УДК 517.518

В. Н. Левчук (Полтав. нац. техн. ун-т)

О БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСАХ ЯДЕР, ПОРОЖДАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We establish necessary and sufficient conditions for a system of functions generated by differential equations of the second order to be a basis. Our method is based on the application of the Muckenhoupt condition.

Отримано необхідні та достатні умови базисності системи функцій, яка породжується диференціальними рівняннями другого порядку. Основний метод полягає у використанні умови Макенхаупта.

Введение. Изучению вопросов базисности семейств функций посвящена обширная литература. Выделим одно из направлений исследований в этой области, которое было начато Б. С. Павловым [1] и стало отправной точкой многочисленных работ, посвященных изучению базисности функций [2–4]. Глубокая связь между базисностью систем функций и спектральным анализом несамосопряженных операторов инициировала ряд фундаментальных исследований, принадлежащих Г. М. Губрееву [4].

Данная работа является развитием и обобщением статьи [5]. Пусть φ — такая вещественная функция из $C^1(\mathbb{R})$, что

$$\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \qquad \varphi(-x) = (-1)^\nu \varphi(x), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(при этом $(-1)^\nu = \exp i\pi\nu$ с учетом надлежащей ветви корня, если ν рациональное), причем

$$\int\limits_0^{\mathbb{C}} \varphi(x)dx < \infty, \qquad \int\limits_0^{\mathbb{C}} \frac{dx}{\varphi(x)} < \infty, \quad 0 < C < \infty.$$

Обозначим через $L^2_\varphi(-a,a),\ 0 < a \leq \infty$, гильбертово пространство функций относительно скалярного произведения,

$$\langle f, g \rangle_\varphi = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\overline{g(x)}|\varphi(x)|\, dx.$$

Обозначим через $f(x,\lambda)$ решение интегрального уравнения

$$f(x,\lambda) + \lambda^2 \int\limits_0^x \frac{dt}{\varphi(t)} \int\limits_0^t f(s,\lambda)\varphi(s)\, ds = 1$$

(которое при $\varphi(x) = x^\nu$ эквивалентно уравнению Бесселя). Зададим функцию

$$e(x,\lambda) = f(x,\lambda) - \frac{i}{\lambda} f'(x,\lambda)$$

(отметим, что $e(x,\lambda) = e^{i\lambda x}$ при $\varphi(x) \equiv \mathrm{const}$).

Данная работа посвящена описанию безусловных базисов, порождаемых $e(x,\lambda)$,

$$\big\{e(x,\lambda_k);\ \lambda_k \in \Lambda\big\}$$

в пространстве $L^2_\varphi(-a,a)$, где последовательность $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C} \colon k \in \mathbb{Z}\}$ не имеет конечных предельных точек и находится на положительном расстоянии от $\mathbb{R}$. Функция $e(x,\lambda)$ имеет резольвентное представление

$$e(x,\lambda) = (I - \lambda B)^{-1}\,\mathbb{1},$$

где B — компактный оператор в $L^2_\varphi(-a,a)$ со спектром в нуле. Заметим, что функции $e(x,\lambda_k)$ являются собственными (в смысле Фредгольма) для оператора K $\left(Ke(x,\lambda_k) = \dfrac{1}{\lambda_k}e(x,\lambda_k)\right)$, где K — одномерное возмущение вольтеррова оператора B,

$$K = B + \langle\cdot, g\rangle_\varphi \mathbb{1}, \quad g \in L^2_\varphi(-a,a).$$

В основе доказательства базисности семейства $\{e(x,\lambda_k)\}$ лежит развитие методов исследований таких задач, предложенных Г. М. Губреевым [4].

1. Предварительные сведения. Пусть $\varphi(x)$ — такая вещественная функция на $\mathbb{R}$, что

$$\varphi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+; \qquad \varphi(-x) = (-1)^\nu \varphi(x), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

(при этом $(-1)^\nu = \exp i\pi\nu$ с учетом надлежащей ветви корня, если ν рациональное). Определим гильбертово пространство

$$L^2_\varphi(-a,a) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ f(x) \colon \int\limits_{-a}^{a} |f(x)|^2 |\varphi(x)| dx < \infty \right\}, \tag{1.2}$$

где $0 < a \leq \infty$. Справедливо разложение

$$L^2_\varphi(-a,a) = L_+ \oplus L_-,$$

где

$$L_\pm \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ f_\pm(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) \pm f(-x)\right) : f(x) \in L^2_\varphi(-a,a) \right\}.$$

Зададим в $L^2_\varphi(-a,a)$ линейный оператор

$$(Bf)(x) \stackrel{\text{df}}{=} i\int\limits_0^x f_-(t)dt + \frac{i}{\varphi(x)}\int\limits_0^x f_+(t)\varphi(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Нетрудно показать [6], что если

$$M = \int\limits_0^a \varphi(x)\int\limits_0^x \frac{dt}{\varphi(t)}dx < \infty : \tilde{M} = \int\limits_0^a \frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt < \infty, \tag{1.4}$$

то оператор B (1.3) ограничен. Если имеют место

$$b = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx < \infty, \qquad \tilde{b} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\varphi(x)} < \infty, \tag{1.5}$$

то справедливы (1.4). Оператор B (1.3) недиссипативен и имеет двумерную мнимую компоненту

$$\frac{B-B^*}{i}f=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\langle f_1,g_2\rangle\,(J_p)_{\alpha,\beta}g_\beta,\quad f\in L^2_\varphi(-a,a),$$

где

$$J_p=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad g_1=\left(\frac{\tilde b}{4b}\right)^{1/4}\mathbb{1},\qquad g_2(x)=\left(\frac{\tilde b}{4b}\right)^{1/4}\left\{\frac{\chi_+(x)}{\varphi(x)}-\frac{\chi_-(x)}{\varphi(-x)}\right\},$$

при этом $\mathbb{1}=\chi(x)$ и $\chi_\pm(x)$ — характеристические функции множеств $[-a,a]$ и $\mathbb{R}_\pm\cap[-a,a]$ соответственно.

