УДК 517.5

Г. М. Власик (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА – НІКОЛЬСЬКОГО ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ З ДОВІЛЬНИМ ВИБОРОМ ГАРМОНІК

We obtain the Bernstein – Nikol'skii-type inequalities for trigonometric polynomials with an arbitrary choice of harmonics.

Получены неравенства типа Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов с произвольным выбором гармоник.

Вступ. Перед тим, як сформулювати постановку задачі та зупинитися на історії її дослідження, наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), функцій f на відрізку $[-\pi, \pi]$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Далі, нехай $\psi(\tau) \neq 0$, $\tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i\left(kx + \beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k\right)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, ч. I, с. 132]), назвемо (ψ, β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Зауважимо, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (ψ, β)-похідна функції f збігається з її (r, β)-похідною (позначення f^{r}_{β}) в сенсі Вейля – Надя.

Через Ψ позначимо множину функцій $\psi(\tau), \tau \in \mathbb{N}$, що задовольняють такі умови:

1) $\psi(\tau)$ є додатними і незростаючими;

2) існує така стала $C > 0$, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції $\frac{1}{\tau^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^\gamma(\tau+1)}{\tau^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\tau \in \mathbb{N}$, та ін.

Далі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують такі додатні сталі C_1 та C_2, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо тільки $B \leq C_2 A$ $(B \geq C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$.

Через $T(m)$ будемо позначати множину тригонометричних поліномів вигляду

$$T(m) = \left\{ t\colon t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Нехай $K_m = \{j_1, \ldots, j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел. Тоді покладемо

$$T^*(m) = \left\{ t\colon t(x) = \sum_{j \in K_m} c_j e^{ijx} \right\}.$$

Зазначимо, що у багатьох питаннях теорії наближення періодичних функцій однієї змінної важливу роль відіграють нерівності, які пов'язують норми полінома і його похідної в різних метриках (див., наприклад, [3], розділ I, § 2), а саме:

для довільного тригонометричного полінома $t \in T(m)$ та для довільних $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\|t_\beta^r\|_q \ll m^{r+1/p-1/q} \|t\|_p, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Співвідношення такого вигляду називають нерівностями Бернштейна – Нікольського, оскільки в них поєднано нерівності Бернштейна при $p = q$ з „нерівностями різних метрик" Нікольського при $r = 0$.

Згодом В. М. Темляков (див., наприклад, [4, c. 23]) встановив нерівності Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів багатьох змінних із „номерами" гармонік із так званого східчастого гіперболічного хреста.

У роботі [5] нерівності Бернштейна – Нікольського були поширені на випадок (ψ,β)-похідних тригонометричних поліномів багатьох змінних із „номерами" гармонік також зі східчастого гіперболічного хреста.

Слід зазначити, що раніше нерівності Бернштейна для поліномів $t \in T(m)$ і їх (ψ,β)-похідних, що задовольняють певні умови, були одержані О. І. Степанцем і О. К. Кушпелем [6].

У зв'язку з нерівностями Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів із множини $T(m)$ у роботах В. Є. Майорова [7, 8] було розглянуто більш загальну постановку задачі, а саме досліджувалася величина

$$\mathcal{T}_m(r,q,p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T^*(m)} \frac{\|t^{(r)}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty, \tag{1}$$

де похідна порядку $r \geq 0$ розуміється в сенсі Вейля, тобто $\beta = r$.

Пізніше порядкові оцінки величини (1) для тригонометричних поліномів багатьох змінних із „номерами" гармонік зі східчастого гіперболічного хреста були одержані Е. М. Галєєвим [9].

Основна мета цієї роботи полягає в тому, щоб встановити порядкові оцінки величин вигляду

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T^*(m)} \frac{\|t_\beta^\psi\|_q}{\|t\|_p} \tag{2}$$

при певних умовах на $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і деяких співвідношеннях між параметрами p та q.

1. Допоміжні твердження. У цьому пункті сформулюємо кілька відомих тверджень, які будуть використовуватися при доведенні отриманих результатів.

