УДК 531.36

Е. В. Очеретнюк (Черкас. гос. технол. ун-т),
В. И. Слынько (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ ПЛОЩАДИ РЕШЕНИЙ ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$ *

We obtain estimates for the areas of the solutions of differential equations with Hukuhara derivative of a special form in the space $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$. The main methods used for the investigation are the method of comparison, the methods of the Minkowski – Aleksandrov geometry of convex bodies, and the Chaplygin – Ważewski method of approximate integration of differential equations. The obtained results enable us to reduce the estimates of the area of solutions to the investigation of differential equations of the first order.

Отримано оцінки для площі розв'язків диференціальних рівнянь із похідною Хукухари спеціального вигляду у просторі $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$. Основними методами дослідження є метод порівняння, методи геометрії опуклих тіл Г. Мінковського і О. Д. Александрова, а також метод наближеного інтегрування диференціальних рівнянь Чаплигіна – Ważewського. Одержані результати дозволяють звести оцінки площі розв'язків до дослідження диференціальних рівнянь першого порядку.

1. Введение. Дифференциальные уравнения с производной Хукухары используются для исследования динамики систем в условиях неопределенности, неоднозначности и неполноты информации. Роль этого класса дифференциальных уравнений при исследовании дифференциальных включений указана в монографии А. А. Толстоногова [1], а также в работе [2]. Метод сравнения и прямой метод Ляпунова развиты в монографии [3]. Анализ этой монографии и значительного числа работ, посвященных методу сравнения и прямому методу Ляпунова для этого класса уравнений, показывает отсутствие конструктивных способов построения вспомогательных функций Ляпунова. В настоящей работе предлагается для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары использовать в качестве некоторого аналога функции Ляпунова площадь решения уравнения, как элемента пространства. Хотя площадь не имеет свойств, характерных для классической функции Ляпунова, она является естественной мерой, присущей решениям этого класса уравнений. Мощный геометрический аппарат, созданный в работах Г. Минковского и А. Д. Александрова, позволяет установить нижние оценки для площади решений некоторых дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

2. Постановка задачи. Пусть $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$ — метрическое пространство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^2$ с метрикой Хаусдорфа. В пространстве $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$ определены операции сложения (Минковского) и умножения на неотрицательный скаляр. Если $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ — пространство линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}^2$, то действие оператора A естественным образом распространяется на пространство $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$:

$$Au = \{Ax : x \in u\} \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2), \qquad u \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2).$$

Пусть $u \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$, $v \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$, тогда если существует элемент $w \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$ такой, что $u = w + v$, то элемент w называется разностью Хукухары элементов u и v. При этом

* Выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U004691).

обозначается $w = u - v$. Разность двух элементов пространства $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ существует не всегда.

Понятие разности Хукухары позволяет определить понятие производной Хукухары для отображения $F\colon (\alpha,\beta) \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$.

Определение 2.1 [3]. *Отображение* $F\colon (\alpha,\beta) \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ *называется дифференцируемым в точке* $t_0 \in (\alpha,\beta)$, *если существует элемент* $D_H F(t_0) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *такой, что пределы*

$$\lim_{\varrho\to 0+} \varrho^{-1}(F(t_0+\varrho) - F(t_0)), \qquad \lim_{\varrho\to 0-} (-\varrho^{-1})(F(t_0) - F(t_0+\varrho))$$

существуют и равны $D_H F(t_0)$.

В этом случае $D_H F(t_0)$ называется производной Хукухары в точке t_0. Стандартно определяется дифференцируемость на открытых, полуоткрытых и замкнутых интервалах.

Отображение $F(t)$, дифференцируемое на $[a,b] \subset \mathbb{R}$, восстанавливается по своей производной с помощью интеграла Ауманна [3]

$$F(t) = F(a) + \int\limits_a^t D_H F(s)\,ds, \qquad t \in [a,b].$$

Отметим, что необходимым условием дифференцируемости отображения является неубывание функции $\operatorname{diam} F(t)$.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения результаты геометрии выпуклых тел, следуя работам А. Д. Александрова [4 – 7] и монографии [8].

Пусть $u_i \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $i = \underline{1,2}$. Обозначим через $S[u_1,u_2]$ смешанную площадь выпуклых компактов u_i, $S[u] = S[u,u]$ — площадь фигуры u.

Функционал $S[u_1,u_2]$ является аддитивным и позитивно однородным по каждому аргументу, инвариантным относительно перестановки аргументов, а также непрерывным по совокупности своих аргументов относительно метрики Хаусдорфа. Поэтому справедлива формула Штейнера

$$S[u_1 + \varrho u_2] = S[u_1] + 2\varrho S[u_1,u_2] + \varrho^2 S[u_2], \qquad \varrho \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

Из этой формулы следует, что

$$2S[u_1,u_2] = \lim_{\varrho\to 0+} \frac{S[u_1+\varrho u_2] - S[u_1]}{\varrho}.$$

Неравенство Брунна – Минковского состоит в том, что

$$S[u_1,u_2] \geq \sqrt{S[u_1]S[u_2]}.$$

В настоящей работе будут получены оценки площади решений дифференциального уравнения в пространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$

$$D_H u(t) = \psi(t, S[u(t)])Au(t), \tag{2.2}$$

где D_H — производная Хукухары, $u \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C([a,+\infty) \times [b,+\infty); \mathbb{R}_+)$, $b > 0$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$.

Рассмотрим функцию $s_0(t) = S[u(t)]$, где $u\colon [t_0, \Omega^+(t_0, u_0)) \to \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$ — решение задачи Коши дифференциального уравнения (2.2) с начальным условием $u(t_0) = u_0,\ u_0 \in \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$, $t_0 > a,\ S[u_0] \geq b$. Рассмотрим вопрос об изменении функции $s_0(t)$ вдоль решения $u(t)$. Из уравнения (2.2) следует, что

$$u(t+\varrho) = u(t) + \int\limits_t^{t+\varrho} \psi(s, S[u(s)])Au(s)\,ds, \qquad \varrho > 0.$$

Применяя формулу (2.1), получаем

$$\frac{s_0(t+\varrho) - s_0(t)}{\varrho} = 2S\left[u(t), \frac{1}{\varrho}\int\limits_t^{t+\varrho} \psi(s, S[u(s)])Au(s)\,ds\right] +$$

$$+S\left[\int\limits_t^{t+\varrho} \psi(s, S[u(s)])Au(s)\,ds, \frac{1}{\varrho}\int\limits_t^{t+\varrho} \psi(s, S[u(s)])Au(s)\,ds\right].$$

По теореме о среднем для интеграла Ауманна

$$\lim_{\varrho\to 0+} \frac{1}{\varrho}\int\limits_t^{t+\varrho} \psi(s, S[u(s)])Au(s)\,ds = \psi(t, S[u(t)])Au(t)$$

в метрике Хаусдорфа [3], поэтому вследствие непрерывности функционала $S[u,v]$ получим

$$\lim_{\varrho\to 0+} \frac{s_0(t+\varrho) - s_0(t)}{\varrho} = 2\psi(t, s_0(t))S[u(t), Au(t)].$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\varrho\to 0-} \frac{s_0(t+\varrho) - s_0(t)}{\varrho} = 2\psi(t, s_0(t))S[u(t), Au(t)].$$

Поэтому

$$\frac{ds_0(t)}{dt} = 2\psi(t, s_0(t))S[u(t), Au(t)]. \tag{2.3}$$

Рассмотрим функцию $s_1(t) = S[u(t), Au(t)]$. Аналогично предыдущему можно показать, что

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = \psi(t, s_0(t))(S[Au(t), Au(t)] + S[u(t), A^2u(t)]) =$$

$$= \psi(t, s_0(t))(|\det A|S[u(t)] + S[u(t), A^2u(t)]). \tag{2.4}$$

Соотношения (2.3) и (2.4) позволяют установить верхние и нижние оценки для площади $S[u(t)]$ решения дифференциального уравнения с производной Хукухары (2.2).

3. Нижние оценки. Соотношение (2.3) можно записать в виде

$$\frac{ds_0(t)}{dt} = 2\psi(t, s_0(t))s_1(t). \tag{3.1}$$

Установим дифференциальное неравенство для функции $s_0(t)$ для оценки площади $S[u(t)]$ снизу. Применяя для соотношения (2.4) неравенство Брунна – Минковского, получаем

$$\frac{ds_1(t)}{dt} \geq 2\psi(t, s_0(t))|\det A|s_0(t). \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}(s_1^2(t) - |\det A|s_0^2(t)) \geq 0,$$

поэтому

$$s_1(t) \geq \sqrt{|\det A|s_0^2(t) + s_1^2(t_0) - |\det A|s_0^2(t_0)}.$$

Из равенства (3.1) и последнего неравенства следует дифференциальное неравенство для функции $s_0(t)$:

$$\frac{ds_0(t)}{dt} \geq 2\psi(t, s_0(t))\sqrt{|\det A|s_0^2(t) + S^2[u_0, Au_0] - |\det A|S^2[u_0]}.$$

Наряду с этим неравенством рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = 2\psi(t, \zeta(t))\sqrt{|\det A|\zeta^2(t) + S^2[u_0, Au_0] - |\det A|S^2[u_0]}. \tag{3.3}$$

Из теоремы о дифференциальном неравенстве [9] следует такая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\zeta_- : [t_0, \omega^+(t_0, \zeta_0)) \to \mathbb{R}_+$ *— минимальное решение задачи Коши для уравнения* (3.3) *с начальным условием* $\zeta_0 = S[u_0]$.

