УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ТИПА РЕМЕЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ

We prove a sharp Remez-type inequality of various metrics

$$\|x\|_q \leq \|\varphi_r\|_q \left\{ \frac{\|x\|_{L_p([0,2\pi]\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p([0,2\pi]\setminus B_1)}} \right\}^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \ \ q > p > 0, \ \ \alpha = (r + 1/q)/(r + 1/p),$$

for 2π-periodic functions $x \in L^r_\infty$ satisfying the condition

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \ \|x\|_p, \tag{$*$}$$

where

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : [a,b] \subset [0, 2\pi], \ |x(t)| > 0, \ t \in (a,b) \right\},$$

$B \subset [0, 2\pi], \ \mu B \leq \beta/\lambda$ (λ is chosen so that $\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}$), φ_r is the ideal Euler's spline of order r, and

$$B_1 := \left[\frac{-\pi - \beta/2}{2}, \frac{-\pi + \beta/2}{2} \right] \bigcup \left[\frac{\pi - \beta/2}{2}, \frac{\pi + \beta/2}{2} \right].$$

As a special case, we establish sharp Remez-type inequalities of various metrics for trigonometric polynomials and polynomial splines satisfying the condition $(*)$.

Доведено непокращувану нерівність різних метрик типу Ремеза

$$\|x\|_q \leq \|\varphi_r\|_q \left\{ \frac{\|x\|_{L_p([0,2\pi]\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p([0,2\pi]\setminus B_1)}} \right\}^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \ \ q > p > 0, \ \ \alpha = (r + 1/q)/(r + 1/p),$$

для періодичних функцій $x \in L^r_\infty$, що задовольняють умову

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \ \|x\|_p, \tag{$*$}$$

де

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : [a,b] \subset [0, 2\pi], \ |x(t)| > 0, \ t \in (a,b) \right\},$$

$B \subset [0, 2\pi], \ \mu B \leq \beta/\lambda$ (λ вибрано так, що $\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}$), φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку r, а

$$B_1 := \left[\frac{-\pi - \beta/2}{2}, \frac{-\pi + \beta/2}{2} \right] \bigcup \left[\frac{\pi - \beta/2}{2}, \frac{\pi + \beta/2}{2} \right].$$

Як наслідок отримано точні нерівності різних метрик типу Ремеза для тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів, що задовольняють умову $(*)$.

1. Введение. Пусть G — некоторое измеримое подмножество числовой оси, а $L_p(G)$ — пространство таких измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x\,(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t \in G} |x\,(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Через I_d обозначим окружность, реализованную в виде отрезка $[0, d]$ с отождествленными концами. Вместо $\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}$ будем писать для краткости $\|x\|_p$.

Для $r \in \mathbf{N}$, $G = \mathbf{R}$ или $G = I_d$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство всех функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. Для любой функции $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, имеющей нули, выполняется точное на классе $L^r_\infty(I_{2\pi})$ неравенство*

$$\|x\|_q \le \sup_{c\in[0,K_r]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{1.1}$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$, $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$.

В этой же работе показано, что на классах функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, имеющих нули и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, супремум в определении точной константы в неравенстве (1.1) достигается при $c = 0$. В частности, для функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, удовлетворяющих условию $\|x_+\|_p = \|x_-\|_p$ (где $x_\pm := \max\{\pm\, x, 0\}$), выполняется точное неравенство

$$\|x\|_q \le \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}, \qquad q > p > 0. \tag{1.2}$$

Пусть $L(x)_p$ — локальная „норма” функции $x \in L_p(I_d)$, определяемая равенством [2]

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : [a,b] \subset I_d,\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}. \tag{1.3}$$

В работе [3] доказано, что если функция $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ удовлетворяет условию

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}}\, \|x\|_p, \tag{1.4}$$

то для нее выполняется неравенство (1.2).

Отметим, что условие (1.4), в частности, выполнено для функций $x \in L_p(I_{2\pi})$, удовлетворяющих одному из условий $\|x_+\|_p = \|x_-\|_p$ или $L(x_+)_p = L(x_-)_p$.

В настоящей работе неравенство (1.2) обобщено в двух направлениях. Во-первых, оно распространено на классы функций с заданной функцией сравнения. Во-вторых, в этих обобщениях содержится „эффект Ремеза”. Приведем необходимые определения.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, если

$$\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \|f\|_{L_\infty(\mathbf{R})},$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta)$, где $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, следует неравенство $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она имеет такие свойства: φ является четной относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ — выпуклой вверх на $[0,\omega]$ и строго монотонной на $[0,\omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L^1_\infty(I_d)$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [4, 5]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы

$$\left\{x \in L^r_\infty(I_d) \colon \|x\|_\infty \le A_0, \;\; \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r\right\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$).

В теории приближения важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n,\beta)\, \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.5}$$

на классе T_n, где B — произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$.