Рассмотрим в безвесовом пространстве $L^2(-a,a)$ (которое совпадает с $L^2_\varphi(-a,a)$ (1.2) при $\varphi(x)\equiv 1\ \forall x\in[-a,a]$) оператор интегрирования

$$(\mathbb{J}f)(x)=i\int\limits_0^x f(x)\,dt. \tag{1.6}$$

При этом очевидно, что $\mathbb{J}=B$ (1.3), если $\varphi(x)\equiv 1$. Если для $\varphi(x)$ имеет место (1.5) и $\varphi(x)\neq 0$, $\dfrac{1}{\varphi(x)}\neq 0\ \forall x\in[0,a)$, то [6] оператор B (1.3) подобен оператору $\mathbb{J}$ (1.6).

Обозначим через $e(x,\lambda)$ функцию

$$e(x,\lambda)=(I-\lambda B)^{-1}\mathbb{1}, \tag{1.7}$$

где B имеет вид (1.3). Тогда

$$Be(x,\lambda)=\frac{e(x,\lambda)-\mathbb{1}}{\lambda}, \tag{1.8}$$

где

$$e(x,\lambda)=f(x,\lambda)-\frac{i}{\lambda}f'(x,\lambda), \tag{1.9}$$

$f(x,\lambda)$ — решение интегрального уравнения

$$f(x,\lambda)=1-\lambda^2\int\limits_0^x\frac{dt}{\varphi(t)}\int\limits_0^t f(x,\lambda)\varphi(s)\,ds. \tag{1.10}$$

Если имеет место оценка

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_0^x\varphi(t)\,dt\le M\quad\forall x\in[0,a], \tag{1.11}$$

то нетрудно видеть, что

$$|f(x)|\le 1+M^2x^2e^{Mx}$$

и, значит,

$$|e(x,\lambda)|\le(1+M)(1+M^2x^2|\lambda|^2)e^{Mx|\lambda|}.$$

Отсюда следует, что в случае (1.11) $e(x,\lambda)$ (1.7) является целой функцией экспоненциального типа, который мы обозначим через σ_φ.

***Замечание* 1.1.** Если $\varphi(x) \equiv \mathrm{const}$, то решение интегрального уравнения (1.10) имеет вид $f(x) = \cos x$ и, значит, $e(x,\lambda) = e^{i\lambda x}$ в силу (1.9).

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка.

Теорема 1.1. *Пусть для функции* $\varphi(x)$ (1.1) *имеет место* (1.5), *причем* $\varphi(x) \neq 0$ *и* $\varphi^{-1}(x) \neq 0$ $\forall x \in (0,a)$. *Тогда на прямой* $\mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|B(x)g\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}\,dz \le M\|g\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \quad \forall g \in L^2_\varphi(-a,a), \tag{1.12}$$

где $B(z) = B(1-zB)^{-1}$ — *резольвента Фредгольма оператора* B (1.3).

Доказательство. Поскольку оператор B подобен оператору $\mathbb{J}$ (1.6), то достаточно доказать оценку (1.12) для $\mathbb{J}$ в безвесовом пространстве $L^2(-a,a)$. Учитывая, что

$$\mathbb{J}(z)f = \mathbb{J}(I - z\mathbb{J})^{-1}f = \int\limits_0^x f(x-t)e^{izt}\,dt, \quad f \in L^2(-a,a), \tag{1.13}$$

получаем

$$\|\mathbb{J}(x)f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle \int\limits_0^x f(x-t)e^{izt}dt, e_k\right\rangle\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle e^{zt}, T^*e_k\right\rangle\right|,$$

где $\{e_k\}^\infty$ — произвольный ортонормированный базис в $L^2(-a,a)$, а оператор T имеет вид

$$(Tg)(x) = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt, \quad g \in L^2(-a,a). \tag{1.14}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}+iC} \|\mathbb{J}(x)f\|^2\,dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\left\langle e^{izt}, T^*e_k\right\rangle\right|^2 dz \le M\sum_{k=1}^{\infty}\|T^*e_k\| \le N\|T^*\|_2^2,$$

где $\|.\|_2$ — норма Гильберта – Шмидта. Завершает доказательство очевидное неравенство $\|T^*\|_2^2 \le K\|f\|^2$.

Зададим функцию

$$F(\lambda, g) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \langle e(x,\lambda), g(x)\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)}, \tag{1.15}$$

где $g \in L^2_\varphi(-a,a)$, а e имеет вид (1.7). При любом $g \in L^2_\varphi(-a,a)$ функция $F(\lambda,g)$ является целой функцией экспоненциального типа.

Очевидно, что

$$f(\lambda, B^*g) = \langle B(\lambda)\mathbb{1}, g\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)}$$

в силу (1.7), где $B(\lambda) = B(1-\lambda B)^{-1}$. Обозначим через A ограниченный и ограниченно обратимый оператор из $L^2_\varphi(-a,a)$ в безвесовое пространство $L^2(-a,a)$, который осуществляет подобие B (1.3) и $\mathbb{J}$ (1.6); $AB = \mathbb{J}A$. Тогда для $F(\lambda, B^*g)$ будем иметь

$$F(\lambda, B^*g) = \left\langle \mathbb{J}(\lambda)f, A^{*-1}g \right\rangle_{L^2(-a,a)},$$

где $f = A\mathbb{1} \in L^2(-a,a)$ и $\mathbb{J}(\lambda) = \mathbb{J}(I - \lambda\mathbb{J})^{-1}$. Используя формулу (1.13), получаем

$$F(\lambda, B^*g) = \left\langle e^{izt}, T^*(A^{*-1}g) \right\rangle_{L^2(-a,a)}, \tag{1.16}$$

при этом оператор T в $L^2(-a,a)$ имеет вид (1.14). Поскольку $T^*(A^{*-1}g) \in L^2(-a,a)$, то из теоремы Винера – Пэли следует, что

$$e^{i\lambda a}F(\lambda, B^*g) \in H^2_+.$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Если для функции* $\varphi(x)$ (1.1) *имеет место* (1.5), *то справедливы включения*

$$e^{i\lambda a}F(\lambda, B^*g) \in H^2_+, \qquad e^{-i\lambda a}F(\lambda, B^*g) \in H^2_- \quad \forall g \in L^2_\varphi(-a,a),$$

где $F(\lambda, g)$ *имеет вид* (1.15). *Кроме того,*

$$\|F(\lambda, B^*g)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^2_\varphi(-a,a)}. \tag{1.17}$$

Оценка (1.17) следует из равенства (1.16) в силу унитарности преобразования Фурье и ограниченности операторов A и A^{-1}, а также T (1.14).