Тогда при всех $t \in [t_0, \min[\Omega^+(t_0, u_0), \omega^+(t_0, \zeta_0)])$ *справедлива оценка*

$$S[u(t)] \geq \zeta_-(t).$$

4. Верхние оценки площади. Сформулируем основные результаты этой работы, касающиеся верхних оценок площади решений дифференциального уравнения с производной Хукухары (2.2). При этом дополнительно предположим, что функция $\psi(t, s)$ не убывает по переменной s. Рассмотрим квадратное уравнение

$$2\mu^2 - |\operatorname{tr} A|\mu - 2|\det A| = 0.$$

Обозначим через μ_i, $i = 1, 2$, корни этого квадратного уравнения, $\mu_1 \geq 0$. Для любого $u_0 \in \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ определим величину асимметрии множества $u_0 \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ следующим образом:

$$\sigma[u_0] = \frac{1}{S[u_0]}\sqrt{(S[u_0, -u_0] - S[u_0])^2 + (S[u_0, Au_0] - S[u_0, -Au_0])^2}.$$

Можно показать, что $\sigma[u_0] = 0$ тогда и только тогда, когда множество u_0 является центрально-симметричным.

Определим функцию $G(\varrho)$ следующим образом:

1) если $\det A = 0,\ \operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = -1$, то положим

$$G(\varrho) = \left(\frac{S^2[u_0, Au_0]}{\varrho^2} + \frac{\operatorname{tr}^2 A}{4} \left(1 - \frac{S^2[u_0]}{\varrho^2} \right) + \right.$$

$$\left. + |\operatorname{tr} A| \left(\frac{S[u_0, -Au_0]}{S[u_0]} - \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} \right) \left(\frac{S[u_0]}{\varrho} - \frac{S^2[u_0]}{\varrho^2} \right) \right)^{1/2},$$

где $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

2) если $\det A = 0,\ \operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = 1$, то положим

$$G(\varrho) = \frac{S[u_0, Au_0]}{\varrho} + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} \left(1 - \frac{S[u_0]}{\varrho} \right);$$

3) если $\operatorname{tr} A = 0,\ \operatorname{sgn}(\det A) = -1$, то положим

$$G(\varrho) = \sqrt{|\det A| + \frac{S^2[u_0, Au_0] - |\det A| S^2[u_0]}{\varrho^2}};$$

в этом случае уравнения сравнения для $\zeta(t)$ и $\varrho(t)$ совпадают, поэтому в данном случае предложенный подход позволяет установить точное значение площади решения $u(t)$;

4) если $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = 1,\ \operatorname{sgn}(\det A) = -1$, то положим

$$G(\varrho) = \mu_1 + \frac{S[u_0]}{\varrho} \delta_0 \chi(\delta_0),$$

где $\delta_0 = \dfrac{S[u_0, Au_0]}{S[u_0]} - \mu_1,\ \chi(\delta_0)$ — функция Хевисайда;

5) если $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = -1,\ \operatorname{sgn}(\det A) = -1,\ S[u_0, -Au_0] \geq S[u_0, Au_0]$, то положим

$$G(\varrho) = \mu_1 + \delta_0 \chi(\delta_0) \frac{S[u_0]}{\varrho} + \frac{a_0 N_1}{1 - \gamma} \exp \left\{ \frac{N a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta_0|}{\beta} \right\} \left(\frac{S[u_0]}{\varrho} \right)^{\gamma} \sigma[u_0],$$

где $a_0 = \dfrac{1 + |\det A|}{\sqrt{|\det A|}},\ \gamma = 1 - \sqrt{\dfrac{|\mu_2|}{\mu_1}} > 0,$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \delta_0 \geq 0, \\ 1 - \dfrac{\mu_2}{\mu_1}, & \delta_0 < 0, \end{cases} \qquad N = \begin{cases} \dfrac{S[u_0]}{\mu_1 S[u_0, Au_0]}, & \delta_0 \geq 0, \\ \dfrac{\beta S[u_0]}{(\mu_1 + 2|\mu_2|) S[u_0, Au_0] - |\det A| S[u_0]}, & \delta_0 < 0, \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} \dfrac{|\operatorname{tr} A| S[u_0]}{2 S[u_0, Au_0]}, & \delta_0 \leq 0, \\ \dfrac{|\operatorname{tr} A|}{2\mu_1}, & \delta_0 > 0; \end{cases}$$

6) если $\operatorname{sgn}(\mathrm{tr}\ A) = -1,\ \operatorname{sgn}(\det A) = -1,\ S[u_0, -Au_0] < S[u_0, Au_0]$, то положим

$$G(\varrho) = \mu_1 + \delta_0 \chi(\delta_0) \frac{S[u_0]}{\varrho} + \frac{\sqrt{2} a_0^2 N_1^*}{1-\gamma} e^{\omega a_0 \sqrt{|\det A|}} \left(\frac{S[u_0]}{\varrho} \right)^\gamma \sigma[u_0],$$

где

$$M = \begin{cases} 1, & \delta_0 \geq 0, \\ \dfrac{\mu_1 \beta S[u_0, Au_0]}{(\mu_1 + 2|\mu_2|) S[u_0, Au_0] - |\det A| S[u_0]}, & \delta_0 < 0, \end{cases}$$

$$N_1^* = \frac{|\mathrm{tr}\ A|}{2\sqrt{|\det A|}}, \qquad N^* = \frac{1}{(2\sqrt{2}-1)|\det A|},$$

$$\omega = \frac{N|\delta_0|}{\beta} + N^* M |\delta_0| + N^* \frac{a_0 N_1}{1-\gamma} \exp\left\{ \frac{N a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta_0|}{\beta} \right\} \sigma[u_0];$$

7) если $\operatorname{sgn}(\mathrm{tr}\ A) = -1,\ \operatorname{sgn}(\det A) = 1,\ S[u_0, -Au_0] \geq S[u_0, Au_0]$, то положим

$$G(\varrho) = \mu_1 + \delta_0 \chi(\delta_0) \frac{S[u_0]}{\varrho} + \frac{a_1 N_2}{1-\gamma_1} \exp\left\{ \frac{b_1 N |\delta_0|}{\beta} \right\} \left(\left(\frac{S[u_0]}{\varrho} \right)^{\gamma_1} - \frac{S[u_0]}{\varrho} \right) \sigma[u_0],$$

где $a_1 = \dfrac{1 + 2|\det A|}{\sqrt{2|\det A|}},\ \gamma_1 = 1 - \sqrt{\dfrac{|\mu_2|}{2\mu_1}},\ b_1 = \dfrac{\sqrt{2|\det A|^2 + 17|\det A| + 8}}{2\sqrt{2}}$,

$$N_2 = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\det^2 A + \mathrm{tr}^2 A}}{2\mu_1}, & \delta_0 \geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{\det^2 A + \mathrm{tr}^2 A} S[u_0]}{2S[u_0, Au_0]}, & \delta_0 < 0; \end{cases} \tag{4.1}$$

8) если $\operatorname{sgn}(\mathrm{tr}\ A) = \pm 1$, либо $\operatorname{sgn}(\mathrm{tr}\ A) = 0$ и $\operatorname{sgn}(\det A) = 1,\ S[u_0, -Au_0] < S[u_0, Au_0]$, то положим

$$G(\varrho) = \mu_1 \left(1 - \frac{S[u_0]}{\varrho} \right) + \frac{S[u_0, Au_0]}{\varrho} + \frac{|\det A| N}{\beta - 1} \left(\frac{S[u_0]}{\varrho} - \left(\frac{S[u_0]}{\varrho} \right)^\beta \right) +$$

$$+ \frac{|\det A|}{\mu_1} \frac{S[u_0, -u_0] - S[u_0]}{\varrho} \ln \frac{\varrho}{S[u_0]} + \frac{|\det A| N}{\beta} \frac{S[u_0]}{\varrho} \left(1 - \left(\frac{S[u_0]}{\varrho} \right)^\beta \right);$$

9) если $\operatorname{sgn}(\mathrm{tr}\ A) = 1,\ \operatorname{sgn}(\det A) = 1,\ S[u_0, -Au_0] \geq S[u_0, Au_0]$, то положим

$$G(\varrho) = \mu_1 + \delta_0 \chi(\delta_0) \frac{S[u_0]}{\varrho} + \frac{a_2 N_3}{1-\gamma_2} \exp\left\{ \frac{b_2 N |\delta_0|}{\beta} \right\} \left(\left(\frac{S[u_0]}{\varrho} \right)^{\gamma_2} - \frac{S[u_0]}{\varrho} \right) \sigma[u_0].$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} - \sqrt{1 + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}}\right), \quad a_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{tr}^2 A + 6|\det A|}{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}},$$

$$b_2 = \left(\left(\frac{\det^2 A}{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}}\right)^2 + \right.\right.$$

$$+\frac{\det^2 A}{16}\left(1 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}}\right)^2 + \left(\frac{2|\det A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}} + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{|\operatorname{tr} A|}{4}\left(1 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}}\right)\right)^2\right)^{1/2},$$

$$N_3 = \begin{cases} \dfrac{|\det A|}{2\mu_1}, & \delta_0 \geq 0, \\ \dfrac{|\det A| S[u_0]}{2S[u_0, Au_0]}, & \delta_0 < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение сравнения

$$\frac{d\varrho(t)}{dt} = 2\varrho(t)\psi(t, \varrho(t))G(\varrho(t)). \tag{4.2}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $\varrho^+ : [t_0, \omega^+(t_0, \zeta_0)) \to \mathbb{R}_+$ *— максимальное решение задачи Коши для уравнения* (4.2) *с начальным условием* $\varrho_0 = S[u_0]$.