Має місце таке твердження.

Твердження А [2, ч. II, с. 115]**.** *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — *довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел. Тоді для довільного полінома* $t \in T(m)$ *справджується оцінка*

$$\|t_\beta^\psi\|_q \ll \psi^{-1}(m)\|t\|_q.$$

Теорема А (див., наприклад, [10, с. 159])**.** *Нехай* t *належить* $T(m)$. *Тоді при* $1 \leq p \leq q \leq$ $\leq \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_q \ll m^{1/p-1/q}\|t\|_p.$$

Це співвідношення є частковим випадком нерівності, одержаної у багатовимірному випадку С. М. Нікольським, яка отримала назву „нерівність різних метрик". Зауважимо, що в одновимірному випадку і при $q = \infty$ відповідну нерівність встановив Джексон [11].

Теорема Б (Марцинкевича) [12, с. 346]**.** *Нехай задано послідовність* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, *що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \leq C_3,\ n \in \mathbb{Z}$;

2) $\sum_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^\nu - 1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \leq C_3,\ \nu \in \mathbb{N}$.

Тоді якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \in L_q, \quad 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx} \in L_q$$

і існує така стала $C_4(q)$, *що*

$$\|F\|_q \leq C_4(q)C_3\|f\|_q.$$

Теорема В (Хаусдорфа – Юнга, див., наприклад, [12, с. 154])**.** *Нехай* $1 < q \leq 2$ *і* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} =$ $= 1$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L_q$

$$\|f\|_q \geq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^{q'}\right)^{1/q'}.$$

Якщо послідовність $\{c_k\}$ *є такою, що*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^q < \infty,$$

то існує функція $f \in L_{q'}$, *для якої* $\hat{f}(k) = c_k$ *і*

$$\|f\|_{q'} \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^q \right)^{1/q}.$$

2. Основні результати. Спочатку розглянемо частковий випадок величини (2), а саме встановимо порядкові оцінки величини

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t_\beta^\psi\|_q}{\|t\|_p}$$

для певних співвідношень між параметрами p та q.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, *— додатна та незростаюча послідовність і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджуються співвідношення*

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t_\beta^\psi\|_q}{\|t\|_q} \asymp \psi^{-1}(m), \quad 1 < q < \infty, \tag{3}$$

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t_\beta^\psi\|_q}{\|t\|_p} \ll \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}, \quad 1 < p < q < \infty. \tag{4}$$

Якщо ж, крім цього, $\psi(\tau) \in \Psi$, *то*

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t_\beta^\psi\|_q}{\|t\|_p} \asymp \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}, \quad 1 < p < q < \infty. \tag{5}$$

Доведення. Оцінки зверху у співвідношенні (3) встановлено у твердженні A. Оцінка (4) є наслідком оцінки зверху в (3) і теореми A:

$$\|t_\beta^\psi\|_q \ll \psi^{-1}(m)\|t\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q} \|t\|_p.$$

Тепер перейдемо до встановлення відповідних оцінок знизу. Для цього наведемо приклади поліномів, для яких реалізуються оцінки знизу у співвідношеннях (3) і (5).

Нехай спочатку $p = q$ і $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — додатна і незростаюча послідовність. Тоді розглянемо поліном

$$\bar{t}(x) = \sin mx.$$

Згідно з означенням (ψ, β)-похідної для полінома $\bar{t}$ маємо

$$\bar{t}_\beta^\psi(x) = \psi^{-1}(m) \sin\left(mx + \beta\,\frac{\pi}{2}\right)$$

і відповідно

$$\|\bar{t}_\beta^\psi\|_q = \psi^{-1}(m) \left\|\sin\left(mx + \beta\,\frac{\pi}{2}\right)\right\|_q = \psi^{-1}(m)\|\bar{t}\|_q.$$