***Замечание* 1.2.** Поскольку $\ker B = \{0\}$, если $\varphi(x) \neq 0$ почти всюду на $(-a,a)$, то при этом условии множество $B^*L^2_\varphi(-a,a)$ плотно в $L^2_\varphi(-a,a)$.

Таким образом, если $\varphi(x) \neq 0$ почти всюду, то отображение $g \to F$, задаваемое формулой (1.15), является ограниченным оператором на плотном множестве $g \in B^*L^2_\varphi(-a,a)$. Кроме того, из (1.16) следует, что тип функции $F(\lambda, B^*g)$ равен a.

2. Одномерные возмущения. Рассмотрим в пространстве $L^2_\varphi(-a;a)$ (1.2) оператор K,

$$Kh \stackrel{\text{df}}{=} Bh + \langle h, g\rangle\mathbb{1}, \quad h \in L^2_\varphi(-a;a), \tag{2.1}$$

где B имеет вид (1.3) и $\mathbb{1} = \chi_{(-a,a)}(x)$.

Лемма 2.1. *Для резольвент Фредгольма* $K(\lambda) = K(I - \lambda K)$, $B(\lambda) = B(I - \lambda K)^{-1}$ *операторов* K (2.1) *и* B (1.3) *справедлива формула*

$$K(\lambda)f = B(\lambda)f + \frac{\langle (I - \lambda B)^{-1}f, g\rangle}{1 - \lambda\langle e, g\rangle}e \tag{2.2}$$

для любого $f \in L^2_\varphi(-a,a)(1.2)$, *где* e *имеет вид* (1.7).

Доказательство. Пусть $(K - zI)^{-1}f = h$, тогда

$$f = (B - zI)h + \langle h, g\rangle\mathbb{1}$$

или

$$R_B(z)f = h + \langle h, g\rangle R_B(z)\mathbb{1}, \tag{2.3}$$

где $R_B(z) = (B - zI)^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\langle R_B(z)f, g\rangle = \langle h, g\rangle(1 + \langle R_B(z)\mathbb{1}, g\rangle),$$

поэтому

$$R_K(z)f = R_B(z)f - \frac{\langle R_B(z)f, g\rangle}{1+\langle R_B(z)\mathbb{1}, g\rangle} R_B(z)\mathbb{1}$$

в силу (2.3) и $h = R_K(z)f$, где $R_K(z) = (K - zI)^{-1}$. Полагая $z = \lambda^{-1}$, получаем

$$(I-\lambda K)^{-1}f = (I-\lambda B)^{-1}f + \frac{\lambda\langle (I-\lambda B)^{-1}f, g\rangle}{1-\lambda\langle (I-\lambda B)^{-1}\mathbb{1}, g\rangle}(I-\lambda B)^{-1}\mathbb{1}.$$

Учитывая равенство $(I-\lambda B)^{-1} - 1 = \lambda B(I-\lambda B)^{-1}$ и определение (1.7) функции $e(x\lambda)$, находим

$$K(I-\lambda K)^{-1}f = B(I-\lambda B)^{-1}f + \frac{\langle (I-\lambda B)^{-1}f, g\rangle}{1-\lambda\langle e, g\rangle} e,$$

что и дает (2.2).

В дальнейшем важную роль играет функция

$$n(\lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1 - \lambda\langle e, g\rangle. \tag{2.4}$$

Из (2.2) следует, что фредгольмов спектр вполне непрерывного оператора K (2.1) совпадает с множеством

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon n(\lambda) = 0\}. \tag{2.5}$$

Если $\lambda_n \in \Lambda$, то

$$Ke(x, \lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n} e(x, \lambda_n) \tag{2.6}$$

и, значит, $e(x, \lambda_n)$ является собственной функцией оператора K. Действительно,

$$Ke(x,\lambda_n) = Be + \langle e, g\rangle\mathbb{1} = \frac{e(x,\lambda_n) - \mathbb{1}}{\lambda_n} + \langle e, g\rangle\mathbb{1} = \frac{1}{\lambda_n}e(x,\lambda_n) - \frac{1}{\lambda_n}n(\lambda_n)1 = \frac{1}{\lambda_n}e(x,\lambda_n),$$

так как λ_n принадлежит Λ (2.5) в силу (1.8).

Размерность корневого подпространства оператора K, соответствующего собственному числу λ_n^{-1}, равна кратности корня λ_n функции $n(\lambda)$ (2.4).

Задача описания базисов вида $\{e(x, \lambda_n)\}^\infty$ тесно связана с изучением оператора K (2.1).

Теорема 2.1. *Предположим, что функция* $\varphi(x)$ (1.1) *такова, что имеют место* (1.5), *и пусть совокупность* $\{e(x, \lambda_n)\}$ $(\lambda_n \in \Lambda,\ 0 \notin \Lambda)$ *образует безусловный базис в* $L^2_\varphi(-a, a)$ (1.2). *Тогда существует единственная функция* $g \in L^2_\varphi(-a, a)$ *такая, что для оператора* K *вида* (2.1) *справедливы равенства* (2.6).

