УДК 517.956.4

В. А. Літовченко, Г. М. Унгурян (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ТИПУ ШИЛОВА З КОЕФІЦІЄНТАМИ ОБМЕЖЕНОЇ ГЛАДКОСТІ

Under the condition of minimal smoothness of the coefficients, we construct the fundamental solution of the Cauchy problem and study the principal properties of this solution for a special class of linear parabolic systems with bounded variable coefficients covering the class of Shilov-type parabolic systems of nonnegative kind.

При условии минимальной гладкости коэффициентов построено фундаментальное решение задачи Коши и исследованы его основные свойства для одного класса линейных параболических систем с ограниченными переменными коэффициентами, охватывающего класс параболических по Шилову систем с неотрицательным родом.

1. Вступ. Сформульоване Г. Є. Шиловим в [1] означення параболічності узагальнює поняття параболічності за І. Г. Петровським [2] та істотно розширює клас Петровського систем рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом тими системами зі сталими коефіцієнтами, у яких порядок може відрізнятися від показника параболічності. Дослідження параболічних за Шиловим систем проводилось у багатьох працях, при цьому основна увага приділялась лише випадку сталих коефіцієнтів (див. огляд у [3]). Намагання одержати хоча б якісь результати для параболічних за Шиловим систем із залежними від просторової змінної коефіцієнтами були марними, оскільки, як було з'ясовано в [4], такі системи, взагалі кажучи, є параболічно нестійкими до зміни своїх коефіцієнтів.

Цікавий підхід до розширення класу Шилова параболічно стійкими системами запропонував Я. І. Житомирський [5]. При цьому, вдало використовуючи поняття головної частини системи, він означив новий клас так званих параболічних систем типу Шилова із змінними молодшими коефіцієнтами (незалежними від часової змінної), який гармонічно доповнює клас Петровського систем із змінними коефіцієнтами і повністю охоплює клас параболічних за Шиловим систем. Для таких систем методом послідовного наближення ним було встановлено коректну розв'язність задачі Коші у класі обмежених функцій.

У [3], розвиваючи зазначену ідею Я. І. Житомирського, означено широкий клас параболічних систем із змінними коефіцієнтами вигляду

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{1}$$

де $u := \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m)$, $\Pi_{(0;T]} := \{(t;x)\colon t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^n\}$, а $P_0(t;i\partial_x)$ і $P_1(t,x;i\partial_x)$ — матричні диференціальні вирази порядків відповідно p і p_1, $p > p_1 \geq 0$, з коефіцієнтами, залежними від часової змінної t, при цьому коефіцієнти виразу P_1 можуть залежати і від просторової змінної x. Тут припускається, що відповідна система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t;i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

є рівномірно параболічною за Шиловим на множині $\Pi_{[0;T]}$ з показником параболічності h, $0 < h \leq p$, невід'ємним родом μ і зведеним порядком p_0 [6], та вимагається виконання такої умови:

(A) $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu/p_0) - (m-1)(p-h)$.

Для таких систем (1) за умови, що їх коефіцієнти є неперервними за змінною t, нескінченно диференційовними за змінною x комплекснозначними функціями, обмеженими разом зі своїми похідними у шарі $\Pi_{[0;T]}$, у [3] побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) $Z(t,x;\tau,\xi),\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, та досліджено його основні властивості гладкості й поведінку в околі нескінченно віддалених просторових точок. Ці результати дозволили в [7–9] розвинути теорію задачі Коші для таких систем у просторах типу S І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова [10], зокрема встановити коректну розв'язність задачі Коші із узагальненими початковими даними типу ультрарозподілів Жеврe, одержати форму зображення класичних розв'язків із узагальненими граничними значеннями на початковій гіперплощині, дослідити їх якісні властивості та описати множини узагальнених початкових функцій, для яких відповідні розв'язки є елементами простору S Л. Шварца, або того чи іншого простору типу S.

Для одержання подібних результатів при слабших умовах на коефіцієнти системи (1) необхідно спочатку з'ясувати властивості відповідного ФРЗК Z. У даній роботі з'ясовуються умови мінімальної гладкості коефіцієнтів щодо змінної x, за яких існує класичний ФРЗК, та досліджуються його основні властивості.