Нехай тепер $p < q$. У цьому випадку по заданому m виберемо $\tilde{s}$ так, щоб $2^{\tilde{s}-1} \le m \le 2^{\tilde{s}}$. Розглянемо поліном

$$\tilde{t}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \rho(\tilde{s})} e^{i\left(kx - \beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k\right)},$$

де $\rho(\tilde{s}) = \{k \colon 2^{\tilde{s}-1} \le |k| < 2^{\tilde{s}}\}$. Тоді згідно з означенням (ψ, β)-похідної для полінома $\tilde{t}$ можемо записати

$$\tilde{t}^{\psi}_{\beta}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \rho(\tilde{s})} \psi^{-1}(|k|) e^{ikx} = \sum_{k \in \rho^{+}(\tilde{s})} \psi^{-1}(k) \cos kx,$$

де $\rho^{+}(\tilde{s}) = \{k \colon 2^{\tilde{s}-1} \le k < 2^{\tilde{s}}\}$.

Далі розглянемо поліном вигляду

$$\tilde{t}^{*}(x) = \sum_{k \in \rho^{+}(\tilde{s})} \psi^{-1}(2^{\tilde{s}}) \cos kx,$$

який отримується при дії оператора $\Lambda_{\tilde{s}}$, породженого послідовністю

$$\{\lambda_{k,\tilde{s}}\} = \left\{ \frac{\psi(k)}{\psi(2^{\tilde{s}})} \right\}, \quad k \in \rho^{+}(\tilde{s}),$$

на поліном $\tilde{t}^{\psi}_{\beta}$, тобто

$$\tilde{t}^{*}(x) = \Lambda_{\tilde{s}} \tilde{t}^{\psi}_{\beta}(x). \tag{6}$$

Легко переконатися, що числа $\{\lambda_{k,\tilde{s}}\}$ є множниками Марцинкевича, тобто вони задовольняють умови 1 і 2 теореми Б.

Дійсно, оскільки $\psi \in \Psi$ і $k \in \rho^{+}(\tilde{s})$, то:

1) $|\lambda_{k,\tilde{s}}| = \left| \dfrac{\psi(k)}{\psi(2^{\tilde{s}})} \right| \le \dfrac{\psi(2^{\tilde{s}-1})}{\psi(2^{\tilde{s}})} \le C_5$,

2) $\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} |\lambda_{k,\tilde{s}} - \lambda_{k+1,\tilde{s}}| = \sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} \left| \dfrac{\psi(k)}{\psi(2^{\tilde{s}})} - \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(2^{\tilde{s}})} \right| \le \dfrac{1}{\psi(2^{\tilde{s}})} \sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} (\psi(k) - -\psi(k+1)) \le \dfrac{1}{\psi(2^{\tilde{s}})} \left(\psi(2^{\tilde{s}-1}) - \psi(2^{\tilde{s}})\right) \le \dfrac{\psi(2^{\tilde{s}-1})}{\psi(2^{\tilde{s}})} \le C_5$.

Тоді згідно з теоремою Б має місце оцінка

$$\left\| \Lambda_{\tilde{s}} \tilde{t}^{\psi}_{\beta} \right\|_{q} \ll \left\| \tilde{t}^{\psi}_{\beta} \right\|_{q} \tag{7}$$

і тому, співставивши співвідношення (6) і (7), отримаємо

$$\left\| \tilde{t}^{\psi}_{\beta} \right\|_{q} \gg \left\| \tilde{t}^{*} \right\|_{q}. \tag{8}$$

Таким чином, для $\|\tilde{t}^{*}\|_{q}$ можемо записати

$$\left\| \tilde{t}^{*} \right\|_{q} = \psi^{-1}(2^{\tilde{s}}) \left\| \sum_{k \in \rho^{+}(\tilde{s})} \cos kx \right\|_{q} = \psi^{-1}(2^{\tilde{s}}) \left\| \sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} \cos kx \right\|_{q}.$$