Доказательство. Из того, что совокупность $\{e(x, \lambda_n)\}$ образует базис, следует, что последовательность $\{\lambda_n\}$ совпадает с множеством нулей некоторой целой функции и, значит, λ_n^{-1} ограничена, если $\lambda_n \in \Lambda$. Определим в пространстве $L^2_\varphi(-a, a)$ оператор K, который на базисе вектора $e(x, \lambda_n)$ действует по правилу (2.6). Тогда оператор K ограничен вследствие равномерной ограниченности λ_n^{-1}. Будем искать K в виде $K = B + \Gamma$, где B имеет вид (1.3). Из (2.6) и (1.8) следует, что

$$\frac{1}{\lambda_n}e(x,\lambda_n)=\frac{1}{\lambda_n}(e(x,\lambda_n)-\mathbb{1})+\Gamma e(x,\lambda_n),$$

поэтому $\Gamma e(x,\lambda_n)=\dfrac{1}{\lambda_n}\mathbb{1}$. Оператор Γ ограничен, так как B и K ограничены, и имеет одномерный образ. Отсюда следует, что существует единственная функция $g\in L^2_\varphi(-a,a)$ такая, что $\Gamma=\langle .,g\rangle\mathbb{1}$, что и доказывает утверждение.

Пусть последовательность комплексных чисел $\Lambda=\{\lambda_k : k\in\mathbb{Z}\}$ лежит на положительном расстоянии от прямой $\mathbb{R}$ и имеет единственную предельную точку ∞. Разобьем Λ на две части:

$$\Lambda_+=\{\lambda_K\in\Lambda\colon \operatorname{Im}\lambda_K>0\}, \qquad \Lambda_-=\{\lambda_K\in\Lambda\colon \operatorname{Im}\lambda_K<0\} \tag{2.7}$$

— последовательности чисел из $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ соответственно.

Напомним [3], что множество $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию Карлесона, если

$$\inf_k\prod_{j\neq k}\left|\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\overline{\lambda_j}}\right|>0. \tag{2.8}$$

Вес $\omega(x)$ удовлетворяет A_2-условию (или условию Макенхаупта) [3, 7], если

$$\sup_\Delta\left(\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_\Delta\omega dx\right)\left(\frac{1}{\Delta}\int\frac{1}{\omega}dx\right)<\infty, \tag{2.9}$$

где Δ пробегает множество интервалов из $\mathbb{R}$, а $|\Delta|$ — длина Δ.

3. Свойства функции $\boldsymbol{n(\lambda)}$. Описание класса функций $n(\lambda)$ (2.4) основано на свойствах функций $\langle e,g\rangle$, где $e(x,\lambda)$ имеет вид (1.7), а $g\in L^2_\varphi(-a,a)$.

Лемма 3.1. *Резольвента* $(I-\lambda\mathbb{J})^{-1}$ *оператора* $\mathbb{J}$ (1.6) *задается формулой*

$$\big((I-\lambda\mathbb{J})^{-1}h\big)(x)=h(x)+i\lambda\int\limits_0^x e^{i\lambda t}h(x-t)\,dt \quad \forall h\in L^2(-a,a). \tag{3.1}$$

Доказательство. Функция $f=(I-\lambda\mathbb{J})^{-1}h$ удовлетворяет уравнению

$$f(x)-i\lambda\int\limits_0^x f(t)dt=h(x),$$

т. е.

$$f=h+i\lambda Kf \qquad \left(K.=\int\limits_0^x .dt\right),$$

и, значит,

$$f=h+i\lambda K\sum_{s=0}^\infty(i\lambda k)^s\,h,$$

что и дает представление (3.1).

Пусть A — ограниченный (и ограниченно обратимый) оператор из $L^2_\varphi(-a,a)$ в $L^2(-a,a)$, осуществляющий подобие B (1.3), $\mathbb{J}$ (1.6), $AB = JA$ [5, 6]. Тогда

$$\langle e, h\rangle = \left\langle (I-\lambda B)^{-1}\mathbb{1}, h\right\rangle = \left\langle A(I-\lambda B)^{-1}\mathbb{1}, {A^*}^{-1} h\right\rangle = \left\langle (I-\lambda J)^{-1} f, H\right\rangle,$$

где $f = A\mathbb{1} \in L^2(-a,a)$ и $H = (A^*)^{-1} f \in L^2(-a,a)$. Используя (3.1), находим

$$\langle e, h\rangle = \int\limits_{-a}^{a}\left(f(x) + i\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{i\lambda t} f(x-t)\,dt\right)\overline{H}(x)dx =$$

$$= \langle f, H\rangle + i\lambda\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{x} e^{i\lambda t} f(x-t)\,dt\,\overline{H}(x)\,dx + i\lambda\int\limits_{-a}^{0}\int\limits_{0}^{x} e^{i\lambda t} f(x-t)\,dt\overline{H}(x)\,dx.$$

Отсюда после замены порядков интегрирования получаем

$$\langle e, h\rangle = \langle \mathbb{1}, h\rangle + i\lambda\int\limits_{-a}^{a} e^{i\lambda t}\psi(t)\,dt, \tag{3.2}$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} \int\limits_{t}^{a} f(\xi - t)\overline{H}(\xi)\,d\xi, & t \in [0,a], \\ -\int\limits_{-a}^{t} f(\xi - t)\overline{H}(\xi)\,d\xi, & t \in [-a,0]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Поскольку $f, H \in L^2(-a,a)$, то $\psi \in L^2(-a,a)$. Функция $\langle e, h\rangle$ представляет собой аналог преобразования Фурье функции $\overline{h}(x)$ в силу замечания 1.1.

Лемма 3.2. *Для функции*

$$\tilde{h}(\lambda) = \langle e, h\rangle, \tag{3.4}$$

где e имеет вид (1.7), *справедливо представление*

$$\tilde{h}(\lambda) = \tilde{h}(0) + i\lambda\int\limits_{-a}^{a} e^{i\lambda t}\psi(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Здесь $\psi(t)$ задается формулой (3.3) *и принадлежит $L^2(-a,a)$.*

Равенство (3.5) следует из (3.2), так как $e(x,0) = \mathbb{1}$.

Определение 3.1 [8]. *Функция $f(\lambda)$ принадлежит классу Бернштейна B_σ, если $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$ и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$

Известно, что для любого $f \in B_\sigma$ имеет место представление (3.5) ($\sigma = a$). Таким образом, $\tilde{h}(\lambda)$ (3.4) принадлежит классу B_a.