Начало этой тематике положила работа Е. Ремеза [6], в которой найдена точная константа в неравенстве вида (1.5) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Точная константа в неравенстве (1.5) для тригонометрических полиномов неизвестна. В ряде работ получены двусторонние оценки для точных констант $C(n,\beta)$. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n,\beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [7] и $\beta \to 0$ [8]. Библиографию работ по данной тематике можно найти в [7 – 10]. В работе [8] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{n\beta}{4m}\right) \|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.6}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (1.6) достигается для полинома $T(t) = \cos nx + \dfrac{1}{2}(1 - \cos\beta/2)$. Этот результат был обобщен в [11], где для любой d-периодической функции $x \in S_\varphi(\omega)$ (φ — заданная функция сравнения) и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказано неравенство

$$\|x\|_\infty \le \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)},$$

которое является точным на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращается в равенство для функции

$$x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right).$$

В настоящей работе для d-периодических функций $x \in S_\varphi(\omega)$, удовлетворяющих условию

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}, \qquad p > 0, \tag{1.7}$$

и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, доказано точное неравенство разных метрик типа Ремеза (теорема 3.1)

$$\|x\|_{L_q(I_d)} \le \|\varphi\|_{L_q(I_{2\omega})} \frac{\|x\|_{L_p(I_d\setminus B)}}{\|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_1)}}, \qquad q > p > 0,$$

где $B_1 := \left[\frac{-\omega-\beta/2}{2}, \frac{-\omega+\beta/2}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\omega-\beta/2}{2}, \frac{\omega+\beta/2}{2}\right]$, которое обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi(t)$ и множества $B = B_1$. Как следствие получены неравенства разных метрик типа Ремеза для функций соболевских классов $L^r_\infty(I_{2\pi})$ (теорема 4.1), для тригонометрических полиномов (теорема 5.1) и периодических полиномиальных сплайнов (теорема 6.1), удовлетворяющих условию (1.7). При этом неравенство (1.2) является следствием теоремы 4.1.

2. Вспомогательные сведения. Для $x \in L_p(I_d)$ положим

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : [a,b] \subset I_d,\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}. \tag{2.1}$$

Пусть $f \in L_1[a,b]$. Через $r(f,t)$, $t \in [0, b-a]$, обозначим перестановку функции $|f|$ (см., например, [12], § 1.3) и положим $r(f,t) = 0$ для $t > b-a$.

Лемма 2.1. *Пусть $p > 0$, φ — S-функция с периодом 2ω. Если d-периодическая функция $x \in S_\varphi(\omega)$ такова, что*

$$\|x\|_{L_p(I_d)} = \|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega})}, \tag{2.2}$$

и удовлетворяет условию

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}, \tag{2.3}$$

то для любого $q \ge p$

$$L(x)_q \le L(\varphi)_q. \tag{2.4}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in S_\varphi(\omega)$, удовлетворяющую условиям леммы 2.1. Поскольку $L(\varphi)_p = 2^{-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L_p(I_d)}$, то из (2.2) и (2.3) следует, что

$$L(x)_p \le L(\varphi)_p. \tag{2.5}$$

Пусть $[a,b]$ — отрезок, реализующий супремум величины $L(x)_q$ в определении (2.1). Вследствие непрерывности функции x выполнено равенство $x(a) = x(b) = 0$. Поэтому для любого $y \in (0, \|x\|_\infty)$ существуют точки

$$t_i \in [a,b], \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad m \ge 2, \qquad y_j \in [0,\omega], \qquad j = 1, 2,$$

такие, что

$$y = |x(t_i)| = |\varphi(y_j)|.$$

Так как φ является функцией сравнения для x, то

$$|x'(t_i)| \le |\varphi'(y_j)|.$$

Пусть $\overline{x}$ — сужение функции $|x|$ на $[a,b]$, а $\overline{\varphi}$ — сужение $|\varphi|$ на $[0,\omega]$. Покажем, что если точки $\theta_1 \in [0, b-a]$ и $\theta_2 \in [0,\omega]$ выбраны так, что

$$y = r(\overline{x}, \theta_1) = r(\overline{\varphi}, \theta_2),$$

то

$$|r'(\overline{x}, \theta_1)| \le |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

Действительно, это непосредственно следует из теоремы о производной перестановки (см., например, [12], предложение 1.3.2), в силу которой

$$|r'(\overline{x}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |x'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\varphi'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

Учитывая также неравенство

$$r(\overline{x}, 0) \le \|x\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty = r(\overline{\varphi}, 0),$$

вытекающее из определения функции сравнения и того факта, что перестановка сохраняет L_∞-норму, заключаем, что разность $\Delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое справедливо и для разности $\Delta_p(t) := r^p(\overline{x}, t) - r^p(\overline{\varphi}, t)$. Покажем, что

$$\int_0^\xi r^p(\overline{x}, t)dt \le \int_0^\xi r^p(\overline{\varphi}, t)dt, \qquad \xi > 0. \tag{2.6}$$

Положим $I(\xi) := \int_0^\xi \Delta_p(t)dt$ и $M = \max\{b - a, \omega\}$. Тогда $I(0) = 0$ и, так как перестановка сохраняет L_p-норму, в силу (2.5)

$$I(M) \le L(x)_p - L(\varphi)_p \le 0.$$

Кроме того, $I'(\xi) = \Delta_p(\xi)$ меняет знак (с минуса на плюс) не более одного раза. Следовательно, $I(\xi) \le 0$, $\xi > 0$, что равносильно (2.6). Из (2.6) в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [12], теорема 1.3.1) следует неравенство (2.4).