2. Допоміжні відомості. Нехай диференціальні вирази P_0 і P_1 системи (1) мають структуру

$$P_0(t;i\partial_x) = \sum_{|k|_+ \leq p} A_{0,k}(t)\partial_x^k, \qquad P_1(t,x;i\partial_x) = \sum_{|k|_+ \leq p_1} A_{1,k}(t;x)\partial_x^k,$$

де $A_{0,k}(t) := i^{|k|_+}\left(a_{0,k}^{lj}(t)\right)_{l,j=1}^m,\ A_{1,k}(t;x) := i^{|k|_+}\left(a_{1,k}^{lj}(t;x)\right)_{l,j=1}^m$ — матричні коефіцієнти, i — уявна одиниця, а $|k|_+ := k_1 + \ldots + k_n,\ k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Позначимо через $G(t,\tau;\cdot),\ 0 \leq \tau < t \leq T$, ФРЗК для системи (2). Відомо [9, 11], що $G(t,\tau;\cdot) = F\left[\Theta_\tau^t(\xi)\right](t,\tau;\cdot)$, де $F[\cdot]$ — оператор перетворення Фур'є, а $\Theta_\tau^t(\cdot)$ — матрицант відповідної двоїстої за Фур'є системи, причому

$$\forall T > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists c > 0 \quad \forall t \in (\tau;T] \quad \forall \tau \in [0;T) \quad \forall \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n :$$

$$\left|\partial_x^k G(t,\tau;x-\xi)\right| \leq c(t-\tau)^{-\frac{n+|k|_+ +\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{3}$$

(тут $\gamma := (m-1)(p-h),\ \alpha := \mu/p_0,\ |(a_{lj})_{l,j=1}^m| := \max_{\{l,j\}\subset\mathbb{N}_m}|a_{lj}|$, а $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^n$).

Розглядатимемо тут системи (1), для яких окрім умови (A) виконується ще така:

(B) коефіцієнти $a_{0,k}^{lj}(t),\ a_{1,k}^{lj}(t;x)$ є неперервними за змінною t рівномірно щодо x, диференційовними за змінною x до порядку α_* включно і обмеженими разом із своїми похідними комплекснозначними функціями в шарі $\Pi_{[0;T]}$.

Прикладом системи (1) при $m = n = 1$, для якої виконуються умови (A) і (B) з $\alpha_* = 3$, є рівняння

$$\partial_t u(t;x) = \left\{t^2\partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t}\partial_x + \frac{t\sqrt[3]{x^{10}}}{(1+x^2)^2}\right\}u(t;x), \qquad t \in (0;T], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Відповідним параболічним за Шиловим рівнянням є

$$\partial_t u(t;x) = \left\{t^2\partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t}\partial_x\right\}u(t;x), \qquad t \in (0;T], \quad x \in \mathbb{R},$$

для якого $p = p_0 = 3,\ h = 2$, а $\mu \geq 0$.

Зазначимо, що рівняння (4) не відноситься ні до класу рівнянь, параболічних за Петровським, ні до класу рівнянь, параболічних за Шиловим.

У [3] побудовано ФРЗК для системи (1) у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t,\tau;x-\xi) + W(t,x;\tau,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2, \tag{5}$$

де $\Pi_T^2 := \{(t,x;\tau,\xi) |\ 0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n\}$,

$$W(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,$$

а

$$\Phi(t,x;\tau;\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t,x;\tau,\xi). \tag{6}$$

Тут

$$K_1(t,x;\tau,\xi) := P_1(t,x;i\partial_x)G(\tau,t;x-\xi),$$

$$K_l(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y)K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad l > 1. \tag{7}$$

При цьому встановлено, що умова (A) та обмеженість коефіцієнтів системи (1) забезпечують абсолютну й рівномірну збіжність функціонального ряду (6) для всіх $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0,T)$, а також виконання для його суми Φ та повторних ядер K_l оцінок

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \leq c_1(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_1\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \tag{8}$$

$$|K_l(t,x;\tau,\xi)| \leq c_0^l \left(\prod_{j=1}^{l-1} c_{(j\varepsilon)} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) \times$$

$$\times (t-\tau)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \varepsilon \in (0;1),$$

із оціночними сталими, не залежними від $t,\ \tau,\ x$ і ξ. Тут $\alpha_0 := 1 + \alpha n - (n + p_1 + \gamma)/h > 0$, а $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція Ейлера.