***Замечание* 3.1.** Для $n(\lambda)$ (2.4) имеет место

$$h\left(n, \pm\frac{\pi}{2}\right) = a \tag{3.6}$$

в силу (3.4), (3.5). Кроме того, для $h(\lambda) = \lambda^{-1}\left(n(\lambda) - n(0)\right)$ справедливо включение $\lambda^{-1}(h(\lambda) - - h(0)) \in L^2(\mathbb{R})$.

***Замечание* 3.2.** Пусть $q(\lambda) \geq 0$ $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$ и $q \in L^1(\mathbb{R})$, тогда для любого $h \in B_a$ имеют место соотношения $hq \in L^1(\mathbb{R})$, $h\sqrt{q} \in L^2(\mathbb{R})$. В частности, это справедливо при $q = |\varphi|$ $(q = |\varphi|^{-1})$ в силу (1.5).

Лемма 3.3. *Пусть $q(\lambda) \geq 0$ $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$ и $q \in L^1(\mathbb{R})$, а функция $f = A\mathbb{1}$ такова, что существуют f' и $f' \in L^2(-a, a)$. Тогда для $\tilde{h}$* (3.4) *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{h}(\lambda)\right|^2 q(\lambda)\, d\lambda \leq C\|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{h}(\lambda)\right|^2 q(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} |\langle e, h\rangle|^2 q(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\left\langle (I - \lambda\mathbb{J})^{-1} f, H\right\rangle\right|^2 q(\lambda)\, d\lambda,$$

где $f = A\mathbb{1}$, $H = (A^*)^{-1}h \in L^2(-a, a)$. Из неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{h}(\lambda)\right|^2 q(\lambda)\, d\lambda \leq \|H\|^2_{L^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \left\|(I - \lambda\mathbb{J})^{-1} f\right\|^2 q(\lambda)\, d\lambda \leq$$

$$\leq M\, \|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \int\limits_{\mathbb{R}} \left\|(1 - \lambda\mathfrak{I})^{-1} f\right\|^2 q(\lambda)\, d\lambda.$$

Докажем ограниченность последнего интеграла. Поскольку

$$(I - \lambda\mathbb{J})^{-1} f = f(x) + i\lambda \int\limits_0^x e^{i\lambda(x-\xi)} f(\xi) = f(0)e^{i\lambda x} + \int\limits_0^x e^{i\lambda(x-\xi)} f'(\xi)\, d\xi, \tag{3.8}$$

то

$$\left\|(I - \lambda\mathbb{J})^{-1} f\right\|^2 = \int\limits_{-a}^{a} \left\{ |f(0)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\overline{f}(0) \int\limits_0^x e^{-i\lambda\xi} f'(\xi) d\xi + \left| \int\limits_0^x e^{-i\lambda\xi} f'(\xi) d\xi \right|^2 \right\} dx.$$

Учитывая ограниченность оператора интегрирования в $L^2(-a, a)$

$$\left\| \int\limits_0^x g(\xi) d\xi \right\| \leq N\|g\|, \qquad N < \infty, \quad g \in L^2(-a, a),$$

и то, что $f' \in L^2(-a,a)$, получаем

$$\left\|(I-\lambda\mathbb{J})^{-1}f\right\|^2 \le 2a|f(0)|^2 + 2|f(0)|N\|f'\| + N^2\|f'\|^2 < K.$$

Оценка (3.7) теперь следует из $q \in L^1(\mathbb{R})$.

Рассмотрим обратное по отношению к соответствию $h \to \tilde{h}$ (3.4) преобразование. Покажем, что для любого $p \in L^2_\varphi(-a,a)$ найдется функция $\hat{p}(\lambda)$ такая, что

$$p(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e(x,\lambda)\hat{p}(\lambda)d\lambda, \tag{3.9}$$

где e имеет вид (1.7). Применим к обеим частям (3.8) оператор A $(L^2_\varphi(-a,a) \to L^2(-a,a))$, тогда

$$P(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{p}(\lambda)\left\{f(0)e^{i\lambda x} + \int\limits_0^x e^{i\lambda\xi}f'(x-\xi)d\xi\right\}d\lambda$$

в силу равенства $Ae = (I-\lambda\mathbb{J})^{-1}f$ и (3.8), где $P = A_p,\ f = A\mathbb{1}$. Следовательно,

$$f(0)r(x) + \int\limits_0^x r(\xi)f'(x-\xi)d\xi = P(x), \tag{3.10}$$

где

$$r(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{p}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{3.11}$$

в предположении, что интеграл (3.11) сходится. Пусть, как и в лемме 3.2, $f(0) \ne 0$ и $f' \in L^2(-a,a)$, тогда уравнение Вольтерра второго рода (3.10) всегда имеет единственное решение [9] $r(x) \in L^2(-a,a)$ в силу $P, f' \in L^2(-a,a)$. Отсюда и из (3.11) следует, что $\hat{p}(\lambda)$ является обратным преобразованием Фурье функции $r(x) \in L^2(-a,a)$ и, значит, представляет собой целую функцию экспоненциального типа $\le a$ такую, что $\hat{p} \in L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f = A\mathbb{1}$ из $L^2(-a,a)$ такова, что $f(0) \ne 0$, существует f' и принадлежит $L^2(-a,a)$. Тогда для любой функции $p \in L^2_\varphi(-a,a)$ существует единственная целая функция $\hat{p}(\lambda)$ экспоненциального типа $\le a$, принадлежащая $L^2(\mathbb{R})$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, такая, что справедливо представление* (3.9), *при этом имеет место оценка*

$$\|p(x)\|_{L^2_\varphi(-a,a)} \le C\,\|\hat{p}(\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Нам осталось доказать оценку (3.12). Для $P = Ap$ в силу обратимости A имеет место неравенство $\|p\| < N\|P\|$, поэтому нужно в $L^2(-a,a)$ оценить норму P. Из (3.10) следует, что

$$\|P\|^2_{L^2(-a,a)} \le |f(0)|^2\|r\|^2 + 2|f_0||r|\left\|\int\limits_0^x r(\xi)f'(x-\xi)\right\| + \left\|\int\limits_0^x r(\xi)f'(x-\xi)d\xi\right\|^2.$$

Заметим, что $\|r\| = \|\hat{p}\|$ вследствие унитарности преобразования Фурье и (3.11), а так как

$$\left|\int_0^x r(\xi)f'(x-\xi)d\xi\right|^2 \leq \int_0^x |r(\xi)|^2 d\xi \int_0^x \left|f'(x-\xi)\right|^2 d\xi,$$

то из $f' \in L^2(-a,a)$ заключаем, что

$$\left|\int_0^x r(\xi)f'(x-\xi)d\xi\right|^2 \leq \|r\|^2 K^2.$$

Поэтому

$$\|p\|^2 \leq \|\hat{p}\|^2 \left(|f(0)|^2 + 2|f(0)|K + K^2\right),$$

что и доказывает неравенство (3.12).

