varepsilon) := c_j(\varepsilon) - B_j(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^m.$$

На підставі зроблених припущень і леми 3 $\tilde{c}(\varepsilon) \to \tilde{c}(0)$ при $\varepsilon \to 0+$. Таким чином, у відповідності з лемою 5

$$\|z(\cdot,\varepsilon) - z(\cdot,0)\|_{n+r,\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ . \tag{31}$$

Із (21) і (31) випливає гранична властивість (5).

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных диференциальних уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198 – 209.
4. *Kodlyuk T. I. , Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
5. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.

6. *Mikhailets V. A., Chehanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
7. *Soldatov V. A.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a, b]$ // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 785 – 794.
8. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 658 – 667.
9. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. A.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2016. – **87**. – P. 1 – 16.
10. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm – Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 2. – P. 287 – 292.
11. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm – Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
12. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361 – 1378.
13. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
14. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
15. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т.3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
16. *Никольский С. М.* Математический анализ. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – 544 с.
17. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
18. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. – xii + 297 p.

Одержано 29.06.16