Зазначимо, що оцінки (3) і (8) при $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ забезпечують абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W. Таким чином, матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ коректно визначається формулою (5) на всій множині Π_T^2.

На завершення цього пункту наведемо оцінки з [12, с. 312], які знадобляться нам у подальшому:

$$e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} \leq e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} \frac{dy}{((t-\beta)(\beta-\tau))^{\alpha n}} \leq$$

$$\leq \frac{c_\varepsilon e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{(t-\tau)^{\alpha n}}, \quad \delta > 0 \tag{10}$$

(тут $\{x, y, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \beta \in (\tau; t),\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ \varepsilon \in (0; 1)$ і $\delta > 0$, а величина c_ε залежить лише від ε).

3. Дослідження ФРЗК. Для з'ясування гладкості функції Z та властивостей її похідних необхідно спочатку оцінити похідні повторних ядер K_l.

Згідно із зображенням (7) і диференційовністю функції G, гладкість ядра $K_1(t, x; \tau, \xi)$ щодо просторової змінної x обмежується гладкістю коефіцієнтів системи (1), тому існують похідні $\partial_x^q K_1$ лише при $|q|_+ \leq \alpha_*$, при цьому справджується рівність

$$\partial_x^q K_1(t, x; \tau, \xi) = \sum_{|k|_+ \leq p_1} \sum_{l=0}^{q} C_q^l \left(\partial_x^l A_{1,k}(t; x)\right) \left(\partial_{(x-\xi)}^{k+q-l} G(t, \tau; x-\xi)\right), \quad (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2,$$

у якій C_q^l — біноміальний коефіцієнт. Звідси, враховуючи умову (B) та оцінку (3), для $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_+ \leq \alpha_*,\ (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$ одержуємо

$$|\partial_x^q K_1(t, x; \tau, \xi)| \leq c_q (t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma+|q|_+}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{11}$$

(тут оціночні сталі не залежать від $t,\ \tau,\ x$ і ξ).

При $l > 1$ будемо використовувати очевидне зображення

$$K_l(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_{l-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, x-y) K_{l-1}(\beta, x-y; \tau, \xi) dy, \quad t_1 := (t+\tau)/2,$$

згідно з яким

$$\partial_x^q K_l(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q K_1(t, x; \beta, y) K_{l-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy +$$

$$+ \sum_{l=0}^{q} C_q^l \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_x^l K_1(t, x; \beta, x-y)\right) \left(\partial_x^{q-l} K_{l-1}(\beta, x-y; \tau, \xi)\right) dy. \tag{12}$$

Оскільки

$$|\partial_x^q K_1(t, x; \tau, x-y)| = \left|\partial_x^q \left(\sum_{|k|_+ \leq p_1} A_{1,k}(t; x) \partial_x^k G(t, \tau; y)\right)\right| \leq$$

$$\leq m\,|\partial_x^q A_{1,0}(t;x)|\,|G(t,\tau;y)| \leq \hat{c}_q(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|y\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad |q|_+ \leq \alpha_*, \tag{13}$$

то безпосередньо з (10) і (11) при $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$, $\varepsilon \in (0;1)$ і $|q|_+ \leq \alpha_*$ одержуємо

$$|\partial_x^q K_2(t,x;\tau,\xi)| \leq c_{\varepsilon,q} e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} (t-\tau)^{-\alpha n} \left(\int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|q|_+}{h}} \times \right.$$

$$\left. \times (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta + \sum_{l=0}^{q} \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|q-l|_+}{h}} d\beta \right).$$