Лемма 2.1 доказана.

Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Для $p, \Delta > 0$ и $x \in L_p(I_d)$ определим величину

$$\|x\|_{p,\Delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} \colon [a,b] \subset I_d,\ \ 0 < b - a \le \Delta\}. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2 (см. лемму 1 в [3]). *Если функция x непрерывна на $\mathbf{R}$, а супремум в определении* (2.7) *реализуется на отрезке $[a, b]$, то*

$$|x(a)| = |x(b)|.$$

Лемма 2.3. *Пусть $p > 0$, φ — S-функция с периодом 2ω. Если d-периодическая функция $x \in S_\varphi(\omega)$ такова, что*

$$\|x\|_{L_p(I_d)} = \|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega})}, \tag{2.8}$$

и удовлетворяет условию

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}, \tag{2.9}$$

а число Δ выбрано так, что

$$\|x\|_{p,\Delta} = 2^{-\frac{1}{p}} \, \|x\|_{L_p(I_d)}\,, \tag{2.10}$$

то

$$\omega \le \Delta \le \frac{d}{2}\,. \tag{2.11}$$

Доказательство. Заметим, что второе из неравенств (2.11) ($\Delta \le d/2$) непосредственно следует из условия (2.10) в силу определения (2.7) величины $\|x\|_{p,\Delta}$.

Докажем первое из неравенств (2.11). Предположим противное, т. е. пусть $\Delta < \omega$. Через $[a,b]$ обозначим отрезок, на котором реализуется супремум величины $\|x\|_{p,\Delta}$ в определении (2.7). Рассмотрим два случая: 1) $x(t) \ne 0$ для $t \in [a,b]$; 2) существует $c \in [a,b]$ такое, что $x(c) = 0$. В первом случае вследствие непрерывности функции $x(t)$ найдутся такие α и β, что $\alpha < a < b < \beta$, причем $x(t) \ne 0$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда, принимая во внимание определение (2.1) величины $L(x)_p$ и равенство (2.10), получаем

$$L(x)_p \ge \|x\|_{L_p[\alpha,\beta]} > \|x\|_{L_p[a,b]} = \|x\|_{p,\Delta} = 2^{-\frac{1}{p}} \, \|x\|_p,$$

что противоречит условию (2.9).

Рассмотрим теперь второй случай: существует $c \in [a,b]$ такое, что $x(c) = 0$. Если $c = a$ или $c = b$, то по лемме 2.2 $x(a) = x(b) = 0$. Так как по предположению $b - a < \omega$, то существует такой сдвиг функции $\varphi(\cdot + \tau)$, что $[a,b] \subset [\alpha, \alpha + \omega]$, где α — некоторый нуль $\varphi(\cdot + \tau)$. А поскольку φ является функцией сравнения для x, то

$$|x(t)| \le \varphi(t + \tau), \qquad t \in [a,b]\,.$$

Отсюда в силу предположения $b - a < \omega$ получаем

$$\|x\|_{p,\Delta} = \|x\|_{L_p[a,b]} \le \|\varphi(\cdot + \tau)\|_{L_p[a,b]} < L(\varphi(\cdot + \tau))_p = L(\varphi)_p,$$

что противоречит условиям (2.8) и (2.10), из которых следует, что $\|x\|_{p,\Delta} = L(\varphi)_p$.

Пусть теперь в рассматриваемом случае $c \in (a,b)$. Переходя, если нужно, к сдвигу функции φ, можно считать, что $\varphi(c) = 0$. Через x_1 обозначим сужение функции x на отрезок $[a,c]$, а через x_2 — сужение x на отрезок $[c,b]$. Пусть далее $\tilde{x}_1(t) := x_1(t - \omega)$. Ясно, что

$$\|x\|^p_{L_p[a,b]} = \|x_1\|^p_{L_p[a,c]} + \|x_2\|^p_{L_p[c,b]}$$

и

$$\|x_1\|^p_{L_p[a,c]} = \|\tilde{x}_1\|^p_{L_p[a+\omega,\, c+\omega]}.$$

Кроме того, поскольку φ является функцией сравнения для x и $|x(a)| = |x(b)|$ по лемме 2.2, то выполнены неравенства

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\varphi(t)|, \qquad t \in [a+\omega, c+\omega],$$

и

$$|x_2(t)| \leq |\varphi(t)|, \qquad t \in [c, b].$$

Из этих неравенств в силу предположения $b < a + \omega$ следует, что

$$\|x\|^p_{p,\Delta} = \|x\|^p_{L_p[a,b]} \leq \|\varphi\|^p_{L_p[c,b]} + \|\varphi\|^p_{L_p[a+\omega,\, c+\omega]} < \|\varphi\|^p_{L_p[c,\, c+\omega]} = L(\varphi)^p_p.$$

Это противоречит равенству $\|x\|_{p,\Delta} = L(\varphi)_p$, вытекающему из условий (2.8) и (2.10). Тем самым неравенство $\Delta \geq \omega$, а вместе с ним и лемма 2.3 доказаны.

