УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕТВЛЕНИЕМ В ЗАМЫКАНИИ ОБЛАСТИ

We study the problem of local behavior of mappings $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, in $\overline{D}$. Under certain conditions imposed on a measurable function $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$, and the boundaries of D and $D' = f(D)$, we show that a family of open discrete mappings $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ with a characteristic of quasiconformality $Q(x)$ is equicontinuous in $\overline{D}$.

Вивчається питання про локальну поведінку відображень $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, у замиканні області D. За певних умов на вимірну функцію $Q(x)$, $Q \colon D \to [0, \infty]$, і межі областей D і $D' = f(D)$ показано, що сім'я відкритих дискретних відображень $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, які мають характеристику квазіконформності $Q(x)$, одностайно неперервна в $\overline{D}$.

1. Введение. Основные определения и обозначения, встречающиеся в тексте, но не приведенные ниже, могут быть найдены в монографиях [1, 2].

В работе [3] было установлено свойство равностепенной непрерывности одного семейства пространственных отображений с неограниченной характеристикой в предположении, что все отображения рассматриваемого класса являются гомеоморфизмами. Здесь речь идет о равностепенной непрерывности в замыкании $\overline{D}$ области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а не только во внутренних точках. (По этому поводу см. также классический результат Някки и Палка для квазиконформных отображений [4].) В настоящей статье будет показано, что предположение гомеоморфности отображений в [3] может быть ослаблено до условий открытости и дискретности, при этом необходимо требовать условие замкнутости, эквивалентное свойству сохранения границы (см. [5], теорема 3.3, а также [6] и [7], лемма 1.4.7), условие, заключающееся в следующем: существует континуум $K \subset D' = f(D)$ такой, что $h(f^{-1}(K), \partial D) \geq \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$ и всех отображений f из рассматриваемого семейства (здесь и далее h — хордальное расстояние в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. раздел 12 в [8]).

Приведем теперь некоторые вспомогательные сведения, включая формулировку основных результатов. Здесь и далее

$$A(x_0, r_1, r_2) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |x - x_0| < r_2\bigr\}, \tag{1}$$

а $M_p(\Gamma)$ — p-модуль семейства кривых Γ. Введем в рассмотрение следующее понятие (см. [1], раздел 7.6, гл. 7). Пусть $p \geq 1$ и $Q \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q(x) \equiv 0$ при всех $x \notin D$. Говорят, что отображение $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in \overline{D}$ относительно p-модуля*, $x_0 \neq \infty$, если для некоторого $r_0 = r(x_0)$, произвольного сферического кольца (1) и любых континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset \bigl(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)\bigr) \cap D$ отображение f удовлетворяет соотношению

$$M_p\bigl(f\bigl(\Gamma(E_1, E_2, D)\bigr)\bigr) \leq \int\limits_A Q(x) \eta^p\bigl(|x - x_0|\bigr)\, dm(x) \tag{2}$$

для каждой измеримой функции $\eta \colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1. \tag{3}$$

В точке $x_0 = \infty$ данное определение можно переформулировать с помощью инверсии $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$, $\infty \mapsto 0$. Если $p = n$, то $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$ и f, удовлетворяющее (2), называется кольцевым Q-отображением в точке x_0.

Определение сильно достижимой границы области $D \subset \mathbb{R}^n$, используемое ниже, может быть найдено в [1] (раздел 3.8), а понятия, связанные с регулярностью метрического пространства по Альфорсу и $(1;p)$-неравенством Пуанкаре, приведены в монографии [9]. Для $p \geq 1$, фиксированных областей $D \subset \mathbb{R}^n$ и D' в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, континуума $K \subset D'$ и числа $\delta > 0$ обозначим через $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to D'$ в D' относительно p-модуля таких, что $f(D) = D'$ и $h(f^{-1}(K), \partial D) \geq \delta > 0$.