Враховуючи тепер оцінки

$$\int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|q|_+}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta \leq 2^{\frac{|q|_+}{h}} (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1+\frac{|q|_+}{h}\right)} B(\alpha_0,\alpha_0),$$

$$\int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|q-l|_+}{h}} d\beta \leq 2^{\frac{|q-l|_+}{h}} (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1+\frac{|q-l|_+}{h}\right)} B(\alpha_0,\alpha_0),$$

отримуємо нерівність

$$|\partial_x^q K_2(t,x;\tau,\xi)| \leq c_{2,\varepsilon}^q (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1+\alpha n+\frac{|q|_+}{h}\right)} e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} B(\alpha_0,\alpha_0), \quad |q|_+ \leq \alpha_*.$$

Продовжуючи процес оцінювання, знаходимо

$$|\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)| \leq c_{l,\varepsilon}^q (t-\tau)^{l\alpha_0 - \left(1+\alpha n+\frac{|q|_+}{h}\right)} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right)$$

для всіх $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_+ \leq \alpha_*$, $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$, $\varepsilon \in (0;1)$ і $l \geq 2$.

Звідси, покладаючи $l_* := \left[\dfrac{(1+\alpha n)h + \alpha_*}{\alpha_0 h}\right] + 1$ (тут $[\cdot]$ — ціла частина числа) та $\varepsilon := \dfrac{1}{r_* l_*}$, $\delta_* := \delta\left(1 - \dfrac{1}{r_*}\right)$, $r_* > 2$, переконуємося в існуванні такої сталої $c_* > \hat{c}_q$, що для всіх $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$ і $|q|_+ \leq \alpha_*$ справджуються оцінки

$$|\partial_x^q K_1(t,x;\tau,\xi)| \leq c_*(t-\tau)^{\alpha_0 - \left(1+\alpha n+\frac{|q|_+}{h}\right)} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$|\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)| \leq c_*(t-\tau)^{l\alpha_0 - \left(1+\alpha n+\frac{|q|_+}{h}\right)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad l \in \{2,\ldots,l_*-1\}, \tag{14}$$

$$|\partial_x^q K_{l_*}(t,x;\tau,\xi)| \leq c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Згідно із зображенням (12) та нерівностями (13) і (14), похідні $\partial_x^q K_l$ при $l > l_*$ оцінюватимемо так:

$$|\partial_x^q K_{l_*+1}(t,x;\tau,\xi)| \le mc_*^2\Bigg((t-t_1)^{-\frac{|q|_+}{h}} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t \left((t-\beta)^{\alpha_0-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}}\right)d\beta+$$

$$+\,2^{|q|_+}\int\limits_\tau^t \left((t-\beta)^{\alpha_0-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left\{\left(\frac{\|y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|x-y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}}\right)d\beta\Bigg).$$

Далі, використовуючи нерівність (9) та зважаючи на рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\|z\|^{\frac{1}{1-\alpha}}}dz \equiv E < +\infty, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

дістаємо оцінку

$$|\partial_x^q K_{l_*+1}(t,x;\tau,\xi)| \le c_*^2 mERB(\alpha_0,1)(t-\tau)^{\alpha_0-\frac{|q|_+}{h}} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad |q|_+\le\alpha_*,$$

у якій $R := 2^{\alpha_*\gamma_0}(1+T_0^{\alpha_*\gamma_0})$, $\gamma_0 := \max\{1;1/h\}$, $T_0 := \max\{1;T\}$.

Нехай тепер при $l\ge 2$, $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ і $|q|_+\le\alpha_*$

$$|\partial_x^q K_{l_*+l}(t,x;\tau,\xi)| \le c_*^{l+1}(mER)^l(2^{\alpha_*\gamma_0})^{l-1}\left(\prod_{j=0}^{l-1}B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\right)\times$$

$$\times(t-\tau)^{l\alpha_0-\frac{|q|_+}{h}} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (15)$$