Тогда при всех $t \in [t_0, \min[\Omega^+(t_0, u_0), \omega^+(t_0, \varrho_0)])$ *справедлива оценка*

$$S[u(t)] \leq \varrho^+(t).$$

Следующие три пункта посвящены обоснованию этого утверждения.

5. Доказательство верхних оценок. Рассмотрим теперь вопрос о доказательстве теоремы о верхних оценках площади $S[u(t)]$ при $t \geq t_0$. В силу теоремы Гамильтона – Кели

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0,$$

поэтому

$$S[u(t), A^2 u(t)] = S[u(t), ((\operatorname{tr} A)A - \det AI)u(t)] \leq |\operatorname{tr} A| S[u(t), \operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A)Au(t)] +$$

$$+ |\det A| S[u(t), -\operatorname{sgn}(\det A) I u(t)]. \tag{5.1}$$

Таким образом, приходим к необходимости рассмотрения четырех случаев.

Случай 1. Пусть $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = 1$, $\operatorname{sgn}(\det A) = -1$. В этом случае из неравенства (5.1) и соотношения (2.4) следует неравенство

$$\frac{ds_1}{dt} \leq \psi(t, s_0(t))(2|\det A| s_0(t) + |\operatorname{tr} A| s_1(t)). \tag{5.2}$$

Рассмотрим систему уравнений сравнения

$$\frac{d\xi_0}{dt} = 2\psi(t,\xi_0(t))\xi_1(t),$$
$$\frac{d\xi_1}{dt} = \psi(t,\xi_0(t))(2|\det A|\xi_0(t) + |\operatorname{tr} A|\xi_1(t)) \tag{5.3}$$

с начальными условиями $\xi_0(t_0) = S[u_0]$, $\xi_1(t_0) = S[u_0, Au_0]$. Поскольку $\psi(t,\xi_0)$ не убывает по переменной ξ_0, то правые части этой системы удовлетворяют условиям Важевского. Поэтому при $t \geq t_0$ выполняются неравенства

$$s_1(t) \leq \xi_1(t). \tag{5.4}$$

Из системы (5.3) следует однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_0} = |\det A|\frac{\xi_0}{\xi_1} + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}. \tag{5.5}$$

Введем новые переменные $\tau = \ln\xi_0$, $\varphi = \dfrac{\xi_1}{\xi_0}$, тогда в этих переменных дифференциальное уравнение (5.5) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A|\varphi - 2\varphi^2}{2\varphi}. \tag{5.6}$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах. Его решение имеет вид

$$\frac{|\varphi(\tau) - \mu_2|^{\mu_2}}{|\varphi(\tau) - \mu_1|^{\mu_1}} = e^{(\mu_1-\mu_2)(\tau-\tau_0)}\frac{|\varphi(\tau_0) - \mu_2|^{\mu_2}}{|\varphi(\tau_0) - \mu_1|^{\mu_1}}. \tag{5.7}$$

Прежде чем рассмотреть другие случаи, отметим, что если множество u_0 является центрально-симметричным, то при всех $t \geq t_0$ выпуклое множество $u(t)$ также является центрально-симметричным. В этом случае приведенная система уравнений сравнения (5.3) позволяет получить оценки площади решений независимо от знаков $\operatorname{tr} A$ и $\det A$.

Случай 2. Пусть $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = -1$, $\operatorname{sgn}(\det A) = -1$. Обозначим $\widetilde{s}_0(t) = S[u(t), -Iu(t)]$, $\widetilde{s}_1(t) = S[u(t), -Au(t)]$, тогда с учетом (5.1) имеем

$$\frac{ds_1(t)}{dt} \leq \psi(t,s_0(t))(2|\det A|s_0(t) + |\operatorname{tr} A|\widetilde{s}_1(t)),$$
$$\frac{d\widetilde{s}_0(t)}{dt} = 2\psi(t,s_0(t))\widetilde{s}_1(t),$$
$$\frac{d\widetilde{s}_1(t)}{dt} \leq \psi(t,s_0(t))(|\det A|\widetilde{s}_0(t) + |\operatorname{tr} A|S[u(t), -\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A)Au] +$$
$$+|\det A|S[u(t), \operatorname{sgn}(\det A)u(t)]).$$

Из последнего неравенства в рассматриваемом случае следует неравенство

$$\frac{d\widetilde{s}_1(t)}{dt} \leq \psi(t,s_0(t))(2|\det A|\widetilde{s}_0(t) + |\operatorname{tr} A|s_1(t)).$$

Рассмотрим систему сравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0(t)}{dt} &= 2\psi(t,\xi_0(t))\xi_1(t), \\ \frac{d\widetilde{\xi}_0(t)}{dt} &= 2\psi(t,\xi_0(t))\widetilde{\xi}_1(t), \\ \frac{d\xi_1(t)}{dt} &= \psi(t,\xi_0(t))(2|\det A|\xi_0(t) + |\operatorname{tr} A|\widetilde{\xi}_1(t)), \\ \frac{d\widetilde{\xi}_1(t)}{dt} &= \psi(t,\xi_0(t))(2|\det A|\widetilde{\xi}_0(t) + |\operatorname{tr} A|\xi_1(t)). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Поскольку функция $\psi(t,\xi_0)$ не убывает по ξ_0, то правые части системы сравнения удовлетворяют условиям Важевского. Поэтому из теоремы о дифференциальном неравенстве следует неравенство (5.4), в котором $\xi_1(t)$ — ξ_1-компонента решения задачи Коши для системы сравнения (5.8) с начальными условиями $\xi_0(t_0) = S[u_0,u_0]$, $\widetilde{\xi}_0(t_0) = S[u_0,-u_0]$, $\xi_1(t_0) = S[u_0,Au_0]$, $\widetilde{\xi}_1(t_0) = S[u_0,-Au_0]$.

В новых переменных $z_1 = \widetilde{\xi}_0/\xi_0$, $z_2 = \xi_1/\xi_0$, $z_3 = \widetilde{\xi}_1/\xi_0$, $\tau = \ln\xi_0$ система сравнения (5.8) сводится к автономной системе третьего порядка

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{z_3}{z_2} - z_1, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A|z_3 - 2z_2^2}{2z_2}, \\ \frac{dz_3}{d\tau} &= \frac{2|\det A|z_1 + |\operatorname{tr} A|z_2 - 2z_2z_3}{2z_2}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Случай 3. Пусть $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = -1$, $\operatorname{sgn}(\det A) = 1$. В этом случае соответствующая система уравнений сравнения сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{z_3}{z_2} - z_1, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{|\det A|(1+z_1) + |\operatorname{tr} A|z_3 - 2z_2^2}{2z_2}, \\ \frac{dz_3}{d\tau} &= \frac{|\det A|(1+z_1) + |\operatorname{tr} A|z_2 - 2z_2z_3}{2z_2}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Случай 4. В случае $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = 1$, $\operatorname{sgn}(\det A) = 1$ соответствующая система уравнений сравнения сводится к автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{z_3}{z_2} - z_1, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{|\det A|(1+z_1) + |\operatorname{tr} A|z_2 - 2z_2^2}{2z_2}, \\ \frac{dz_3}{d\tau} &= \frac{|\det A|(1+z_1) + |\operatorname{tr} A|z_3 - 2z_2z_3}{2z_2}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Отметим, что в случае, когда $\det A = 0$ либо $\mathrm{tr}\ A = 0$, можно также использовать одну из систем (5.9) – (5.11).

Таким образом, задача о верхних оценках площади решений $u(t)$ сводится к интегрированию некоторой автономной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае неизвестно, интегрируются ли эти уравнения в квадратурах. В следующем пункте рассмотрим некоторые частные случаи, когда можно получить оценки решений этих систем.

6. Частные решения вспомогательных систем. Укажем некоторые точные решения основных систем в частных случаях.