Лемма 2.4. *Пусть* $p > 0$, φ — S*-функция с периодом* 2ω*. Если* d*-периодическая функция* $x \in S_\varphi(\omega)$ *такова, что*

$$\|x\|_{L_p(I_d)} = \|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega})}, \tag{2.12}$$

и удовлетворяет условию

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}, \tag{2.13}$$

то

$$\int\limits_0^\xi r^p(x,t)dt \leq \int\limits_0^\xi r^p(\varphi,t)dt, \qquad \xi > 0. \tag{2.14}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in S_\varphi(\omega)$, удовлетворяющую условиям леммы 2.4. Выберем $\Delta > 0$, как в условии леммы 2.3, т. е. так, чтобы выполнялось равенство

$$\|x\|_{p,\Delta} = 2^{-\frac{1}{p}}\; \|x\|_{L_p(I_d)}\,. \tag{2.15}$$

Тогда выполнены все условия леммы 2.3. В силу этой леммы

$$\omega \leq \Delta \leq \frac{d}{2}\,. \tag{2.16}$$

Отметим, что из (2.15) и (2.12) в силу равенства $L(\varphi)_p = 2^{-1/p}\|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega})}$ следует, что

$$\|x\|_{p,\Delta} = L(\varphi)_p\,. \tag{2.17}$$

Пусть далее $[a,b]$ — отрезок, на котором реализуется супремум величины $\|x\|_{p,\Delta}$ в определении (2.7). Через x_1 обозначим сужение функции x на $[a,b]$, а через x_2 — сужение функции x на $[b, a+d]$. Положим $a_1 = a+d$. Вследствие леммы 2.2 и d-периодичности функции x выполнены равенства

$$|x_1(a)| = |x_1(b)| = |x_2(b)| = |x_2(a_1)|. \tag{2.18}$$

При этом из (2.15) и (2.12) вытекают равенства

$$\|x_1\|_{L_p[a,\, b]} = \|x_2\|_{L_p[b,\, a_1]} = L(\varphi)_p\,. \tag{2.19}$$

Следовательно, в силу (2.16) и (2.7) выполнены неравенства

$$b - a \geq \omega, \qquad a_1 - b \geq \omega. \tag{2.20}$$

Положим $\mu_1 = b - a,\ \mu_2 = a_1 - b$. Через $r(x_k, t),\ t \in [0, \mu_k]$, обозначим убывающую перестановку функции $|x_k|$ и положим $r(x_k, t) = 0$ для $t > \mu_k,\ k = 1, 2$. Пусть далее $\overline{\varphi}$ — сужение функции $|\varphi|$ на $[0, \omega]$, а $r(\overline{\varphi}, t),\ t \in [0,\ \omega]$, — убывающая перестановка функции $\overline{\varphi}$. Также положим $r(\overline{\varphi}, t) = 0$ для $t > \omega$.

Чтобы доказать неравенство (2.14), сначала докажем неравенства

$$\int\limits_0^\xi r^p(x_k, t)dt \leq \int\limits_0^\xi r^p(\overline{\varphi}, t)dt, \qquad \xi > 0, \qquad k = 1, 2. \tag{2.21}$$

Прежде всего покажем, что разности $\Delta_k(t) := r(x_k, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняют знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Для этого заметим, во-первых, что

$$r(x_k, 0) \leq r(\overline{\varphi}, 0), \qquad k = 1, 2, \tag{2.22}$$

вследствие неравенства

$$\|x\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty,$$

которое выполняется, так как φ является функцией сравнения для x. Положим далее $I_1 := [a, b]$, $I_2 := [b, a_1],\ a_1 = a + d$, и пусть

$$m_k := \min\{|x_k(t)|, t \in I_k\}, \qquad M_k := \max\{|x_k(t)|, t \in I_k\}.$$

Докажем, что если для произвольного $y_k \in (m_k, M_k)$ точки $\Theta_k \in [0, \mu_k]$ и $\Theta \in [0, \omega]$ выбраны так, что

$$y_k = r(x_k, \Theta_k) = r(\overline{\varphi}, \Theta), \tag{2.23}$$

то

$$|r'(x_k, \Theta_k)| \leq |r'(\overline{\varphi}, \Theta)|. \tag{2.24}$$

Действительно, пусть точки

$$t_i^k \in I_k, \quad i = 1, ..., m_k, \quad k = 1, 2, \qquad z_j \in [0, \omega], \quad j = 1, 2,$$

таковы, что

$$y_k = |x_k(t_i^k)| = |\overline{\varphi}(z_j)|.$$

При этом из (2.18) следует оценка $m_k \geq 2$. Тогда, поскольку φ является функцией сравнения для x, выполнены неравенства

$$|x_k'(t_i^k)| \leq |\overline{\varphi}'(z_j)|, \quad i = 1, ..., m_k, \quad j = 1, 2.$$

Поэтому по теореме о производной перестановки (см., например, [12]), предложение 1.3.2)

$$|r'(x_k, \Theta_k)| = \left[\sum_{i=1}^{m_k} |x_k'(t_i^k)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\overline{\varphi}'(z_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \Theta)|.$$