Далі, скористаємося співвідношенням (див., наприклад [2, ч. II, с. 42])

$$\left\|\sum_{k=m}^{l}\cos kt\right\|_q \asymp (l-m)^{1-1/q},$$

$m, l \in \mathbb{N},\ l > m$ і $1 < q < \infty$, згідно з яким можемо записати

$$\left\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\right\|_q \asymp 2^{(\tilde{s}-1)(1-1/q)} \asymp 2^{\tilde{s}(1-1/q)}.$$

Відповідно для $\|\tilde{t}^*\|_q$ отримаємо оцінку

$$\|\tilde{t}^*\|_q \asymp \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})2^{\tilde{s}(1-1/q)}. \tag{9}$$

Таким чином, співставивши (8) і (9) та врахувавши, що $\psi(2^{\tilde{s}}) \asymp \psi(m)$ (оскільки $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, і $2^{\tilde{s}-1} \le m \le 2^{\tilde{s}}$), будемо мати

$$\|\tilde{t}_\beta^\psi\|_q \gg \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})2^{\tilde{s}(1-1/q)} \asymp \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})2^{\tilde{s}(1-1/q)}2^{-\tilde{s}(1-1/p)}\left\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\right\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}\left\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\right\|_p = \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}\|\tilde{t}\|_p.$$

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку, коли $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ \beta = r,\ 1 < p \le q < \infty$, порядки відповідних величин встановлені В. М. Темляковим (див., наприклад, [4, с. 23]).

Далі сформулюємо і доведемо твердження, у яких встановлюються порядкові оцінки величин $\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p)$ при $2 \le p \le q < \infty$ і $1 < q \le p < \infty$.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p \le q < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — *додатна і незростаюча послідовність,* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджується оцінка*

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \ll \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}.$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$ *не зростає, то*

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \asymp \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 1.

Доведемо оцінку знизу. Нехай $K_m = \{j_1, \ldots, j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел і $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$ — кількість елементів даного набору, які потрапляють до множини $\rho(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Зрозуміло, що у подальших міркуваннях ми розглядаємо лише ті $s \in \mathbb{Z}_+$, для яких $K_m \cap \rho(s) \ne \varnothing$, і тому кількість таких s є скінченною.

Розглянемо поліном вигляду

$$f_{s,m}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx}$$

і покажемо, що виконується співвідношення

$$\left\|(f_{s,m})^{\psi}_{\beta}\right\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)\|f_{s,m}\|_q.$$

З цією метою для $s \in \mathbb{Z}_+$ розглянемо послідовність $\{\lambda_{l,s}\}$, яка задається формулою

$$\{\lambda_{l,s}\} = \left\{\frac{\psi(|l|)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l}\right\}, \quad l \in K_m \cap \rho(s).$$

Переконаємося, що послідовність $\{\lambda_{l,s}\}$ задовольняє умови 1 та 2 теореми Б. Зауважимо, що для цього достатньо перевірити виконання цих умов для таких додатних l, що $l \in K_m \cap \rho(s)$.

Оскільки $\psi \in \Psi$, то:

1) $|\lambda_{l,s}| = \left|\dfrac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right| \le \dfrac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \le C_6$,

2) $\sum_{l=2^{s-1}}^{2^s-1} |\lambda_{l,s} - \lambda_{l+1,s}| = \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} |\lambda_{l,s} - \lambda_{l+1,s}| = \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \left|\dfrac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}} - \right.$ $\left. -\dfrac{\psi(l+1)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right| \le \dfrac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} (\psi(l) - \psi(l+1)) \le \dfrac{1}{\psi(2^s)}\, (\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)) \le \dfrac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \le$ $\le C_6$.