Отметим, что если $\mathrm{tr}\ A = 0$, $\mathrm{sgn}\,(\det A) = -1$, то система дифференциальных уравнений (5.9) имеет решение

$$z_2(\tau) = \sqrt{|\det A| + e^{-2(\tau-\tau_0)}(z_2^2(\tau_0) - |\det A|)}.$$

Если $\det A = 0$, то системы (5.9) и (5.10) имеют точное решение

$$z_2(\tau) = \Bigg(e^{-2(\tau-\tau_0)}z_2^2(\tau_0) + \frac{\mathrm{tr}^2 A}{4}(1 - e^{-2(\tau-\tau_0)}) +$$

$$+|\,\mathrm{tr}\ A| \left(z_3(\tau_0) - \frac{|\,\mathrm{tr}\ A|}{2}\right)(e^{-(\tau-\tau_0)} - e^{-2(\tau-\tau_0)})\Bigg)^{1/2}.$$

В этом же случае система (5.11) имеет точное решение

$$z_2(\tau) = e^{-(\tau-\tau_0)}z_2(\tau_0) + \frac{|\,\mathrm{tr}\ A|}{2}(1 - e^{-(\tau-\tau_0)}).$$

7. Качественное исследование вспомогательных систем. Явное решение основных систем является сложной задачей, поскольку эта система является нелинейной системой третьего порядка. Поэтому для построения верхних оценок площади необходимо получить оценки решений этих систем. При этом используем метод приближенного интегрирования Чаплыгина — Важевского и методы теории интегральных неравенств.

Отметим, что вследствие неравенства Брунна – Минковского для целей настоящей работы достаточно изучить решения задачи Коши, начальные условия которых удовлетворяют неравенствам $z_1(\tau_0) \geq 1$, $z_2(\tau_0) \geq \sqrt{|\det A|}$, $z_3(\tau_0) \geq \sqrt{|\det A|}$. Далее всегда предполагается, что эти условия выполняются. Также по самому смыслу рассматриваемой задачи системы (5.8) – (5.11) являются позитивными относительно конуса $\mathbb{R}^3_+$ (впрочем, это может быть доказано непосредственно).

Случай 1. Несмотря на то, что в этом случае дифференциальное уравнение (5.6) является скалярным и интегрируется в квадратурах, нахождение его решений в явном виде осложнено необходимостью обращения функции (5.7). Поэтому целесообразно провести качественное исследование этого уравнения и получить оценки решений. Эти результаты также важны для исследования других случаев — систем (5.9) – (5.11).

Лемма 7.1. *Если $\varphi(\tau_0) \geq \mu_1$, то при всех $\tau \geq \tau_0$ выполняется оценка*

$$0 \leq \varphi(\tau) - \mu_1 \leq (\varphi(\tau_0) - \mu_1)e^{-(\tau-\tau_0)}.$$

Доказательство. Левое неравенство — следствие единственности решений задачи Коши. Обозначим $y = \varphi(\tau) - \mu_1$, тогда

$$\frac{dy}{d\tau} = \Big(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\Big)y - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{y^2}{y + \mu_1}. \tag{7.1}$$

Из уравнения (7.1) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dy}{d\tau} \leq -y.$$

Применение теоремы о дифференциальном неравенстве завершает доказательство леммы.

Лемма 7.2. *Если* $\sqrt{\det A} \leq \varphi(\tau_0) \leq \mu_1$, *то при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется оценка*

$$0 \leq \mu_1 - \varphi(\tau) \leq M_1(\mu_1 - \varphi(\tau_0))e^{-\beta(\tau-\tau_0)},$$

где $\beta = 1 - \dfrac{\mu_2}{\mu_1} > 0,\ M_1 = \dfrac{\mu_1\beta\varphi(\tau_0)}{\mu_1\beta\varphi(\tau_0) - |\mu_2|(\mu_1 - \varphi(\tau_0))} > 0.$

Доказательство. Из уравнения (7.1) по формуле Коши следуют интегральное уравнение

$$y(\tau) = e^{-\beta(\tau-\tau_0)}y(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}\frac{|\mu_2|}{\mu_1}\frac{y^2(s)}{\varphi(s)}\,ds$$

и оценка

$$|y(\tau)| \leq e^{-\beta(\tau-\tau_0)}|y(\tau_0)| + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)}\frac{|\mu_2|}{\mu_1}\frac{y^2(s)}{\varphi(\tau_0)}\,ds, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Обозначая $u(\tau) = e^{\beta\tau}|y(\tau)|$, получаем интегральное неравенство

$$u(\tau) \leq u(\tau_0) + \frac{|\mu_2|}{\mu_1\varphi(\tau_0)}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta s}u^2(s)\,ds, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Применяя лемму Бихари [10], имеем оценку

$$u(\tau) \leq \frac{e^{\beta\tau_0}|y(\tau_0)|}{1 + \dfrac{|\mu_2||y(\tau_0)|}{\mu_1\varphi(\tau_0)\beta}(e^{-\beta(\tau-\tau_0)} - 1)}, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Поскольку $\varphi(\tau_0) \geq \sqrt{\det A}$, то $M_1 = \dfrac{\mu_1\beta\varphi(\tau_0)}{\mu_1\beta\varphi(\tau_0) - |\mu_2|(\mu_1 - \varphi(\tau_0))} > 0$ и

$$0 \leq \mu_1 - \varphi(\tau) \leq (\mu_1 - \varphi(\tau_0))M_1e^{-\beta(\tau-\tau_0)}, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Лемма доказана.

Случай 2. Пусть $\operatorname{sgn}(\operatorname{tr} A) = -1,\ \operatorname{sgn}(\det A) = -1.$

Приведем некоторые вспомогательные результаты о качественных свойствах основной системы (5.9).

Лемма 7.3. *Для системы* (5.9) *при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство* $z_2(\tau) \geq \sqrt{|\det A|}$.

Доказательство. Действительно, из второго уравнения системы следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_2}{d\tau} \geq \frac{|\det A| - z_2^2}{z_2}.$$

Применение теоремы о дифференциальном неравенстве завершает доказательство леммы.

Лемма 7.4. *Предположим, что начальные условия для задачи Коши* (5.9) *таковы, что* $z_3(\tau_0) \geq z_2(\tau_0)$.

Тогда при всех $\tau \geq \tau_0$ *выполняются неравенства*

$$z_1(\tau) \geq 1, \qquad z_3(\tau) \geq z_2(\tau). \tag{7.2}$$

Доказательство. Вследствие непрерывной зависимости решений задачи Коши (5.9) от начальных условий достаточно рассмотреть случай, когда $z_1(\tau_0) > 1,\ z_3(\tau_0) > z_2(\tau_0)$. Пусть $\mathcal{T} = \{\tau\,|\forall s \in [\tau_0, \tau]\ z_1(s) > 1, z_3(s) > z_2(s)\}$. Множество $\mathcal{T}$ непустое. Предположим, от противного, что оно ограничено, тогда существует число $\tau_1 = \sup \mathcal{T} > \tau_0$. По непрерывности, $z_3(\tau) \geq z_2(\tau)$ при всех $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. Поэтому из первого уравнения системы (5.9) следует

$$z_1(\tau_1) \geq e^{-(\tau_1-\tau_0)} z_1(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} e^{-(\tau_1-s)} \frac{z_3(s)}{z_2(s)}\, ds \geq e^{-(\tau_1-\tau_0)} z_1(\tau_0) + 1 - e^{-(\tau_1-\tau_0)} > 1.$$

Если $z_3(\tau_1) = z_2(\tau_1)$, то, вычитая из третьего уравнения системы второе, получаем

$$\left.\frac{d(z_3(\tau) - z_2(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_1} = \frac{|\det A|(z_1(\tau_1) - 1)}{z_2(\tau_1)} > 0.$$

Поэтому существует положительное число δ такое, что функция $z_3(\tau) - z_2(\tau)$ возрастает на сегменте $[\tau_1 - \delta, \tau_1 + \delta]$, т. е. при всех $\tau \in [\tau_1 - \delta, \tau_1)$ выполняется неравенство $z_3(\tau) < z_2(\tau)$, что противоречит определению числа τ_1. Тогда $z_3(\tau_1) > z_2(\tau_1)$. По непрерывности, существует положительное число $\delta_1 > 0$ такое, что $z_1(\tau) > 1,\ z_3(\tau) > z_2(\tau)$ при всех $\tau \in [\tau_1, \tau_1 + \delta_1]$, что опять приводит к противоречию с определением числа τ_1. Таким образом, полученное противоречие доказывает лемму.

Введем обозначения $\delta(\tau_0) = z_2(\tau_0) - \mu_1,\ a_0 = \dfrac{1 + |\det A|}{\sqrt{|\det A|}},\ \gamma = 1 - \sqrt{\dfrac{|\mu_2|}{\mu_1}} > 0,$

$$\beta(\tau_0) = \begin{cases} 1, & \delta(\tau_0) \geq 0, \\ 1 - \dfrac{\mu_2}{\mu_1}, & \delta(\tau_0) < 0, \end{cases} \qquad N(\tau_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1 z_2(\tau_0)}, & \delta(\tau_0) \geq 0, \\ \dfrac{\beta}{(\mu_1 + 2|\mu_2|) z_2(\tau_0) - |\det A|}, & \delta(\tau_0) < 0, \end{cases}$$

$$N_1(\tau_0) = \begin{cases} \dfrac{|\operatorname{tr} A|}{2 z_2(\tau_0)}, & \delta(\tau_0) \leq 0, \\ \dfrac{|\operatorname{tr} A|}{2\mu_1}, & \delta(\tau_0) > 0, \end{cases} \qquad \sigma(\tau) = \sqrt{(z_1(\tau) - 1)^2 + (z_3(\tau) - \varphi(\tau))^2}.$$

Установим оценки для функции $\sigma(\tau)$.