Полагаем $q_{x_0}(r) := \dfrac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS$, где dS — элемент площади поверхности S, и $q'_b(r) := \dfrac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x-b|=r} Q'(x)\, dS$, $Q'(x) = \max\{Q(x), 1\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Предположим, что область D локально связна в каждой точке $b \in \partial D$, $C(f, \partial D) \subset D'$ для каждого $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D, D')$ и область D' имеет сильно достижимую границу. Если функция Q имеет конечное среднее колебание в $\overline{D}$ либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполнено условие $\displaystyle\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q'^{\frac{1}{n-1}}_{x_0}(t)} = \infty$, то каждое из отображений $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D, D')$ имеет непрерывное продолжение в $\overline{D}$. Если, кроме того, $\operatorname{cap}(\mathbb{R}^n \setminus D') > 0$, то семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D, D')$, состоящее из всех таким образом продолженных отображений $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.*

Теорема 2. *Предположим, что $n-1 < p \leq n$, область D локально связна в каждой точке $b \in \partial D$, $C(f, \partial D) \subset D'$ для каждого $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ и область $D' \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и является n-регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре. Если функция Q имеет конечное среднее колебание в $\overline{D}$ либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполнено условие $\displaystyle\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q'^{\frac{1}{p-1}}_{x_0}(t)} = \infty$, то каждое из отображений $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$ имеет непрерывное продолжение в $\overline{D}$ и семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D, D')$, состоящее из всех таким образом продолженных отображений $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.*

2. Формулировки и доказательства основных лемм. Аналог следующего утверждения при $p = n$ установлен в [10] (лемма 1). Ниже мы сформулируем это утверждение при несколько иных условиях, связанных с регулярностью по Альфорсу и неравенством типа Пуанкаре.

Лемма 1. *Пусть $n - 1 < p \leq n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $b \in \partial D$ относительно p-модуля, $f(D) = D'$, область D локально связна в точке b, $C(f, \partial D) \subset \partial D'$, область D' ограничена и является n-регулярным по*

Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, *в котором выполнено* $(1;p)$*-неравенство Пуанкаре. Предположим, что найдутся* $\varepsilon_0 > 0$ *и некоторая неотрицательная измеримая по Лебегу функция* $\psi(t)$, $\psi\colon (0,\varepsilon_0) \to [0,\infty]$, *такая, что для всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty, \qquad I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{4}$$

и $\displaystyle\int_{A(b,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\psi^p(|x-b|)\, dm(x) = o(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0))$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $A := A(b,\varepsilon,\varepsilon_0)$ *определено в* (1). *Тогда* $C(f,b) = \{y\}$.

Доказательство. Поскольку область D' ограничена и является n-регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, то в силу предложения 4.7 [11]

$$M_p(\Gamma(C_0', F, D')) \geq \frac{1}{C}\frac{\delta}{R^{1+p-n}} > 0\,, \tag{5}$$

где $R > 0$ таково, что $D' \subset B(x_0, R)$, x_0 — некоторая фиксированная точка области D', а F и C_0' — произвольные фиксированные континуумы в D', диаметры которых не меньше δ. Условие (5) подменяет при $p \neq n$ требование сильной достижимости границы области, которое используется в доказательстве леммы 1 в [10]. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство указанной леммы.

Для доказательства теорем 1 и 2 необходимы два следующих утверждения.

Лемма 2. *Предположим, что область* D *локально связна в каждой точке* $b \in \partial D$, $C(f,\partial D) \subset D'$ *для каждого* $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')$, *а область* D' *имеет сильно достижимую границу. Предположим также, что для каждой точки* $x_0 \in \overline{D}$ *найдутся* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ *и измеримая по Лебегу функция* $\psi(t)\colon (0,\varepsilon_0) \to [0,\infty]$ *со следующим свойством: для любого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *выполнено условие* (4) *и, кроме того,*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{6}$$

где сферическое кольцо $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$ *определено, как в* (1). *Тогда каждое отображение* $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')$ *продолжается до непрерывного отображения* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$. *Если, кроме того,* $\mathrm{cap}\,(\mathbb{R}^n \setminus D') > 0$, *то семейство* $\overline{\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')}$, *состоящее из всех таким образом продолженных отображений* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D}$.

Доказательство. Равностепенная непрерывность внутри области D следует из леммы 3.6.1 [2], а возможность продолжения каждого элемента f семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')$ до непрерывного отображения в замыкании D — из леммы 1 [10].

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')$ (обозначения не меняем) равностепенно непрерывно в точках ∂D. Предположим противное, тогда найдутся $x_0 \in \partial D$ и число $a > 0$ такое, что для каждого $m = 1,2,\ldots$ существуют точка $x_m \in \overline{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')$ такие, что $|x_0 - x_m| < 1/m$ и

$$h\big(f_m(x_m), f_m(x_0)\big) \geq a. \tag{7}$$

Можно считать, что $x_0 \neq \infty$. В виду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D можем считать, что $x_m \in D$.