Тем самым импликация (2.23) $\Rightarrow$ (2.24) доказана. Из этой импликации и неравенств (2.22) и (2.20) следует, что разности $\Delta_k(t) := r(x_k, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняют знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое выполняется и для разностей

$$\Delta_{k,p}(t) := r^p(x_k, t) - r^p(\overline{\varphi}, t).$$

Завершая доказательство неравенств (2.21), положим $f_k(\xi) = \int_0^\xi \Delta_{k,p}(t)dt,\ k = 1, 2$. Поскольку перестановка сохраняет L_p-норму, из (2.19) следует, что $f_k(0) = f_k(\mu_k) = 0$, причем производная $f_k'(t) = \Delta_{k,p}(t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Следовательно, $f_k(\xi) \le 0,\ \xi > 0$, что равносильно (2.21).

Докажем, наконец, неравенство (2.14). Для этого воспользуемся известным неравенством

$$\int\limits_B |x(u)|^p du \le \int\limits_0^t r^p(x, u)du, \tag{2.25}$$

где B — произвольное измеримое по Лебегу подмножество $I_d,\ \mu B \le t$, и тем фактом, что для любого $t \in (0, d)$ существует такое измеримое множество $B = B_t \subset I_d,\ \mu B_t = t$, что в (2.25) выполнено равенство (см., например, [12], предложение 1.3.1). Положим $B_t^1 = B_t \bigcap\ [a, b]$ и $B_t^2 = B_t \bigcap\ [b, a_1]$, и пусть $t_1 := \mu B_t^1,\ t_2 := \mu B_t^2$. Тогда $t = t_1 + t_2$ и, применяя (2.25), получаем

$$\int\limits_0^t r^p(x, u)du = \int\limits_{B_t} |x(u)|^p du = \int\limits_{B_t^1} |x_1(u)|^p du + \int\limits_{B_t^2} |x_2(u)|^p du \le$$

$$\le \int\limits_0^{t_1} r^p(x_1, u)du + \int\limits_0^{t_2} r^p(x_2, u)du. \tag{2.26}$$

Через $\varphi_\pm$ обозначим сужение положительной (отрицательной) части φ на $[0, 2\omega]$. Очевидно, что

$$r(\varphi_\pm, t) = r(\overline{\varphi}, t), \qquad t \ge 0. \tag{2.27}$$

Поэтому, оценивая два последних интеграла в (2.26) с помощью (2.21) и учитывая (2.27), имеем

$$\int\limits_0^t r^p(x, u)du \le \int\limits_0^{t_1} r^p(\varphi_+, u)du + \int\limits_0^{t_2} r^p(\varphi_-, u)du,$$

где $t_1 + t_2 = t$. Отсюда следует неравенство (2.14) в силу неравенства [12] (предложение 1.3.6)

$$\int\limits_0^{t_1} r^p(\varphi_+, u)du + \int\limits_0^{t_2} r^p(\varphi_-, u)du \le \int\limits_0^t r^p(\varphi, u)du.$$

Лемма 2.4 доказана.

3. Основная теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $p > 0$, φ — S-функция с периодом 2ω, $\beta \in [0, 2\omega)$. Если d-периодическая функция $x \in S_\varphi(\omega)$ такова, что*

$$\|x\|_{L_p(I_d)} = \|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega})}, \tag{3.1}$$

и удовлетворяет условию

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_d)}, \tag{3.2}$$

то для любого $q \ge p$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, имеет место неравенство

$$\|x\|_{L_q(I_d)} \le \|\varphi\|_{L_q(I_{2\omega})} \frac{\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)}}{\|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}}, \tag{3.3}$$

где

$$B_1 := \left[\frac{-\omega - \beta/2}{2}, \frac{-\omega + \beta/2}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\omega - \beta/2}{2}, \frac{\omega + \beta/2}{2}\right].$$

Неравенство (3.3) *является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi(t)$ и множества $B = B_1$.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in S_\varphi(\omega)$, удовлетворяющую условиям теоремы 3.1. Тогда для нее выполнены и условия леммы 2.4. По этой лемме имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\xi r^p(x,t)dt \le \int\limits_0^\xi r^p(\varphi,t)dt, \qquad \xi > 0. \tag{3.4}$$

Отсюда в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [12], теорема 1.3.1) следует, что

$$\|x\|_{L_q(I_d)} \le \|\varphi\|_{L_q(I_{2\omega})}, \qquad q \ge p\ . \tag{3.5}$$

Зафиксируем далее произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$. Учитывая, что перестановка сохраняет L_p-норму, и применяя неравенство (2.25), получаем

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} = \int\limits_0^d |x(t)|^p dt - \int\limits_B |x(t)|^p dt \ge \int\limits_0^d r^p(x,t)dt - \int\limits_0^\beta r^p(x,t)dt.$$

Отсюда в силу (3.1) и (3.4) имеем

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} \ge \int\limits_0^{2\omega} r^p(\varphi,t)dt - \int\limits_0^\beta r^p(\varphi,t)dt = \int\limits_\beta^{2\omega} r^p(\varphi,t)dt = \int\limits_{I_{2\omega} \setminus B_1} |\varphi(t)|^p dt.$$

Таким образом,

$$\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)} \ge \|\varphi\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_1)}.$$

Из последнего неравенства в силу (3.5) следует утверждение теоремы 3.1.