Лемма 7.5. *Предположим, что начальные условия для задачи Коши* (5.9) *таковы, что* $z_3(\tau_0) \geq z_2(\tau_0)$.

Тогда при всех $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$z_2(\tau) \leq \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)) + \frac{a_0 N_1}{1-\gamma} \exp\left\{ \frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} \right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \sigma(\tau_0). \tag{7.3}$$

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что при всех $\tau \geq \tau_0$ выполняются неравенства

$$z_1(\tau) \geq 1, \qquad z_3(\tau) \geq z_2(\tau).$$

Поэтому из второго уравнения системы (5.9) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_2}{d\tau} \geq \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A| z_2 - 2z_2^2}{2z_2}, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

По теореме о дифференциальном неравенстве при всех $\tau \geq \tau_0$ выполняется оценка $z_2(\tau) \geq$ $\geq \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)) \equiv \varphi(\tau)$. Поэтому из системы (5.9) следует система дифференциальных неравенств

$$\frac{dz_1}{d\tau} \leq \frac{1}{\varphi(\tau)} z_3 - z_1,$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} \leq -z_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} z_3 + \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)},$$

$$\frac{dz_3}{d\tau} \leq \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)} z_1 - z_3 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}.$$

Правые части этой системы неравенств удовлетворяют условию Важевского, поэтому по теореме о дифференциальном неравенстве при всех $\tau \geq \tau_0$ справедлива оценка

$$\mathbf{z}(\tau) \leq \overline{\mathbf{z}}(\tau), \tag{7.4}$$

где $\overline{\mathbf{z}}(\tau)$ — решение задачи Коши

$$\begin{gathered} \frac{d\overline{z}_1}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\tau)} \overline{z}_3 - \overline{z}_1, \\ \frac{d\overline{z}_2}{d\tau} = -\overline{z}_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} \overline{z}_3 + \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)}, \\ \frac{d\overline{z}_3}{d\tau} = \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)} \overline{z}_1 - \overline{z}_3 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}, \qquad \overline{z}(\tau_0) = z(\tau_0). \end{gathered} \tag{7.5}$$

Система дифференциальных уравнений (7.5) имеет частное решение $\overline{z}_1(\tau) \equiv 1$, $\overline{z}_2(\tau) =$ $= \overline{z}_3(\tau) = \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0))$. Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{d\delta\overline{z}_1}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\tau)} \delta\overline{z}_3 - \delta\overline{z}_1,$$

$$\frac{d\delta\overline{z}_2}{d\tau} = -\delta\overline{z}_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)}\delta\overline{z}_3,$$

$$\frac{d\delta\overline{z}_3}{d\tau} = \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)}\delta\overline{z}_1 - \delta\overline{z}_3, \qquad \delta\overline{z}(\tau_0) = \delta z(\tau_0).$$

Поскольку первое и третье уравнения в правой части не содержат вариацию $\delta\overline{z}_2$, то целесообразно ввести вектор $\delta\mathbf{z}^* = (\delta\overline{z}_1, \delta\overline{z}_3)^T$ и представить уравнение для этого вектора в матричном виде

$$\frac{d\delta\mathbf{z}^*}{d\tau} = A^*(\tau)\delta\mathbf{z}^*(\tau).$$

Отметим, что в силу свойств решения $\varphi(\tau)$ существует предел $A_0 = \lim_{\tau\to+\infty} A^*(\tau)$. Матрицу $A^*(\tau)$ представим в виде $A^*(\tau) = A_0 + \delta A^*(\tau)$, тогда, применяя формулу Коши, получаем интегральное представление

$$\delta\mathbf{z}^*(\tau) = e^{A_0(\tau-\tau_0)}\delta\mathbf{z}^*(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{A_0(\tau-s)}\delta A^*(s)\delta\mathbf{z}^*(s)\,ds.$$

Нетрудно установить, что

$$e^{A_0\tau} = E_+ \exp\left\{-\left(1 - \sqrt{\frac{|\mu_2|}{\mu_1}}\right)\tau\right\} + E_- \exp\left\{-\left(1 + \sqrt{\frac{|\mu_2|}{\mu_1}}\right)\tau\right\},$$

где

$$E_\pm = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \pm\dfrac{1}{2\sqrt{|\det A|}} \\ \pm\dfrac{\sqrt{|\det A|}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу лемм 7.1 и 7.2

$$\|e^{A_0\tau}\| \le \frac{1 + |\det A|}{\sqrt{|\det A|}}e^{-\gamma\tau} = a_0 e^{-\gamma\tau}, \qquad \tau \ge 0,$$

$$\|e^{A_0(\tau-s)}\delta A_*(s)\| \le N(\tau_0)(1 + |\det A|)|z_2(\tau_0) - \mu_1|e^{-\gamma(\tau-s)-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)} =$$

$$= N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|e^{-\gamma(\tau-s)-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)}, \qquad \tau_0 \le s \le \tau.$$

Определим функцию $w(\tau) = e^{\gamma\tau}\|\delta z_*(\tau)\|$, тогда

$$w(\tau) \le a_0 w(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|e^{-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)}w(s)\,ds, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Применяя лемму Гроноулла – Беллмана, получаем неравенство

$$w(\tau) \le a_0 w(\tau_0)\exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\}, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Поэтому

$$\|\delta\mathbf{z}^*(\tau)\| \leq a_0 \exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\|, \quad \tau \geq \tau_0.$$

Из второго уравнения системы (5.9) по формуле Коши, с учетом условия $\delta\overline{z}_2(\tau_0) = 0$, получим

$$|\delta\overline{z}_2(\tau)| \leq N_1(\tau_0)\int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\tau-s)}|\delta\overline{z}_3(s)|\,ds \leq$$

$$\leq \frac{a_0N_1(\tau_0)}{1-\gamma}\exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\sigma(\tau_0).$$

Таким образом, с учетом неравенства (7.4) имеем

$$z_2(\tau) \leq \varphi(\tau-\tau_0; z_2(\tau_0)) + \frac{a_0N_1(\tau_0)}{1-\gamma}\exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\sigma(\tau_0), \quad \tau \geq \tau_0.$$

Лемма доказана.

***Следствие* 7.1.** *В условиях леммы* 7.1 *при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$z_2(\tau) \leq \mu_1 + \delta_0\chi(\delta_0)e^{-(\tau-\tau_0)} + \frac{a_0N_1(\tau_0)}{1-\gamma}\exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\sigma_0. \quad (7.6)$$

***Следствие* 7.2.** *В условиях леммы* 7.1 *при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$\sigma(\tau) \leq a_0 \exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\sigma(\tau_0). \quad (7.7)$$

Далее докажем следующее утверждение.

Лемма 7.6. *Предположим, что начальные условия для задачи Коши* (5.9) *таковы, что* $z_3(\tau_0) < z_2(\tau_0)$. *Пусть*

$$\tau_2 = \sup\{\tau \geq \tau_0\,|\forall s \in [\tau_0,\tau]\ z_3(s) < z_2(s)\} \leq +\infty.$$

Тогда при всех $\tau \in [\tau_0, \tau_2]$ *справедливы оценки*

$$\sigma(\tau) \leq \sqrt{2}a_0 \exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\sigma(\tau_0),$$

$$|z_2(\tau) - \varphi(\tau-\tau_0; z_2(\tau_0))| \leq \frac{a_0N_1(\tau_0)}{1-\gamma}\exp\left\{\frac{N(\tau_0)a_0\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\sigma(\tau_0).$$

Доказательство. Из второго уравнения системы (5.9) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_2}{d\tau} \leq \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A|z_2 - 2z_2^2}{2z_2}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_2]. \quad (7.8)$$

По теореме о дифференциальном неравенстве при всех $\tau \geq \tau_0$ выполняется оценка $z_2(\tau) \leq \leq \varphi(\tau)$.

Также из условия леммы и первого уравнения системы (5.9) следует неравенство

$$\frac{dz_1}{d\tau} \leq 1 - z_1(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_2]. \tag{7.9}$$

Поэтому, применяя теорему о дифференциальном неравенстве, получаем оценку

$$z_1(\tau) \leq 1 + e^{-(\tau-\tau_0)}(z_1(\tau_0) - 1), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_2].$$

Из системы (5.9) следует система дифференциальных неравенств

$$\frac{dz_1}{d\tau} \geq \frac{1}{\varphi(\tau)} z_3 - z_1,$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} \geq -z_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} z_3 + \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)},$$

$$\frac{dz_3}{d\tau} \geq \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)} z_1 - z_3 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}$$

при всех $\tau \in [\tau_0, \tau_2]$.

Правые части этой системы неравенств удовлетворяют условию Важевского, поэтому по теореме о дифференциальном неравенстве при всех $\tau \in [\tau_0, \tau_2]$ справедлива оценка

$$\mathbf{z}(\tau) \geq \overline{\mathbf{z}}(\tau),$$

где $\overline{\mathbf{z}}(\tau)$ — решение задачи Коши (7.5).