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\operatorname{diam} V_m \to 0$ при $m \to \infty$ такая, что множества $D \cap V_m$ являются областями и $x_m \in D \cap V_m$. Поскольку граничные точки области, локально связной на границе, являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путем (см. [1], предложение 13.2), мы можем соединить точки x_m и x_0 непрерывной кривой $\gamma_m(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_m(0) = x_0$, $\gamma_m(1) = x_m$ и $\gamma_m(t) \in V_m$ при $t \in (0,1)$. Обозначим через C_m образ кривой $\gamma_m(t)$ при отображении f_m. Из соотношения (7) следует, что

$$h(C_m) \geq a \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,, \tag{8}$$

где h — хордальный диаметр множества. Поскольку f_m сохраняет границу, точка $f_m(x_0)$ принадлежит $\partial D'$. Далее, так как $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактно, не ограничивая общности можно считать, что последовательность $f_m(x_0)$ сходится к некоторой точке $y_0 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Заметим, что если E — компакт из определения сильно достижимой границы области D', то вместо него можно использовать произвольный континуум из D' (см. [3], лемма 4.1). Таким образом, согласно определению сильно достижимой границы в точке y_0 и условию (8) найдется $b > 0$ такое, что

$$M\big(\Gamma(K, C_m, D')\big) \geq b \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \tag{9}$$

С другой стороны, рассмотрим семейство Γ_m^1, состоящее из всех максимальных поднятий $\alpha\colon [0,c) \to D$ семейства $\Gamma_m := \Gamma(K, C_m, D')$ при отображении f_m с началом в $|\gamma_m| = \big\{x \in D\colon \exists\, t\colon \gamma_m(t) = x\big\}$. Поскольку все отображения f_m являются открытыми и дискретными и, кроме того, $C(f_m, \partial D) \subset \partial D'$ при каждом $m \in \mathbb{N}$, указанное семейство максимальных поднятий существует и $\Gamma_m^1 \subset \Gamma(|\gamma_m|, f_m^{-1}(K), D)$ (см., например, лемму 3.7 в [5]). Поскольку при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ множество $|\gamma_m|$ принадлежит окрестности V_m точки x_0, где $\operatorname{diam} V_m \to 0$ при $m \to \infty$, для последовательности $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$ найдется подпоследовательность номеров m_k, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что $\gamma_{m_k} \subset B\Big(x_0, \dfrac{1}{2^k}\Big)$. Заметим, что вследствие компактности пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ при каждом фиксированном $\delta > 0$ множество $C_\delta := \{x \in D\colon h(x, \partial D) \geq \delta\}$ является компактом в D и $f_{m_k}^{-1}(K) \subset C_\delta$ при некотором $\delta > 0$ и всех натуральных k. В силу леммы 1 [12] множество C_δ можно вложить в континуум E_δ, лежащий в области D, при этом можно считать, что $\operatorname{dist}(x_0, E_\delta) \geq \varepsilon_0$ за счет уменьшения ε_0, если это необходимо. Тогда на основании (2)

$$M\big(f_{m_k}(\Gamma_{m_k}^1)\big) \leq M\big(f_{m_k}(\Gamma(|\gamma_{m_k}|, E_\delta, D))\big) \leq \int\limits_{A\left(x_0, \frac{1}{2^k}, \varepsilon_0\right)} Q(x)\eta^n\big(|x - x_0|\big)\, dm(x) \tag{10}$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon \Big(\dfrac{1}{2^k}, \varepsilon_0\Big) \to [0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{\frac{1}{2^k}}^{\varepsilon_0} \eta(r)dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(2^{-k},\varepsilon_0), & t\in(2^{-k},\varepsilon_0),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(2^{-k},\varepsilon_0)\,,\end{cases}$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\displaystyle\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1:=2^{-k}$, $r_2:=\varepsilon_0$, поэтому из условий (6) и (10) следует, что