Тоді для всіх $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$ і $|q|_+\le\alpha_*$

$$|\partial_x^q K_{l_*+l+1}(t,x;\tau,\xi)| \le m\int\limits_\tau^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^q K_1(t,x;\beta,y)|\;|K_{l_*+l}(\beta,y;\tau,\xi)|\,dy+$$

$$+m\sum_{|g|_+\le|q|_+}C_q^g\int\limits_{t_1}^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^q K_1(t,x;\beta,x-y)|\left|\partial_{x-y}^{q-g}K_{l_*+l}(\beta,x-y;\tau,\xi)\right|dy\le$$

$$\le mEc_*^{l+2}(mER)^l\,(2^{\alpha_*\gamma_0})^{l-1}\left(\prod_{j=0}^{l-1}B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\right)e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\times$$

$$\times\left\{(t-t_1)^{-\frac{|q|_+}{h}}+\sum_{|g|_+\le|q|_+}C_q^g(t_1-\tau)^{-\frac{|q-g|_+}{h}}\right\}\int\limits_\tau^t(t-\beta)^{\alpha_0-1}(\beta-\tau)^{l\alpha_0}d\beta\le$$

$$\le c_*^{l+2}(mER)^{l+1}\,(2^{\alpha_*\gamma_0})^l\left(\prod_{j=0}^{l}B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\right)(t-\tau)^{(l+1)\alpha_0-\frac{|q|_+}{h}}e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Звідси, згідно з методом математичної індукції, приходимо до виконання оцінки (15) для всіх $l \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Безпосередньо виходячи з оцінок (14), (15), переконуємося у правильності наступного допоміжного твердження.

Лема 1. *Матрична функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 є диференційовною функцією за змінною x до порядку α_* включно, для похідних якої виконується оцінка*

$$|\partial_x^q \Phi(t,x;\tau,\xi)| \leq c_1 (t-\tau)^{\alpha_0 - \left(1+\alpha n + \frac{|q|_+}{h}\right)} e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \qquad |q|_+ \leq \alpha_*, \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2 \tag{16}$$

(*тут оціночні сталі c_1 і δ_* не залежать від $t,\ \tau,\ x$ і ξ*).

Теорема 1. *Об'ємний потенціал $W(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 є диференційовною за змінною x функцією до порядку $\alpha_* + p_1$ включно, при цьому*

$$\partial_x^q W(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q G(t,\beta; x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad |q|_+ \leq p_1, \tag{17}$$

$$\partial_x^q W(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q G(t,\beta; x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\eta^k G(t,\beta;\eta)\partial_x^{q-k}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta, \quad |k|_+ = p_1 < |q|_+ \leq \alpha_* + p_1. \tag{18}$$

Доведення. Одержання формули (17) зводиться до встановлення рівномірної збіжності щодо x на $\mathbb{R}^n$ інтеграла

$$J_1(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \tag{19}$$

при $|q|_+ \leq p_1,\ \xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$. Проте ця збіжність стає очевидною, якщо зважити на умову (A) та оцінку

$$|J_1(t,x;\tau,\xi)| \leq cE \left((t-t_1)^{-\frac{n+\gamma+|q|_+}{h}} \int\limits_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{\alpha_0-1} d\beta + (t_1-\tau)^{\alpha_0-(\alpha n+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{\alpha_0 - 1 + \frac{p_1 - |q|_+}{h}} d\beta \right), \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2, \quad |q|_+ \leq p_1,$$

яку одержуємо безпосередньо із (3) і (16).

Доведемо тепер правильність формули (18). Для цього зафіксуємо таке $k \in \mathbb{Z}_+^n$, що $|k|_+ = p_1$. Тоді, згідно із (17), при $p_1 < |q|_+ \leq \alpha_* + p_1$ маємо

$$\partial_x^q W(t,x;\tau,\xi) = \partial_x^{q-k} \left(\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_\eta^k G(t,\beta;\eta))\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta \right), \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.$$

Отже, залишається обґрунтувати можливість внесення під знак відповідних інтегралів операції ∂_x^{q-k}, тобто встановити рівномірну збіжність щодо x на $\mathbb{R}^n$ інтегралів

$$\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^q G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy, \qquad \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\eta^k G(t,\beta;\eta)\partial_x^{q-k}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)\,d\eta$$

при $p_1 < |q|_+ \le \alpha_* + p_1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$. Розмірковуючи, як у випадку інтеграла (19), використовуючи оцінку (3) та лему 1, дістаємо необхідну збіжність зазначених інтегралів.