Из рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 7.6, при всех $\tau \in [\tau_0, \tau_2]$ следуют неравенства

$$1 - a_0 \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \sigma(\tau_0) \leq z_1(\tau) \leq$$

$$\leq 1 + e^{-(\tau-\tau_0)}(z_1(\tau_0) - 1),$$

$$\varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)) - \frac{a_0 N_1(\tau_0)}{1-\gamma} \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \sigma(\tau_0) \leq$$

$$\leq z_2(\tau) \leq \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)),$$

$$\varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)) - a_0 \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \sigma(\tau_0) \leq$$

$$\leq z_3(\tau) \leq \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)).$$

Поскольку $\gamma < 1$, то из этих неравенств следует утверждение леммы.

Установим теперь в условиях леммы 7.6 оценки для $z_2(\tau)$ при всех значениях $\tau \geq \tau_0$. Предварительно введем обозначения

$$N_1^* = \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\sqrt{|\det A|}}, \qquad N^* = \frac{1}{(2\sqrt{2}-1)|\det A|},$$

$$\omega(\tau_0) = \frac{N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} + N^* M(\tau_0)|\delta(\tau_0)| +$$

$$+ N^* \frac{a_0 N_1(\tau_0)}{1-\gamma} \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\}\sigma(\tau_0),$$

$$M(\tau_0) = \begin{cases} 1, & \delta(\tau_0) \geq 0, \\ \dfrac{\mu_1 \beta z_2(\tau_0)}{(\mu_1 + 2|\mu_2|) z_2(\tau_0) - |\det A|}, & \delta(\tau_0) < 0. \end{cases}$$

Лемма 7.7. *В условиях леммы* 7.6 *при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$z_2(\tau) \leq \mu_1 + \delta_0 \chi(\delta_0) e^{-(\tau-\tau_0)} + \frac{\sqrt{2} a_0^2 N_1^*}{1-\gamma} \exp\left\{\omega(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \sigma(\tau_0). \tag{7.10}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\tau_2 < +\infty$. Из леммы 7.6 следуют неравенства

$$\sigma(\tau_2) \leq \sqrt{2} a_0 \exp\left\{\frac{a_0 N(\tau_0)\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau_2-\tau_0)} \sigma(\tau_0), \tag{7.11}$$

$$z_2(\tau_2) \leq \varphi(\tau_2 - \tau_0; z_2(\tau_0)). \tag{7.12}$$

Лемма 7.5 гарантирует выполнение при всех $\tau \geq \tau_2$ неравенства

$$z_2(\tau) \leq \varphi(\tau - \tau_2; z_2(\tau_2)) + \frac{a_0 N_1(\tau_2)}{1-\gamma} \exp\left\{\frac{a_0 N(\tau_2)\sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_2)|}{\beta(\tau_2)}\right\} e^{-\gamma(\tau_2-\tau_0)} \sigma(\tau_2). \tag{7.13}$$

Из неравенства (7.12) следует, что при всех $\tau \geq \tau_2$ выполняется неравенство

$$\varphi(\tau - \tau_2; z_2(\tau_2)) \leq \varphi(\tau - \tau_2; \varphi(\tau_2 - \tau_0; z_2(\tau_0))) = \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)).$$

Здесь учтено групповое свойство решений автономных дифференциальных уравнений и неубывание решений дифференциальных уравнений по начальным условиям (вследствие единственности решений задачи Коши).

Поскольку $z_2(\tau_2) \geq \sqrt{|\det A|}$, то справедливы оценки

$$N_1(\tau_2) \leq N_1^*, \qquad \beta(\tau_2) \geq 1, \qquad N(\tau_2) \leq N^*.$$

Как следствие лемм 7.1 и 7.2, получаем

$$|\delta(\tau_2)| = |z_2(\tau_2) - \mu_1| \leq |\varphi(\tau_2 - \tau_0; z_2(\tau_0)) - \mu_1| + |z_2(\tau_2) - \varphi(\tau_2 - \tau_0; z_2(\tau_0))| \leq$$

$$\leq M(\tau_0) e^{-\beta(\tau_0)(\tau_2-\tau_0)}|\delta(\tau_0)| + \frac{a_0 N_1(\tau_0)}{1-\gamma} \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|}|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma(\tau_2-\tau_0)} \sigma(\tau_0) \leq$$

$$\leq M(\tau_0)|\delta(\tau_0)| + \frac{a_0 N_1(\tau_0)}{1-\gamma} \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} \sigma(\tau_0).$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\frac{N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} + \frac{N(\tau_2)|\delta(\tau_2)|}{\beta(\tau_2)} \leq \frac{N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} + N^* M(\tau_0)|\delta(\tau_0)| +$$

$$+ \frac{a_0 N_1 N^*(\tau_0)}{1-\gamma} \exp\left\{\frac{N(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|} |\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} \sigma(\tau_0) = \omega(\tau_0).$$

Далее, из неравенства (7.13) при всех $\tau \geq \tau_2$ следует оценка

$$z_2(\tau) \leq \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)) + \frac{\sqrt{2} a_0^2 N_1^*}{1-\gamma} \exp\left\{\omega(\tau_0) a_0 \sqrt{|\det A|}\right\} e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \sigma(\tau_0).$$

Очевидно, что это неравенство выполняется и при $\tau \in [\tau_0, \tau_2]$. Поэтому оно имеет место и в случае, если $\tau_2 = +\infty$. Очевидно, что вследствие лемм 7.1 и 7.2 из этого неравенства следует утверждение леммы.

Рассмотрим далее случаи систем (5.10) и (5.11), предварительно установив общее свойство соответствующих основных систем дифференциальных уравнений в случае, когда $|\det A| > 0$.

Лемма 7.8. *Если для начальных условий выполняется неравенство* $z_3(\tau_0) \geq z_2(\tau_0)$, *то при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство* $z_3(\tau) \geq z_2(\tau)$.

Если для начальных условий выполняется неравенство $z_3(\tau_0) \leq z_2(\tau_0)$, *то при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство* $z_3(\tau) \leq z_2(\tau)$.

Доказательство. Отметим, что из второго уравнения системы (5.10) или системы (5.11) следует неравенство

$$\frac{dz_2^2}{d\tau} + 2z_2^2 \geq \frac{|\det A|}{2}.$$

Поэтому из формулы Коши и теоремы о дифференциальном неравенстве следует, что

$$z_2^2(\tau) \geq e^{-2(\tau-\tau_0)} z_2^2(\tau_0) + \frac{|\det A|}{4}(1 - e^{-2(\tau-\tau_0)}) \geq \frac{|\det A|}{4} > 0, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Вычитая из третьего уравнения системы (5.10) (или системы (5.11)) второе уравнение и применяя формулу Коши, получаем интегральное представление

$$z_3(\tau) - z_2(\tau) = \exp\left\{\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left(\mp\frac{|\operatorname{tr} A|}{2z_2(s)} - 1\right) ds\right\} (z_3(\tau_0) - z_2(\tau_0)).$$

Здесь знак $-$ относится к системе (5.10), а знак $+$ — к системе (5.11).

Из этого представления утверждение леммы следует очевидным образом.

Случай 3. Введем обозначения

$$a_1 = \frac{1 + 2|\det A|}{\sqrt{2|\det A|}}, \qquad \gamma_1 = 1 - \sqrt{\frac{|\mu_2|}{2\mu_1}}, \qquad b_1 = \frac{\sqrt{2|\det A|^2 + 17|\det A| + 8}}{2\sqrt{2}},$$

$$N_2(\tau_0) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\det^2 A + \operatorname{tr}^2 A}}{2\mu_1}, & \delta(\tau_0) \geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{\det^2 A + \operatorname{tr}^2 A}}{2z_2(\tau_0)}, & \delta(\tau_0) < 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Лемма 7.9. *Предположим, что* $z_3(\tau_0) \geq z_2(\tau_0)$. *Тогда для системы* (5.10) *при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$z_2(\tau) \leq \varphi(\tau - \tau_0; z_2(\tau_0)) + \frac{a_1 N_2(\tau_0)}{1-\gamma_1} \exp\left\{\frac{b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\}(e^{-\gamma_1(\tau-\tau_0)} - e^{\tau_0-\tau})\sigma(\tau_0).$$

Доказательство. С учетом леммы 7.8 из первого уравнения системы (5.10) следует неравенство

$$\frac{dz_1}{d\tau} \geq 1 - z_1,$$

откуда, применяя теорему о дифференциальном неравенстве, получаем

$$z_1(\tau) \geq 1 + e^{-(\tau-\tau_0)}(z_1(\tau_0) - 1) \geq 1$$

при всех $\tau \geq \tau_0$.

Из второго уравнения системы (5.10) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_2}{d\tau} \geq \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A| z_2 - 2z_2^2}{2z_2}.$$

Отсюда, по теореме о дифференциальном неравенстве, имеем $z_2(\tau) \geq \varphi(\tau) \equiv \varphi(\tau - \tau_0, z_2(\tau_0))$. Поэтому из системы (5.10) получим дифференциальные неравенства

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &\leq -z_1 + \frac{1}{\varphi(\tau)} z_3, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &\leq \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} z_1 - z_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} z_3 + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}, \\ \frac{dz_3}{d\tau} &\leq \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} z_1 - z_3 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Система дифференциальных неравенств (7.15) удовлетворяет условию Важевского, поэтому

$$\mathbf{z}(\tau) \leq \overline{\mathbf{z}}(\tau), \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Здесь $\overline{\mathbf{z}}(\tau)$ — решение задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{z}_1}{d\tau} &= -\overline{z}_1 + \frac{1}{\varphi(\tau)} \overline{z}_3, \\ \frac{d\overline{z}_2}{d\tau} &= \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} \overline{z}_1 - \overline{z}_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} \overline{z}_3 + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}, \end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\frac{d\overline{z}_3}{d\tau} = \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}\overline{z}_1 - \overline{z}_3 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}$$

с начальным условием $\overline{\mathbf{z}}(\tau_0) = \mathbf{z}(\tau_0)$.