Теорема 3.2. *Пусть функция* φ (1.1) *имеет свойства* (1.5), *а* $n(\lambda)$ *имеет вид*

$$n(\lambda) = 1 - \lambda \langle e, g\rangle,$$

где $g \in L^2_\varphi(-a,a)$, *а* e *задается формулой* (1.7). *При этом оператор* B *в* $L^2_\varphi(-a,a)$ *имеет вид* (1.9). *Если корни* $n(\lambda)$ *не лежат на* $\mathbb{R}$, *то следующие условия эквивалентны*:

1) *для любого* $h \in L^2_\varphi(-a,a)$ *имеет место оценка*

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|^{-1}|n(z)|^2 \left|\left\langle (I - zB)^{-1}h, g\right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)}\right|^2 dz \leq M\|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}; \tag{3.13}$$

2) *вес* $\omega^2(\lambda) = |\varphi(\lambda)||n(\lambda)|^2$ *удовлетворяет* A_2*-условию на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Заменим в выражении $\left\langle (I - zB)^{-1}h, g\right\rangle$ функцию h выражением

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} e(x,\lambda)\hat{h}(\lambda)d\lambda$$

в силу теоремы 3.1 и (3.9). Тогда, используя (1.7), имеем

$$\left\langle (I - zB)^{-1}h, g\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left\langle (I - zB)^{-1}(I - \lambda B)^{-1}\mathbb{1}, g\right\rangle \tilde{h}(\lambda)d\lambda.$$

Поскольку

$$(1 - zB)^{-1}(1 - \lambda B)^{-1} = (z - \lambda)^{-1}\left\{z(I - zB)^{-1} - \lambda(I - \lambda B)^{-1}\right\},$$

то, учитывая определение n (2.4), получаем

$$\left\langle (1 - zB)^{-1}h, g\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{n(z) - n(\lambda)}{\lambda - z}\tilde{h}(\lambda)d\lambda.$$

Подставляя последнее равенство в (3.13), находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|^{-1}|n(z)|^{-2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{n(z)-n(\lambda)}{\lambda - z}\hat{h}(\lambda)d\lambda\right|^2 dz \le M\|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}.$$

Используя неравенство (3.12), записываем это неравенство в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left||\varphi(z)|^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\hat{h}(\lambda)}{\lambda - z}i\lambda - |\varphi(z)|^{-\frac{1}{2}}n(z)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{n(\lambda)|\varphi(\lambda)|^{\frac{1}{2}}}{\lambda - z}\hat{h}(\lambda)|\varphi(\lambda)|^{-\frac{1}{2}}d\lambda\right|^2 dz \le M_1\left\|\hat{h}(\lambda)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Поскольку $\left\|\hat{h}|\varphi|^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} < C\left\|\hat{h}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$ (в силу (1.5)) и $\left\|\hat{h}\right\| \le \tilde{C}\left\|\hat{h}|\varphi|^{-\frac{1}{2}}\right\|$ по той же причине, то отсюда следует ограниченность оператора $\omega^{-1}H\omega$ (где H — преобразование Гильберта) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и, значит, для $\omega = |\varphi|n^2$ имеет место A^2-условие.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассуждая в обратном порядке, получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|^{-1}|n(z)|^{-2}\left\langle (I - zB)^{-1}h, g\right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)} dz \le M_1\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\hat{h}(\lambda)\right|^2 d\lambda$$

в силу теоремы 3.1. Используя (3.12), завершаем доказательство теоремы.

***Замечание* 3.3.** Теорема 3.2 справедлива, если интегрирование в (3.13) осуществляется вдоль прямой $\mathbb{R} + ic$ в предположении, что функция $\varphi(x)$ (1.1) имеет продолжение в $\mathbb{C}$ из $\mathbb{R}$.

4. Безусловная базисность семейства $\{e(x,\lambda_k)\}$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Предположим, что функция* $\varphi(x)$ (1.1) *имеет свойства* (1.5), *множество* $\Lambda = \left\{\lambda_k \in \mathbb{C}\colon k \in \mathbb{Z}\right\}$ *лежит на положительном расстоянии от оси* $\mathbb{R}$ *и функция* $f = A\mathbb{1}$ (A — *оператор из* $L^2_\varphi(-a,a)$ *в* $L^2(-a,a)$, *осуществляющий подобие операторов* B (1.3) *и* $\mathbb{J}$ (1.6)) *такова, что* $f(0) \ne 0$ *и существует* $f'(x)$ *почти всюду, причем* $f' \in L^2(-a,a)$. *Для того чтобы семейство*

$$\left\{e(x,\lambda_k), \lambda_k \in \Lambda\right\}, \quad 0 \notin \Lambda, \tag{4.1}$$

было безусловным базисом в $L^2_\varphi(-a,a)$ (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы* Λ *образовало множество корней целой функции экспоненциального типа* n *такой, что*:

1) $\lambda^{-1}\left(n(\lambda) - n(0)\right) \in L^2_\varphi(\mathbb{R})$;

2) $h\left(n, \pm\dfrac{\pi}{2}\right) = a$;

3) *вес* $\omega^2(\lambda) = |\varphi(\lambda)|\,|n(\lambda)|^2$ *удовлетворяет* A_2*-условию* (2.9);

4) *корни* $n(\lambda)$ *простые и последовательности* $\Lambda_\pm$ (2.7) *удовлетворяют условию Карлесона* (2.8).