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 є диференційовною за змінною x до порядку $\alpha_* + p_1$ включно, при цьому*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |q|_+ \le \alpha_* + p_1, \quad \exists c > 0 \quad \forall (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2 :$$

$$|\partial_x^q Z(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+\gamma+|q|_+}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{20}$$

Цей наслідок випливає безпосередньо з теореми 1, рівності (5) та оцінок (3) і (16).

Для з'ясування властивостей $Z(t,x;\tau,\xi)$ щодо змінної t необхідне наступне допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай $\alpha_* \ge p - p_1$, тоді матрична функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ є рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ неперервною функцією за змінною t на проміжку $(\tau;T]$ при кожному фіксованому $\tau \in [0;T)$, причому існує додатна нескінченно мала в точці 0 величина $\sigma(\cdot)$ така, що*

$$\big|\Phi(t+\Delta,x;\tau,\xi) - \Phi(t,x;\tau,\xi)\big| \le c_0\theta^{-\frac{p_1}{h}}\sigma(\Delta)(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+p+\gamma}{h}} e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{21}$$

при $0 < \Delta \ll (t-\tau)$ і $\theta \in (0;1)$. Тут θ — залежна від $t-\tau$ величина, а c_0 і δ_0 — додатні сталі, не залежні від Δ, θ, t, τ, x і ξ.

Доведення. Скористаємося тим, що Φ — розв'язок інтегрального рівняння [3]

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K_1(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy. \tag{22}$$

Тоді

$$\big|\Phi(t+\Delta,x;\tau,\xi) - \Phi(t,x;\tau,\xi)\big| \le \big|K_1(t+\Delta,x;\tau,\xi) - K_1(t,x;\tau,\xi)\big| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (K_1(t+\Delta,x;\beta,y) - K_1(t,x;\beta,y))\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy \right| +$$

$$+\left|\int\limits_t^{t+\Delta} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t+\Delta, x; \beta, y)\Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy\right| \equiv$$

$$\equiv |\Delta_t K(t, x; \tau, \xi)| + J_1^{\Delta}(t, x; \tau, \xi) + J_2^{\Delta}(t, x; \tau, \xi). \tag{23}$$

Враховуючи те, що матрична функція G є розв'язком системи (2), теорему Лагранжа про скінченні прирости, а також оцінки (3) та рівномірну неперервність за часом коефіцієнтів системи (1), одержуємо

$$\begin{gathered}\big|\Delta_t K(t, x; \tau, \xi)\big| \leq \big|\{P_1(t+\Delta, x; i\partial_x) - P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t+\Delta, \tau; x-\xi)\big| + \\ + \big|P_1(t, x; i\partial_x)\{G(t+\Delta, \tau; x-\xi) - G(t, \tau; x-\xi)\}\big| \leq \\ \leq \sum_{|k|_+ \leq p_1} \Big\{ |A_{1,k}(t+\Delta; x) - A_{1,k}(t; x)| \left|\partial_x^k G(t+\Delta, \tau; x-\xi)\right| + \\ + \Delta |A_{1,k}(t; x)| \left|\partial_x^k \partial_\eta G(\eta, \tau, x-\xi)_{|\eta=t+\theta\Delta}\right| \Big\} \leq \\ \leq c_1 \left\{ \left(\max_{|k|_+ \leq p_1} \sigma_k(\Delta) \right) + \Delta \right\} (t-\tau)^{-\frac{n+p_1+p+\gamma}{h}} e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \\ \theta \in (0;1), \quad 0 < \Delta < (t-\tau)/2, \quad (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2\end{gathered} \tag{24}$$

(тут $\sigma_k(\cdot)$ — модуль рівномірної щодо змінної x неперервності по t матричного коефіцієнта $A_{k,1}(t; x)$, а c_1 і δ_0 — додатні сталі, не залежні від θ, Δ, t, τ, x і ξ).