Система дифференциальных уравнений (7.16) имеет частное решение $\overline{z}_1(\tau) \equiv 1,\ \overline{z}_2(\tau) = \overline{z}_3(\tau) \equiv \varphi(\tau)$. Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\overline{z}_1}{d\tau} &= -\delta\overline{z}_1 + \frac{1}{\varphi(\tau)}\delta\overline{z}_3, \\ \frac{d\delta\overline{z}_2}{d\tau} &= \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}\delta\overline{z}_1 - \delta\overline{z}_2 + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)}\delta\overline{z}_3, \\ \frac{d\delta\overline{z}_3}{d\tau} &= \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}\delta\overline{z}_1 - \delta\overline{z}_3, \qquad \delta\overline{z}(\tau_0) = \delta z(\tau_0). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Введем вектор $\delta\mathbf{z}^* = (\delta\overline{z}_1, \delta\overline{z}_3)^T$. Тогда уравнение для этого вектора представим в матричном виде

$$\frac{d\delta\mathbf{z}^*}{d\tau} = A^*(\tau)\delta\mathbf{z}^*.$$

Здесь

$$A^*(\tau) = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{\varphi(\tau)} \\ \dfrac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} & -1 \end{pmatrix}.$$

Из свойств решения $\varphi(\tau)$ следует существование предела $A_0 = \lim_{\tau\to+\infty} A^*(\tau),\ \delta A^*(\tau) = A^*(\tau) - A_0$. Тогда, применяя формулу Коши, получаем интегральное представление

$$\delta\mathbf{z}^*(\tau) = e^{A_0(\tau-\tau_0)}\delta\mathbf{z}^*(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{A_0(\tau-s)}\delta A^*(s)\,\delta\mathbf{z}^*(s)ds. \tag{7.18}$$

Нетрудно установить, что

$$e^{A_0\tau} = E_+ \exp\left\{-\left(1 - \sqrt{\frac{|\mu_2|}{2\mu_1}}\right)\tau\right\} + E_- \exp\left\{-\left(1 + \sqrt{\frac{|\mu_2|}{2\mu_1}}\right)\tau\right\},$$

где

$$E_\pm = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2|\det A|}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{|\det A|}{2}} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Из этого представления следуют оценки

$$\|e^{A_0\tau}\| \le a_1 e^{-\gamma_1\tau}, \qquad \tau \ge 0,$$

$$\|e^{A_0(\tau-s)}\delta A^*(s)\| \le b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|e^{-\gamma_1(\tau-s)-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)}, \qquad \tau_0 \le s \le \tau.$$

Из интегрального представления (7.18) следует оценка

$$\|\delta\mathbf{z}^*(\tau)\| \le a_1 e^{-\gamma_1(\tau-\tau_0)}\|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\| + b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)| \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\gamma_1(\tau-s)-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)}\|\delta\mathbf{z}^*(s)\|\,ds,\ \tau \ge \tau_0.$$

Для функции $w_1(\tau) = e^{\gamma_1\tau}\|\delta\mathbf{z}^*(\tau)\|$ имеет место интегральное неравенство

$$w_1(\tau) \le a_1 w_1(\tau_0) + b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)| \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)} w_1(s)\,ds, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Применяя лемму Гронуолла – Беллмана, получаем оценку

$$w_1(\tau) \le a_1 w_1(\tau_0)\exp\left\{ b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)| \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)}\,ds \right\} <$$

$$< a_1 w_1(\tau_0)\exp\left\{ \frac{b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} \right\}, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Поэтому выполняется оценка

$$\|\delta\mathbf{z}^*(\tau)\| \le a_1 \exp\left\{ \frac{b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} \right\} e^{-\gamma_1(\tau-\tau_0)}\|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\|, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Из второго уравнения системы уравнений в вариациях (7.17) следует интегральное представление

$$\delta\overline{z}_2(\tau) = e^{-(\tau-\tau_0)}\delta\overline{z}_2(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\tau-s)} \left(\frac{|\det A|}{2\varphi(s)}\delta\overline{z}_1(s) + \frac{|\operatorname{tr}\, A|}{2\varphi(s)}\delta\overline{z}_3(s) \right) ds.$$

Учитывая, что $\delta\overline{z}_2(\tau_0) = 0$, и применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем оценку

$$|\delta\overline{z}_2(\tau)| \le N_2(\tau_0) \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\tau-s)}\|\delta\mathbf{z}^*(s)\|\,ds.$$

Отсюда выводим

$$|\delta\overline{z}_2(\tau)| \le a_1 N_2(\tau_0)\exp\left\{ \frac{b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} \right\}\|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\| \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\tau+s-\gamma_1 s+\gamma_1\tau_0}\,ds \le$$

$$\le \frac{a_1 N_2(\tau_0)}{1-\gamma_1}\exp\left\{ \frac{b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)} \right\}(e^{-\gamma_1(\tau-\tau_0)} - e^{-(\tau-\tau_0)})\|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\|, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$z_2(\tau) \le \varphi(\tau-\tau_0; z_2(\tau)) + \frac{a_1 N_2(\tau_0)}{1-\gamma_1} \exp\left\{\frac{b_1 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} (e^{-\gamma_1(\tau-\tau_0)} - e^{\tau_0-\tau})\sigma(\tau_0)$$

при $\tau \ge \tau_0$.

Лемма доказана.

Лемма 7.10. *Пусть* $z_3(\tau_0) \le z_2(\tau_0)$. *Тогда для решений системы* (5.10) (*и системы* (5.11)) *выполняется неравенство*

$$z_2(\tau) \le \mu_1(1-e^{\tau_0-\tau}) + e^{\tau_0-\tau} z_2(\tau_0) + \frac{|\det A| N(\tau_0)}{\beta(\tau_0)-1}(e^{\tau_0-\tau} - e^{\beta(\tau_0)(\tau_0-\tau)}) +$$

$$+\frac{|\det A|(\tau-\tau_0)e^{\tau_0-\tau}}{\mu_1}(z_1(\tau_0)-1) + \frac{|\det A| N(\tau_0) e^{\tau_0-\tau}}{\beta(\tau_0)}(1-e^{\beta(\tau_0)(\tau_0-\tau)}). \tag{7.19}$$

Доказательство. Из первого уравнения системы (5.10) (или (5.11)) получаем оценку

$$z_1(\tau) \le 1 + e^{\tau_0-\tau}(z_1(\tau_0)-1), \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Поэтому из второго уравнения системы получим дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_2}{d\tau} \le \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A| z_2 - 2z_2^2}{2z_2} + \frac{e^{\tau-\tau_0}|\det A|(z_1(\tau_0)-1)}{2z_2}.$$

По теореме о дифференциальном неравенстве выполняется неравенство $z_2(\tau) \le \psi(\tau)$, где $\psi(\tau)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{|\det A|}{\psi} + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} - \psi + \frac{e^{\tau-\tau_0}|\det A|(z_1(\tau_0)-1)}{2\psi}, \qquad \psi(\tau_0) = z_2(\tau_0).$$

С другой стороны, из той же теоремы о дифференциальном неравенстве следует неравенство $\psi(\tau) \ge \varphi(\tau) \equiv \varphi(\tau-\tau_0; z_2(\tau_0))$, $\tau \ge \tau_0$. Поэтому

$$\frac{d\psi}{d\tau} \le \frac{|\det A|}{\varphi(\tau)} + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} - \psi + \frac{e^{\tau_0-\tau}|\det A|(z_1(\tau_0)-1)}{\varphi(\tau)}, \qquad \psi(\tau_0) = z_2(\tau_0).$$

Таким образом, с учетом формулы Коши получим неравенство

$$\psi(\tau) \le e^{\tau_0-\tau} z_2(\tau_0) + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}(1-e^{\tau_0-\tau}) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{s-\tau}\left(\frac{|\det A|}{\varphi(s)} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\tau_0-s}|\det A|(z_1(\tau_0)-1)}{2\varphi(s)}\right) ds \le e^{\tau_0-\tau} z_2(\tau_0) + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}(1-e^{\tau_0-\tau}) +$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{s-\tau}\left(\frac{|\det A|}{\mu_1} + \frac{e^{\tau_0-s}|\det A|(z_1(\tau_0)-1)}{2\mu_1}\right) ds +$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{s-\tau}\left(|\det A| + e^{\tau_0-s}\frac{|\det A|}{2}(z_1(\tau_0)-1)\right)\frac{|\mu_1-\varphi(s)|}{\varphi(s)\mu_1}\, ds.$$