Доказательство. *Необходимость. Шаг* 1. Если семейство (4.1) образует базис в $L^2_\varphi(-a,a)$, то $e(x,\lambda_k)$ — собственные функции оператора K (2.1), где $\{\lambda_k\}$ — нули функции $n(\lambda)$ (2.4). Условия 1, 2 следуют из замечаний 3.1, 3.2.

Если $\{e(x,\lambda_k)\}$ — базис в $L^2_\varphi(-a,a)$, то существует оператор K (2.1) такой, что имеют место равенства (2.6) (теорема 1.2). Разложим произвольную функцию $h \in L^2_\varphi(-a,a)$ по базису

$$h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e(x,\lambda_k), \quad b_k \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \left\|K(1-zK)^{-1}h\right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} dz \neq \int_{\mathbb{R}} \left\|\sum_k \frac{b_k e(x,\lambda_k)}{z-\lambda_k}\right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} dz \leq$$

$$\leq M \sum |b_k|^2 \|e(x,\lambda_k)\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \leq M_1 \|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)},$$

так как

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{|z-\lambda_k|^2} \leq m \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

в силу отделимости множества Λ от $\mathbb{R}$. Отсюда, из теоремы 1.1 и формулы (2.2) получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \left| n^{-1}(z) \left\langle (1-zB)^{-1}h, g \right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)} \right|^2 \cdot \|e(x,z)\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} dz \leq M \|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}.$$

Учитывая оценку [3]

$$\|e(x,\lambda)\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \geq m|\varphi(\lambda)|^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|^{-1} |n(z)|^{-2} \left| \left\langle (I-zB)^{-1}h, g \right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)} \right|^2 dz \leq M \|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}. \tag{4.2}$$

Используя теорему 3.2, приходим к тому, что вес $\omega^2(\lambda) = |\varphi(\lambda)||n(\lambda)|^2$ удовлетворяет A_2-условию.

Шаг 2. Функция

$$\psi(\lambda) = \psi(0) - \lambda \langle e, g_0 \rangle, \quad g_0 \in L^2_\varphi(-a,a), \tag{4.3}$$

принадлежит классу B_a (лемма 3.2, замечание 3.1). Поэтому, используя теорему 3.2, получаем оценку

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^{-1} \left| \left\langle (1-\lambda B)^{-1}h, g_0 \right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)} \right|^2 d\lambda \leq M \|h\|_{L^2_\varphi(-a,a)}. \tag{4.4}$$

Поскольку

$$(I-zK)^{-1}h = (I-zB)^{-1}h + zn^{-1}(z)e(z) \left\langle (1-zB)^{-1}h, g \right\rangle,$$

то

$$\left\langle (1-zK)^{-1}h, g_0 \right\rangle = \left\langle (1-zB)^{-1}h, g_0 \right\rangle + \frac{\psi(0)-\psi(z)}{n(z)} \left\langle (I-zB)^{-1}h, g \right\rangle.$$

Учитывая (4.2), (4.4), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|^{-1} \left| \left\langle (1-zK)^{-1}h, g_0 \right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)} \right|^2 dz \leq M_1 \|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}. \tag{4.5}$$

Пусть

$$h(x) = \sum c_k e(x, \lambda_k), \quad \lambda_k \in \Lambda,$$

тогда из (2.6) заключаем, что

$$(1-zK)^{-1}h = \sum c_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - z} e(x, \lambda_k).$$

Отсюда в силу (4.3) получаем

$$\left\langle (1-zK)^{-1}h, g_0 \right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)} = \sum c_k \frac{\psi(\lambda_k) - \psi(0)}{z - \lambda_k}.$$

Представим h в виде

$$h = \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+} a_k e(x, \lambda_k) + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-} b_k e(x, \lambda_k), \quad a_k, b_k \in \mathbb{C},$$

тогда

$$\left\langle (1-zB)^{-1}h, g_0 \right\rangle = \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+} a_k \frac{\delta_k^+ e^{-i\lambda_k a}}{z - \lambda_k} + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-} b_k \frac{\delta_k^- e^{i\lambda_k a}}{z - \lambda_k}, \tag{4.6}$$

при этом

$$\delta_k^+ \overset{\mathrm{df}}{=} e^{i\lambda_k a} \left(\psi(\lambda_k) - \psi(0) \right), \quad \lambda_k \in \Lambda_+,$$
$$\delta_k^- \overset{\mathrm{df}}{=} e^{-i\lambda_k a} \left(\psi(\lambda_k) - \psi(0) \right), \quad \lambda_k \in \Lambda_-.$$

Тогда из (4.5), (4.6) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(z)|^{-1} \left| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+} a_k \frac{\delta_k^+ e^{-i\lambda_k a}}{z - \lambda_k} + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-} b_k \frac{\delta_k^- e^{i\lambda_k a}}{z - \lambda_k} \right|^2 d\lambda \leq$$
$$\leq M_1 \left\| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+} a_k e(x, \lambda_k) + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-} b_k e(x, \lambda_k) \right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}, \tag{4.7}$$

где $\delta_k^\pm \asymp 1,\ \lambda_k \in \Lambda_\pm,\ \{a_k, b_k\}$ — произвольные конечные наборы из $\mathbb{C}$.