4. Неравенство разных метрик типа Ремеза для функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$. Напомним, что $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Теорема 4.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\beta \in [0, 2\pi)$, а функция $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$ удовлетворяет условию*

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p(I_{2\pi})}. \tag{4.1}$$

Если число λ выбрано так, что

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi})} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})}\|x^{(r)}\|_\infty, \tag{4.2}$$

то для любого $q \ge p$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta/\lambda$, имеет место неравенство

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left\{ \frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}} \right\}^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{4.3}$$

где

$$B_1 := \left[\frac{-\pi-\beta/2}{2}, \frac{-\pi+\beta/2}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\pi-\beta/2}{2}, \frac{\pi+\beta/2}{2}\right], \qquad \alpha = \frac{r+1/q}{r+1/p}.$$

Неравенство (4.3) *является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_r(t)$ и множества $B = B_1$.*

Доказательство. Вследствие однородности неравенства (4.3) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{4.4}$$

Для функций $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, удовлетворяющих условию (4.1), имеет место неравенство [3]

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})} \left(\frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi})}} \right)^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}, \qquad q \ge p.$$

Из этого неравенства, условия (4.4) и очевидного равенства

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})} = \lambda^{-(r+1/q)}\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}, \qquad q > 0, \tag{4.5}$$

следует, что если число λ удовлетворяет условию (4.2), то

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})}. \tag{4.6}$$

В частности, в силу (4.4) и (4.6) (при $q = \infty$) для функции x выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [13]. По этой теореме сплайн $\varphi(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$ является функцией сравнения для функции x, т. е. $x \in S_\varphi\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)$. Таким образом, для функции x выполнены все условия теоремы 3.1. По этой теореме для любого $q \ge p$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta/\lambda$, выполняется неравенство

$$\|x\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})} \frac{\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}}{\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda}\setminus \frac{B_1}{\lambda}\right)}}.$$

Из последнего неравенства (при $q = p$) и условий (4.2), (4.4) следует, что

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \geq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda}\setminus \frac{B_1}{\lambda}\right)}. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) в силу (4.5) и аналогичного соотношения

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda}\setminus \frac{B_1}{\lambda}\right)} = \lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}$$

следует оценка

$$\frac{\|x\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|x\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}} \leq \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})}}{\|\varphi_{\lambda,r}\|^{\alpha}_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda}\setminus \frac{B_1}{\lambda}\right)}} = \frac{\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_1)}}\ .$$

Из этой оценки в силу (4.4) следует (4.3).

Теорема 4.1 доказана.

Замечание. Для $\beta = 0$ теорема 4.1 доказана в [3].

5. Неравенство разных метрик типа Ремеза для тригонометрических полиномов. Напомним, что T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка $\leq n$.

Теорема 5.1. *Пусть* $n, m \in \mathbf{N},\ p > 0$. *Если тригонометрический полином* $T \in T_n$ *имеет минимальный период* $2\pi/m,\ m \leq n$, *и удовлетворяет условию*

$$L(T)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}}\ \|T\|_{L_p(I_{2\pi/m})}, \tag{5.1}$$

то для любого $q \geq p$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \beta$, $\beta \in [0, 2\pi m/n)$, *имеет место неравенство*

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\ \frac{\|\sin(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\sin(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,n))}}\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{5.2}$$

где

$$B(m,n) := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\ ,\ \ -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\ ,\ \ \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right].$$

Неравенство (5.2) *точное и обращается в равенство для любого полинома* $T(t) = \sin mt$, $m \leq n$, *и множества*

$$B = B_m := \bigcup_{k=0}^{m-1}\left\{\left(\left[-\frac{\pi}{2m} - \frac{\beta}{4m},\ -\frac{\pi}{2m} + \frac{\beta}{4m}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2m} - \frac{\beta}{4m},\ \frac{\pi}{2m} + \frac{\beta}{4m}\right]\right) + \frac{2k\pi}{m}\right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем полином $T \in T_n$, удовлетворяющий условиям теоремы 5.1. Вследствие однородности неравенства (5.2) можно считать, что

$$\|T\|_{L_p(I_{2\pi/m})} = \|\sin n(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi/n})}. \tag{5.3}$$

Покажем, что в этом случае

$$\|T\|_{\infty} \leq 1. \tag{5.4}$$

Действительно, предположим противное. Тогда существует такое $\gamma \in (0,1)$, что $\|\gamma T\|_\infty = 1$, и, следовательно, полином $\sin nt$ является функцией сравнения для полинома γT (см. доказательство теоремы 8.1.1 в [14]). Переходя, если нужно, к сдвигу полинома γT и меняя его знак, можно считать, что

$$\|\gamma T\|_\infty = \gamma T(\pi/2n) = 1.$$

А поскольку $\sin nt$ является функцией сравнения для полинома γT, то

$$\gamma T(t) \geq \sin nt, \qquad \left|t - \frac{\pi}{2n}\right| \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Следовательно, в силу (5.1) имеем

$$\|\gamma T\|^p_{L_p(2\pi/m)} \geq 2L(\gamma T)^p_p \geq 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} |\sin nt|^p dt = \|\sin n(\cdot)\|^p_{L_p(I_{2\pi/n})},$$

что противоречит (5.3). Тем самым неравенство (5.4) доказано.