Тепер подіємо мультиплікатором $\Lambda_{l,s}$, який задається послідовністю $\{\lambda_{l,s}\}$, на поліном

$$\left(f^*_{s,m}\right)^{\psi}_{\beta}(x) = \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(|l|) e^{i\beta\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l} e^{ilx}.$$

В результаті одержимо

$$\Lambda_{l,s}\left(f^*_{s,m}\right)^{\psi}_{\beta}(x) = \Lambda_{l,s} \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(|l|) e^{i\beta\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l} e^{ilx} =$$

$$= \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \frac{\psi(|l|)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l} \psi^{-1}(|l|) e^{i\beta\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l} e^{ilx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} e^{ilx} = \frac{1}{\psi(2^s)}\, f_{s,m}(x).$$

Звідси маємо

$$\left\|\Lambda_{l,s}\left(f^*_{s,m}\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)}\, \|f_{s,m}\|_q\,. \tag{10}$$

З іншого боку, згідно з теоремою Б

$$\left\|\Lambda_{l,s}\left(f^*_{s,m}\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_q = \left\|\Lambda_{l,s} \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(|l|) e^{i\beta\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l} e^{ilx}\right\|_q \le$$

$$\le C_7 \left\|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(|l|) e^{i\beta\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} l} e^{ilx}\right\|_q = C_7 \left\|(f_{s,m})^{\psi}_{\beta}\right\|_q. \tag{11}$$

Отже, співставляючи (10) і (11), отримуємо потрібне співвідношення

$$\|(f_{s,m})^{\psi}_{\beta}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)\|f_{s,m}\|_q. \tag{12}$$

Далі, на підставі теореми A можемо записати

$$\psi^{-1}(2^s)\|f_{s,m}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}\|f_{s,m}\|_\infty = \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s. \tag{13}$$

Тоді з (12) і (13) маємо

$$\left\|(f_{s,m})^{\psi}_{\beta}\right\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s. \tag{14}$$

З іншого боку, за теоремою B при $2 \le p < \infty$

$$\|f_{s,m}\|_p \ll \left(\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} |\hat{f}_{s,m}|^{p'}\right)^{1/p'} = m_s^{1/p'} = m_s^{1-1/p}. \tag{15}$$

Тому згідно з (14) і (15) будемо мати

$$\sup_{f\in T^*(m)} \frac{\|f^{\psi}_{\beta}\|_q}{\|f\|_p} \ge \sup_{\substack{f\in T^*(m)\cap T(\rho(s)),\\ s\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\|f^{\psi}_{\beta}\|_q}{\|f\|_p} \ge \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|(f_{s,m})^{\psi}_{\beta}\|_q}{\|f_{s,m}\|_p} \gg$$

$$\gg \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s}{m_s^{1-1/p}} = \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s^{1/p}, \tag{16}$$

де $T(\rho(s)) = \left\{t\colon t(x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{ikx}\right\}$.

Позначимо

$$I = \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s^{1/p}, \tag{17}$$

де $m_s \le 2^s$ і

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} m_s = m.$$

Виберемо $\mu > 0$ так, щоб $2^{\mu-1} \le m < 2^\mu$ і

$$\sum_{s\le\mu} m_s \le \sum_{s\le\mu} 2^s \le C_8 2^\mu \le \frac{m}{2}.$$

У такому випадку повинно виконуватися співвідношення

$$\sum_{s>\mu} m_s \ge C_9\,\frac{m}{2}. \tag{18}$$

Крім цього, безпосередньо з (17) випливає, що для будь-якого $s \in \mathbb{Z}_+,\ K_m \cap \rho(s) \ne \varnothing$

$$m_s \le I^p \psi^p(2^s)2^{sp/q}, \tag{19}$$

і тому, згідно з (18) і (19), оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, отримуємо

$$\frac{m}{2} \ll \sum_{s>\mu} m_s \le I^p \sum_{s>\mu} \psi^p(2^s) 2^{sp/q} =$$

$$= I^p \sum_{s>\mu} \psi^p(2^s) 2^{sp/q} 2^{s\varepsilon p} 2^{-s\varepsilon p} \ll I^p \psi^p(2^\mu) 2^{\mu p/q} 2^{\mu\varepsilon p} \sum_{s>\mu} 2^{-s\varepsilon p} \ll$$

$$\ll I^p \psi^p(2^\mu) 2^{\mu p/q} 2^{\mu\varepsilon p} 2^{-\mu\varepsilon p} = I^p \psi^p(2^\mu) 2^{\mu p/q}. \tag{20}$$