Применяя леммы 7.1 и 7.2, получаем оценку

$$\psi(\tau) \leq e^{\tau_0-\tau} z_2(\tau_0) + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}(1-e^{\tau_0-\tau}) + \frac{|\det A|}{\mu_1}(1-e^{\tau_0-\tau}) +$$

$$+\frac{|\det A| N(\tau_0)}{\beta(\tau_0)-1}(e^{\tau_0-\tau} - e^{\beta(\tau_0)(\tau_0-\tau)}) +$$

$$+\frac{|\det A|(\tau-\tau_0)e^{\tau_0-\tau}}{2\mu_1}(z_1(\tau_0)-1) + \frac{|\det A| N(\tau_0) e^{\tau_0-\tau}}{2\beta(\tau_0)}(1-e^{-\beta(\tau_0)(\tau-\tau_0)})(z_1(\tau_0)-1).$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} - \sqrt{1+\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}}\right), \qquad a_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{tr}^2 A + 6|\det A|}{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}},$$

$$b_2 = \left(\frac{\det^2 A}{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|} + \frac{1}{4}\left(1+\frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}}\right)^2 + \right.$$

$$+\frac{\det^2 A}{16}\left(1+\frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}}\right)^2 + \left(\frac{2|\det A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{|\operatorname{tr} A|}{4}\left(1+\frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 8|\det A|}}\right)\right)^2\right)^{1/2},$$

$$N_3(\tau_0) = \begin{cases} \dfrac{|\det A|}{2\mu_1}, & \delta(\tau_0) \geq 0, \\[2ex] \dfrac{|\det A|}{2z_2(\tau_0)}, & \delta(\tau_0) < 0. \end{cases}$$

Лемма 7.11. *Предположим, что* $z_3(\tau_0) \geq z_2(\tau_0)$. *Тогда для системы* (5.11) *при всех* $\tau \geq \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$z_2(\tau) \leq \varphi(\tau-\tau_0; z_2(\tau_0)) + \frac{a_2 N_3(\tau_0)}{1-\gamma_2}\exp\left\{\frac{b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\}(e^{-\gamma_2(\tau-\tau_0)} - e^{\tau_0-\tau})\sigma(\tau_0). \quad (7.20)$$

Доказательство. Из первого уравнения системы дифференциальных уравнений (5.11) и предположения леммы следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_1}{d\tau} \geq 1 - z_1.$$

Из этого неравенства следует, что $z_1(\tau) \geq 1$ при всех $\tau \geq \tau_0$. Из второго уравнения системы (5.11) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dz_2}{d\tau} \geq \frac{2|\det A| + |\operatorname{tr} A| z_2 - 2z_2^2}{2z_2}, \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Применяя теорему о дифференциальном неравенстве, получаем $z_2(\tau) \geq \varphi(\tau)$ при всех $\tau \geq \tau_0$. Из первого и третьего неравенств этой системы следуют неравенства

$$\frac{dz_1}{d\tau} \leq \frac{1}{\varphi(\tau)} z_3 - z_1,$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} \leq \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} z_1 - z_2 + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2},$$

$$\frac{dz_3}{d\tau} \leq \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} z_1 + \left(\frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} - 1\right) z_3(\tau) + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}.$$

Из этой системы неравенств следует оценка

$$\mathbf{z}(\tau) \leq \overline{\mathbf{z}}(\tau), \qquad \tau \geq \tau_0.$$

Здесь $\overline{\mathbf{z}}(\tau)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\overline{z}_1}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\tau)} \overline{z}_3 - \overline{z}_1,$$

$$\frac{d\overline{z}_2}{d\tau} = \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} \overline{z}_1 - \overline{z}_2 + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} + \frac{|\operatorname{tr} A|}{2}, \tag{7.21}$$

$$\frac{d\overline{z}_3}{d\tau} = \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} \overline{z}_1 + \left(\frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} - 1\right) \overline{z}_3(\tau) + \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)}, \qquad \overline{\mathbf{z}}(\tau_0) = \mathbf{z}(\tau_0).$$

Эта система имеет частное решение $\overline{z}_1(\tau) \equiv 1$, $\overline{z}_2(\tau) = \overline{z}_3(\tau) \equiv \varphi(\tau)$. Соответствующая система уравнений в вариациях имеет вид

$$\frac{d\delta\overline{z}_1}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(\tau)} \delta\overline{z}_3 - \delta\overline{z}_1,$$

$$\frac{d\delta\overline{z}_2}{d\tau} = \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} \delta\overline{z}_1 - \delta\overline{z}_2,$$

$$\frac{d\delta\overline{z}_3}{d\tau} = \frac{|\det A|}{2\varphi(\tau)} \delta\overline{z}_1 + \left(\frac{|\operatorname{tr} A|}{2\varphi(\tau)} - 1\right) \delta\overline{z}_3(\tau), \qquad \delta\overline{z}(\tau_0) = \delta z(\tau_0).$$

Определим вектор $\delta\mathbf{z}^* = (\delta\overline{z}_1, \delta\overline{z}_3)^T$, тогда

$$\frac{d\delta\mathbf{z}^*}{d\tau} = A^*(\tau)\delta\mathbf{z}^*(\tau).$$

Обозначим $A_0 = \lim_{\tau\to+\infty} A^*(\tau)$, $\delta A^*(\tau) = A^*(\tau) - A_0$, тогда

$$\delta\mathbf{z}^*(\tau) = e^{A_0(\tau-\tau_0)}\delta\mathbf{z}^*(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{A_0(\tau-s)}\delta A^*(s)\,\delta\mathbf{z}^*(s)\,ds.$$

Далее,

$$\exp A_0\tau = E_+ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}-\sqrt{1+\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}}\right)\tau\right\} + E_- \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}+\sqrt{1+\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}}\right)\tau\right\}.$$

Здесь

$$E_\pm = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\left(1 \mp \dfrac{\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}}\right) & -\dfrac{1}{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}} \\ \dfrac{\mu_1\mu_2}{2\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}} & \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \dfrac{\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}}\right) \end{pmatrix}.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\|\exp A_0\tau\| \le a_2 e^{-\gamma_2\tau}, \qquad \tau \ge 0.$$

Непосредственными вычислениями можно показать выполнение неравенства

$$\|\exp\{A_0(\tau-s)\}\delta A^*(s)\| \le b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|e^{-\gamma_2(\tau-s)-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)}, \qquad \tau_0 \le s \le \tau.$$

Обозначим $w_2(s) = e^{\gamma_2 s}\|\delta\mathbf{z}^*(s)\|$, тогда получим интегральное неравенство

$$w_2(\tau) \le a_2 w_2(\tau_0) + b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)| \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta(\tau_0)(s-\tau_0)} w_2(s)\, ds.$$

Применяя лемму Гронуолла – Беллмана, получаем оценку

$$w_2(\tau) \le a_2 w_2(\tau_0) \exp\left\{\frac{b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\}, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Таким образом,

$$\|\delta\mathbf{z}^*(\tau)\| \le a_2 \exp\left\{\frac{b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} e^{-\gamma_2(\tau-\tau_0)}\|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\|, \qquad \tau \ge \tau_0.$$

Из второго уравнения системы уравнений (7.21) с учетом того, что $\delta\mathbf{z}^*(\tau_0) = 0$, следует

$$\delta\overline{z}_2(\tau) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{s-\tau}\frac{|\det A|}{2\varphi(s)}\delta\overline{z}_1(s)\, ds.$$

Принимая во внимание оценку для $\delta\overline{z}_1(s)$, получаем

$$|\delta\overline{z}_2(\tau)| \le a_2 N_3(\tau_0) \exp\left\{\frac{b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\gamma_2(s-\tau_0)+s-\tau}\, ds \|\delta\mathbf{z}^*(\tau_0)\| =$$

$$= a_2 N_3(\tau_0) \exp\left\{\frac{b_2 N(\tau_0)|\delta(\tau_0)|}{\beta(\tau_0)}\right\} \frac{e^{-\gamma_2(\tau-\tau_0)} - e^{\tau_0-\tau}}{1-\gamma_2}\sigma(\tau_0).$$

Из последнего неравенства утверждение леммы 7.11 следует очевидным образом.

8. Заключение. Таким образом, в настоящей работе предложены новые подходы к качественному анализу псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$. В основу этих подходов положены свойства элементов пространства $\mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^2)$ и фундаментальные результаты геометрии выпуклых тел, а также теоремы обыкновенных дифференциальных уравнений — метод сравнения, метод интегральных неравенств и метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений Чаплыгина – Важевского.

Данные результаты позволяют получить двусторонние оценки для площади решений. В частных случаях эти оценки являются такими, что сводят задачу о вычислении площади решений к интегрированию некоторого дифференциального уравнения первого порядка.

Литература

1. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
2. *Плотникова Н. В.* Системы линейных дифференциальных уравнений с π-производной и линейные дифференциальные включения // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 11. – С. 127 – 140.
3. *Lakshmikantham V., Bhaskar T. G., Devi J. V.* Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2006. – 202 p.
4. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. – 1937. – **2(44)**, № 5. – С. 947 – 972.
5. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. II. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. – 1937. – **2(44)**, № 6. – С. 1205 – 1238.
6. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. – 1938. – **3(45)**, № 1. – С. 27 – 46.
7. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Мат. сб. – 1938. – **3(45)**, № 2. – С. 227 – 251.
8. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 233 с.
9. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Получено 30.03.15,
после доработки — 24.11.16