Поскольку неравенство (5.4) выполнено, то из доказательства теоремы 8.1.1 из [14] следует, что $\varphi(t) = \sin nt$ является функцией сравнения для полинома $T(t)$, т. е. $T \in S_\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Таким образом, полином T удовлетворяет всем условиям леммы 2.4 с $d = \pi/m$ и $\omega = \pi/n$. По этой лемме имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\xi r^p(t_m, t)dt \leq \int\limits_0^\xi r^p(\sin n(\cdot), t)dt, \qquad \xi > 0, \tag{5.5}$$

где t_m — сужение полинома T на $I_{2\pi/m}$. Отсюда, в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [12], теорема 1.3.1) и $2\pi/m$-периодичности полинома T, следует, что

$$m^{-\frac{1}{q}}\|T\|_{L_q(I_{2\pi})} = \|T\|_{L_q(I_{2\pi/m})} \leq \|\sin n(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi/n})} = n^{-\frac{1}{q}}\|\sin n(\cdot)\|_{L_q(I_{2\pi})}. \tag{5.6}$$

С другой стороны, поскольку перестановка сохраняет L_p-норму, а полином T имеет период $2\pi/m$, то, применяя (2.25), для произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, получаем

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} = \int\limits_0^{2\pi} |T(t)|^p dt - \int\limits_B |T(t)|^p dt \geq \int\limits_0^{2\pi} r^p(T,t)dt - \int\limits_0^{\beta} r^p(T,t)dt =$$

$$= m\left[\int\limits_0^{2\pi/m} r^p(t_m,t)dt - \int\limits_0^{\beta/m} r^p(t_m,t)dt\right].$$

Отсюда, применяя (5.3) и (5.5), выводим оценку снизу

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \geq m\left[\int\limits_0^{2\pi/n} r^p(\sin n(\cdot),t)dt - \int\limits_0^{\beta/m} r^p(\sin n(\cdot),t)dt\right] = m\int\limits_{\beta/m}^{2\pi/n} r^p(\sin n(\cdot),t)dt =$$

$$= \frac{m}{n} \int\limits_{\beta n/m}^{2\pi} r^p(\sin(\cdot), t)dt = \frac{m}{n} \int\limits_{I_{2\pi}\setminus B(m,n)} |\sin t|^p dt = \frac{m}{n} \|\sin(\cdot)\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,n))}\,.$$

Из этой оценки и оценки (5.6) следует неравенство (5.2). Точность неравенства (5.2) легко проверяется с помощью равенства $\|\sin m(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_m)} = \|\sin(\cdot)\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,m))}$.

Теорема 5.1 доказана.

Замечания. **4.1.** Неравенства вида (5.2) (при $q = \infty$) были получены в работе [8] для произвольных тригонометрических полиномов порядка не выше n.

4.2. Для $\beta = 0$ и $m = 1$ теорема 5.1 доказана в [3].

6. Неравенство разных метрик типа Ремеза для сплайнов. Напомним, что $S_{n,r}$ — пространство 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 6.1. *Пусть $r, n, m \in \mathbf{N}$, $p > 0$. Если сплайн $s \in S_{n,r}$ имеет минимальный период $2\pi/m,\ m \le n$, и удовлетворяет условию*

$$L(s)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi/m})}, \tag{6.1}$$

то для любого $q \ge p$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \le \beta$, $\beta \in [0, 2\pi m/n)$, имеет место неравенство

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} \le \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}}{\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,n))}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{6.2}$$

где

$$B(m,n) := \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\,,\ \ -\frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\beta n}{4m}\,,\ \ \frac{\pi}{2} + \frac{\beta n}{4m}\right].$$

Неравенство (6.2) *точное и обращается в равенство для сплайна $s(t) = \varphi_{n,r}(t)$ и множества*

$$B = B_n := \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\left[-\frac{\pi}{2n} - \frac{\beta}{4n},\ -\frac{\pi}{2n} + \frac{\beta}{4n}\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{2n} - \frac{\beta}{4n},\ \frac{\pi}{2n} + \frac{\beta}{4n}\right] \right) + \frac{2k\pi}{n} \right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in S_{n,r}$, удовлетворяющий условиям теоремы 6.1. Вследствие однородности неравенства (6.2) можно считать, что

$$\|s\|_{L_p(I_{2\pi/m})} = \|\varphi_{n,r}\|_{L_p(I_{2\pi/n})}. \tag{6.3}$$

Покажем, что в этом случае

$$\|s\|_\infty \le \|\varphi_{n,r}\|_\infty. \tag{6.4}$$

Действительно, предположив противное, найдем такое $\gamma \in (0,1)$, что $\|\gamma s\|_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$. Тогда в силу неравенства Тихомирова [15]

$$\left\|\gamma s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{\|\gamma s\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty} = 1.$$