З (20) знаходимо

$$I \gg \psi^{-1}(2^\mu) 2^{-\mu/q} m^{1/p}$$

і, враховуючи, що $2^{\mu-1} \le m < 2^\mu$, одержуємо

$$I \gg \psi^{-1}(m) m^{-1/q} m^{1/p} = \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}. \tag{21}$$

Таким чином, співставляючи (16), (17) і (21), приходимо до шуканої оцінки знизу

$$\sup_{f \in T^*(m)} \frac{\|f_\beta^\psi\|_q}{\|f\|_p} \gg \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $1 < q \le p < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — *додатна і незростаюча послідовність,* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджується оцінка*

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \ll \psi^{-1}(m).$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathcal{T}_m(\psi, \beta, q, p) \asymp \psi^{-1}(m).$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 1.

Доведемо оцінку знизу. Нехай, як і вище, $K_m = \{j_1, \ldots, j_m\}$ — довільний набір різних цілих чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$ — кількість елементів даного набору, які потрапляють до множини $\rho(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Позначимо

$$\overline{K}_m = K_m \cap (\mathring{\mathbb{Z}} \backslash K),$$

де

$$K = \{\rho(s), s \le \mu\},$$

а величину μ вибрано з умови

$$|K| = \sum_{s \le \mu} 2^s \le C_{10} 2^\mu \le \frac{m}{2}$$

і $2^{\mu-1} \le m < 2^\mu$. Тоді

$$|K| \asymp m,$$

де $|K|$ — кількість елементів множини K. Оскільки

$$\sum_{s>\mu} m_s \geq C_{11}\frac{m}{2},$$

то

$$|\overline{K}_m| \asymp m.$$

Нехай l — довільне число з множини $\overline{K}_m$. Тоді можемо записати

$$\sup_{f\in T^*(m)} \frac{\|f_\beta^\psi\|_q}{\|f\|_p} \geq \frac{\|(e^{ilx})_\beta^\psi\|_q}{\|e^{ilx}\|_p}. \tag{22}$$

Оскільки

$$\|(e^{ilx})_\beta^\psi\|_q \asymp \psi^{-1}(|l|)\|e^{ilx}\|_q, \tag{23}$$

то, враховуючи, що $l \in \rho(s)$ при деякому $s > \mu$ і $2^{\mu-1} \leq m < 2^\mu$, для правої частини співвідношення (23) отримуємо

$$\psi^{-1}(|l|)\|e^{ilx}\|_q > \psi^{-1}(2^s)\|e^{ilx}\|_q > \psi^{-1}(2^\mu)\|e^{ilx}\|_q \asymp \psi^{-1}(m)\|e^{ilx}\|_q.$$

Тому, продовжуючи (22), маємо

$$\frac{\|(e^{ilx})_\beta^\psi\|_q}{\|e^{ilx}\|_p} \gg \frac{\psi^{-1}(m)\|e^{ilx}\|_q}{\|e^{ilx}\|_p} \asymp \psi^{-1}(m).$$

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 2.** Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $\beta = r$, то відповідні результати до теорем 2, 3 було встановлено у роботі [8].

Література

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Ч. I. – 427 с.; Ч. II. – 468 с.
3. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**, № 2. – С. 3 – 113.
5. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L_{\beta,p}^\psi$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
6. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
7. *Майоров В. Е.* Об одной модификации неравенства Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. – 1981. – **258**, № 1. – С. 23 – 26.
8. *Майоров В. Е.* Неравенства Бернштейна – Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 6. – С. 55 – 61.
9. *Галеев Э. М.* Неравенства Бернштейна – Никольского для функций нескольких переменных, наилучших по выбору гармоник // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. – 1992. – **6**. – С. 3 – 6.
10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
11. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**, № 12. – P. 889 – 906.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.

Одержано 06.07.16