Шаг 3. Используя теорему 1.2 и лемму 3.3, получаем, что для любого $g \in L^2_\varphi(-a,a)$ для $\tilde{g}(x) = \langle e, g \rangle$ (3.4) имеет место

$$e^{i\lambda a} \tilde{g}(\lambda) |\varphi(\lambda)|^{\frac{1}{2}} \in H^2_+$$

и, значит, $e^{i\lambda a}\tilde{g}(\lambda)$ принадлежит весовому классу Харди в $\mathbb{C}_+$ с весом Макенхаупта $\omega^2 = |\varphi|$. Ее значения в $\mathbb{C}_+$ определяются предельными значениями на $\mathbb{R}$ интеграла Коши

$$\sum \hat{a}_k \tilde{g}(\lambda_k) e^{i\lambda_k a} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum \hat{a}_k \frac{\tilde{g}(x)}{x - \lambda_k} e^{ixa} dx, \quad \lambda_k \in \Lambda_k^+,$$

а последовательность $\{a_k\}$ финитна. Пусть $a_k = \hat{a}_k e^{i\lambda_k a}$, тогда

$$\left|\sum a_k \left\langle e(x,\lambda_k), g\right\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)}\right|^2 \le \frac{1}{4\pi^2} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \sum a_k \frac{e^{-i\lambda_k a}\tilde{g}(x)}{x-\lambda_k} e^{ixa} dx \right|^2 \le$$

$$\le M \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{-1} \left| \sum \frac{a_k e^{-\lambda_k a i}}{x - \lambda_k} \right|^2 dx \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{\frac{1}{2}} \left| \tilde{g}(x) e^{ixa} \right|^2 dx \le$$

$$\le M \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{-1} \left| \sum \frac{a_k e^{-ia\lambda_k}}{x - \lambda_k} \right|^2 x \|g\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)}.$$

Итак, мы получили оценку

$$\left\| \sum_{\lambda_k \in \Lambda^+} a_k e(x,\lambda_k) \right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \le M \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{-1} \left| \sum \frac{a_k e^{-i\lambda_k a}}{x-\lambda_k} \right|^2 dx. \tag{4.8}$$

Аналогичным образом для финитной последовательности b_k имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\lambda_k \in \Lambda^-} b_k e(x,\lambda_k) \right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \le M \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{-1} \left| \sum \frac{b_k e^{i\lambda_k b}}{x-\lambda_k} \right|^2 dx. \tag{4.9}$$

Если совокупность (4.1) образует безусловный базис, то из (4.7) при $b_k = 0$ и (4.9) следует двойная оценка

$$\left\| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+} c_k e(x,\lambda_k) \right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \asymp \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{-1} \left| \sum \frac{c_k e^{-i\lambda_k a}}{x-\lambda_k} \right|^2 dx$$

для любой конечной последовательности $\{c_k\}$. Таким образом, совокупность $\left\{\dfrac{1}{x-\lambda_k}\right\}$, $\lambda_k \in$ $\in M_+$, является безусловным базисом в $L^2_\varphi(-a,a)$ своей линейной оболочки и, значит, справедливо условие Карлесона (2.8). Аналогично доказывается, что имеет место условие Карлесона и для M_-, что доказывает условие 4.

Достаточность. Шаг 1. Поскольку $0 \notin \Lambda$, то мы можем считать, что $n(0) = 1$. Из условий 1, 2 и теорем 3.1, 3.2 заключаем, что

$$n(\lambda) = 1 - \lambda \left\langle e, g \right\rangle, \quad g \in L^2_\varphi(-a,a).$$

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве необходимости (см. шаг 2), получаем неравенства (4.7). Складывая далее (4.8) и (4.9), имеем

$$\left\| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+} a_k e(x,\lambda_k) + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-} b_k e(x,\lambda_k) \right\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)} \leq$$

$$\leq M \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{-1} \left| \sum a_k \frac{e^{-i\lambda_k a}}{x-\lambda_k} + \sum b_k \frac{e^{i\lambda_k a}}{x-\lambda_k} \right|^2 dx.$$

Из условия 4 следует, что семейство дробей $\left\{ \dfrac{1}{x-\lambda_k} \right\}_{\lambda_k \in \Lambda_+}$, $\left\{ \dfrac{1}{x-\lambda_k} \right\}_{\lambda_k \in \Lambda_-}$ образует безусловный базис замыкания своей оболочки в L^2 на $\mathbb{R}$ с мерой $|\varphi(x)|^{-1}dx$. Тогда из (4.7) следует базисность совокупности (4.1) в замыкании своей линейной оболочки $L^2_\varphi(-a,a)$.

Шаг 2. Осталось установить полноту семейства (4.1). Предполагая противное, выберем функцию $f \in L^2_\varphi(-a,a)$ такую, что $f \perp e(x,\lambda_k)$ $(\forall k)$. Рассмотрим функцию (см. (3.4))

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle e, f \rangle .$$

Из леммы 3.2 заключаем, что $\tilde{f}$ — целая функция из класса B_a, для которой справедливо представление (3.5), причем $\tilde{f}(\lambda_k) = 0$ $(\forall k)$. Рассмотрим целую функцию

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda)}{n(\lambda)}.$$

Поскольку функции $\tilde{f}$ и n имеют вполне регулярный рост [7], то

$$h\left(F, \pm\frac{\pi}{2}\right) = h\left(\tilde{f}, \pm\frac{\pi}{2}\right) - h\left(n, \pm\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$$

в силу условия 2. При $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\omega^2(\lambda)|F(\lambda)|^2 = |\varphi(\lambda)| \left|\tilde{f}(\lambda)\right|^2 \in L^1(\mathbb{R})$$

и, значит, $\omega(\lambda)F(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$, где ω^2 — вес Макенхаупта. Следовательно [3], $F(\lambda)$ допускает интегральное представление (аналог теоремы Винера–Пэли). Отсюда следует, что $F(\lambda) \equiv 0$ и, значит, $f = 0$.

Литература

1. *Павлов Б. С.* Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР. – 1979. – **247**, №. 1. – С. 37–40.
2. *Khruschev S. V., Nikolskii N. K., Pavlov B. S.* Unconditional based of exponentials and reproducting kernels // Lect. Notes Math. – 1981. – **804**. – P. 214–335.
3. *Губреев Г. М.* Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B-представимых вектор-функций // Алгебра и анализ. – 2000. – **12**, №. 6. – С. 1–97.
4. *Губреев Г. М.* Избранные труды. – Днепропетровск: Середняк Т. К., 2014. – 445 с.
5. *Губреев Г. М., Левчук В. Н.* Описание безусловных базисов из значений ядер Данкла // Функцион. анализ и его прил. – 2015. – **49**, №. 1. – С. 79–82.
6. *Левчук В. Н.* Классы несамосопряженных операторов // Докл. НАН Украины. – 2016. – №. 12. – С. 36–42.
7. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984.
8. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории апроксимации. – М.: Наука, 1965.
9. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

Получено 15.09.16