Таким образом, для сплайна $\gamma s \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [13]. В силу этой теоремы $\varphi_{n,r}$ является функцией сравнения для сплайна γs . Переходя, если нужно, к сдвигу сплайна γs и меняя его знак, можно считать, что

$$\|\gamma s\|_\infty = \gamma s(\pi/2n) = |\varphi_{n,r}(\pi/2n)| = \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

А поскольку $\varphi_{n,r}(t)$ является функцией сравнения для сплайна γs, то

$$\gamma s(t) \geq |\varphi_{n,r}(t)|, \qquad \left|t - \frac{\pi}{2n}\right| \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Следовательно, в силу (6.1) имеем

$$\|\gamma s\|^p_{L_p(2\pi/m)} \geq 2L(\gamma s)^p_p \geq 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} |\varphi_{n,r}(t)|^p dt = \|\varphi_{n,r}\|^p_{L_p(I_{2\pi/n})},$$

что противоречит (6.3). Тем самым неравенство (6.4) доказано.

Поскольку (6.4) выполнено, то, применяя приведенные выше рассуждения к сплайну s вместо сплайна γs, заключаем, что $\varphi = \varphi_{n,r}$ является функцией сравнения для сплайна s, т. е. $s \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Таким образом, сплайн удовлетворяет всем условиям леммы 2.4 с $d = \pi/m$ и $\omega = \pi/n$. По лемме 2.4 имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\xi r^p(s_m, t)dt \leq \int\limits_0^\xi r^p(\varphi_{n,r}, t)dt, \qquad \xi > 0, \tag{6.5}$$

где s_m — сужение сплайна s на $I_{2\pi/m}$. Отсюда, в силу теоремы Харди – Литлвуда – Полиа (см., например, [12], теорема 1.3.1) и $2\pi/m$-периодичности сплайна s, следует, что

$$m^{-\frac{1}{q}}\|s\|_{L_q(I_{2\pi})} = \|s\|_{L_q(I_{2\pi/m})} \leq \|\varphi_{n,r}\|_{L_q(I_{2\pi/n})} = n^{-\left(r+\frac{1}{q}\right)}\|\varphi_r\|_{L_q(I_{2\pi})}. \tag{6.6}$$

С другой стороны, поскольку перестановка сохраняет L_p-норму, а сплайн s имеет период $2\pi/m$, то, применяя (2.25), для произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta$, получаем

$$\|s\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} = \int\limits_0^{2\pi} |s(t)|^p dt - \int\limits_B |s(t)|^p dt \geq \int\limits_0^{2\pi} r^p(s,t)dt - \int\limits_0^\beta r^p(s,t)dt =$$

$$= m\left[\int\limits_0^{2\pi/m} r^p(s_m,t)dt - \int\limits_0^{\beta/m} r^p(s_m,t)dt\right].$$

Отсюда, применяя (6.3), (6.5) и определение $\varphi_{n,r}(t) := n^{-r}\varphi_r(nt)$, выводим оценку

$$\|s\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \geq m\left[\int\limits_0^{2\pi/n} r^p(\varphi_{n,r},t)dt - \int\limits_0^{\beta/m} r^p(\varphi_{n,r},t)dt\right] = m\int\limits_{\beta/m}^{2\pi/n} r^p(n^{-r}\varphi_r(n(\cdot)),t)dt =$$

$$= \frac{m}{n}\, n^{-rp} \int\limits_{\beta n/m}^{2\pi} r^p(\varphi_r(\cdot),t)dt = \frac{m}{n}\, n^{-rp} \int\limits_{I_{2\pi}\setminus B(m,n)} |\varphi_r(t)|^p dt = \frac{m}{n}\, n^{-rp}\ \|\varphi_r\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(m,n))}.$$

Из этой оценки и оценки (6.6) следует неравенство (6.2). Точность (6.2) легко проверяется с помощью равенства $\|\varphi_{n,r}\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_n)} = n^{-r}\|\varphi_r\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B(n,n))}$.

Теорема 6.1 доказана.

Замечание. Для $\beta = 0$ и $m = 1$ теорема 6.1 доказана в [3].

Литература

1. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Comparison of rearrangements and Kolmogorov – Nagy type inequalities for periodic functions // Approxim. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. – Sofia: Darba, 2002. – P. 24 – 53.
2. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
3. *Кофанов В. А.* Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 202 – 212.
4. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. d'Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
5. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
6. *Remes E.* Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef // Зап. Наук.-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. тов-ва. Сер. 4. – 1936. – **13**, вип. 1. – С. 93 – 95.
7. *Ganzburg M. I.* On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials // J. Approxim. Theory. – 2012. – **164**. – P. 1233 – 1237.
8. *Nursultanov E., Tikhonov S.* A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials // Constr. Approxim. – 2013. – **38**. – P. 101 – 132.
9. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. – New York: Springer, 1995.
10. *Ganzburg M. I.* Polynomial inequalities on measurable sets and their applications // Constr. Approxim. – 2001. – **17**. – P. 275 – 306.
11. *Кофанов В. А.* Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 2. – С. 227 – 240.
12. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
13. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
14. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
15. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.

Получено 06.04.16