$$M\big(f_{m_k}(\Gamma^1_{m_k})\big)\le\alpha(2^{-k})\to 0 \tag{11}$$

при $k\to\infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ — некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon\to 0$, которая существует в силу условия (6). Заметим, кроме того, что $f_{m_k}(\Gamma^1_{m_k})>\Gamma_{m_k}$ и одновременно $f_{m_k}(\Gamma^1_{m_k})\subset\Gamma_{m_k}$, так что в силу теоремы 6.2, 6.4 [8]

$$M(f_{m_k}(\Gamma^1_{m_k}))=M(\Gamma_{m_k}). \tag{12}$$

Однако соотношения (11) и (12) в совокупности противоречат (9). Полученное противоречие указывает на то, что предположение (7) было неверным, и, значит, семейство отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,n}(D,D')$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0\in\partial D$.

Лемма 3. *Предположим, что $n-1<p\le n$, область D локально связна в каждой точке $b\in\partial D$, а область $D'\subset\mathbb{R}^n$ ограничена и является n-регулярным по Альфорсу пространством относительно евклидовой метрики и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре. Предположим также, что для каждой точки $x_0\in\overline{D}$ найдутся $\varepsilon_0=\varepsilon_0(x_0)>0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t)\colon(0,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ выполнено условие (4) и, кроме того, $\displaystyle\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}Q(x)\psi^p(|x-x_0|)\,dm(x)=o\big(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)\big)$ при $\varepsilon\to 0$, где, как обычно, сферическое кольцо $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$ определено, как в (1). Тогда каждое отображение $\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D,D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{f}\colon\overline{D}\to\overline{D'}$ и семейство $\overline{\mathfrak{F}_{Q,\delta,K,p}(D,D')}$, состоящее из всех таким образом продолженных отображений $\overline{f}\colon\overline{D}\to\overline{D'}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.*

Доказательство. Схема доказательства полностью аналогична схеме доказательства леммы 2. Условие типа (9) при $p\ne n$ обеспечивается соответствующей оценкой снизу для p-модуля, которая имеет место в силу предложения 4.7 [11]. Дальнейшее доказательство идентично доказательству леммы 2.

3. Доказательство основных результатов. Утверждения теорем 1 и 2 непосредственно следуют из лемм 2, 3 и леммы 3.1 [13] (см. детали доказательства теоремы 4.2 в [13], а также лемму 2.3.1 в [2]).

4. Несколько замечаний о точности условий. Ограничимся для простоты случаем $p=n$. Прежде всего заметим, что в лемме 2 и теореме 1 нельзя, вообще говоря, отказаться от условия наличия такого континуума K, что $h\big(f^{-1}(K),\partial D\big)\ge\delta>0$, как показывает простой пример семейства отображений $f(z)=z^n$, $D=B(0,1)\subset\mathbb{C}$. Здесь указанное семейство отображений является равностепенно непрерывным в D, но не является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$, так как оно не является нормальным в этой замкнутой области. Несколько сложнее построить пример семейства $\{\mathfrak{F}\}$ кольцевых Q-отображений, являющихся открытыми, дискретными, удовлетворяющими условию $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ для каждого $f \in \{\mathfrak{F}\}$, удовлетворяющих условию $h\big(f^{-1}(K), \partial D\big) \geq \delta > 0$ для некоторого континуума K и числа $\delta > 0$, но при этом не являющегося равностепенно непрерывным. Такой пример построен в пункте 3.10 монографии [2] (см. теорему 3.10.1).

Литература

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
2. *Севостьянов Е. А.* Исследование пространственных отображений геометрическим методом. – Киев: Наук. думка, 2014.
3. *Севостьянов Е. А.* О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой // Мат. труды. – 2012. – **15**, № 1. – С. 178 – 204.
4. *Näkki R., Palka B.* Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **37**, № 2. – P. 427 – 433.
5. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. – 1976. – **11**. – P. 1 – 44.
6. *Зелинский Ю. Б.* Некоторые критерии гомеоморфизма при отображении областей евклидова пространства // Тр. VIII лет. мат. школы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 194 – 211.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**.
8. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
9. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer Sci.+Business Media, 2001.
10. *Севостьянов Е. А.* О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 6. – С. 855 – 859.
11. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 609 – 626.
12. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682 – 689.
13. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Singularities of discrete open mappings with controlled p-module // J. Anal. Math. – 2015. – **127**. – P. 303 – 328.

Получено 17.02.16,
после доработки — 17.05.16