Далі, знаходимо

$$J_1^{\Delta}(t, x; \tau, \xi) \leq \left|\int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_1(t+\Delta, x; i\partial_x)\{G(t+\Delta, \beta; x-y) - G(t, \beta; x-y)\}\Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy\right| +$$

$$+\left|\int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\{P_1(t+\Delta, x; i\partial_x) - P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t, \beta; x-y)\right) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy\right| \equiv$$

$$\equiv J_{1,1}^{\Delta}(t, x; \tau, \xi) + J_{1,2}^{\Delta}(t, x; \tau, \xi).$$

Використовуючи ще раз зображення

$$G(t+\Delta, \beta; x-y) - G(t, \beta; x-y) = \Delta\, P_0(t+\theta\Delta; i\partial_x) G(t+\theta\Delta, \beta; x-y), \quad \theta \in (0;1),$$

лему 1, а також оцінки (3) й обмеженість коефіцієнтів системи (1), для всіх $(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$ і $0 < \Delta \ll (t-\tau)/2$ отримуємо

$$\begin{gathered}J_{1,1}^{\Delta}(t, x; \tau, \xi) \leq \Delta \sum_{|k|_+ \leq p_1} |A_{1,k}(t+\Delta; x)| \left(\sum_{|q|_+ \leq p} |A_{0,q}(t+\theta\Delta)| \times \right. \\ \left. \times \left| \int\limits_\tau^t \left(\partial_x^q \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^k G(t+\theta\Delta, \beta; x-y)) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy \right) d\beta \right| \right) \leq\end{gathered}$$

$$\leq c\Delta\Bigg\{\sum_{|k|_+\leq p_1}\Bigg(\sum_{|q|_+\leq p}\Bigg|\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\partial_x^{k+q}G(t+\theta\Delta,\beta;x-y))\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy\Bigg|+$$

$$+\sum_{|q|_+\leq p_1}\Bigg|\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\partial_x^{k+q}G(t+\theta\Delta,\beta;x-y))\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy\Bigg|+$$

$$+\sum_{p_1<|q|_+\leq p}\Bigg|\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\partial_\eta^{k+p_1}G(t+\theta\Delta,\beta;\eta))(\partial_x^{q-p_1}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi))\,d\eta\Bigg|\Bigg)\Bigg\}\leq$$

$$\leq c_1\Delta^{1-\frac{p_1}{h}}\theta^{-\frac{p_1}{h}}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+p+\gamma}{h}}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\quad \theta\in(0;1), \tag{25}$$

де оціночні сталі $c_1,\ \delta_0$ не залежать від $\Delta,\ \theta,\ t,\ \tau,\ x$ і ξ.

Безпосередньо із неперервності по t коефіцієнтів $A_{1,k}(t;x)$ та оцінок (3) і (16) знаходимо

$$J_{1,2}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)\leq\sum_{|k|_+\leq p_1}|A_{1,k}(t+\Delta;x)-A_{1,k}(t;x)|\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^kG(t,\beta;x-y)||\Phi(\beta,y;\tau,\xi)|dy\right)d\beta\leq$$

$$\leq c\left(\max_{|k|_+\leq p_1}\sigma_k(\Delta)\right)B(\alpha_0,\alpha_0)(t-\tau)^{2\alpha_0-(1+\alpha n)}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{26}$$

для всіх $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ і $0<\Delta<(t-\tau)/2$.

Оцінимо тепер J_2^{Δ}:

$$J_2^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)\leq m\sum_{|k|_+\leq p_1}|A_{1,k}(t+\Delta;x)|\times$$

$$\times\int\limits_{t}^{t+\Delta}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\partial_x^kG(t+\Delta,\beta;x-y)\Big|\,|\Phi(\beta,y;\tau,\xi)|dy\leq$$

$$\leq c_1(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(\sum_{|k|_+\leq p_1}\int\limits_{t}^{t+\Delta}(t+\Delta-\beta)^{\alpha_0-1+\frac{p_1-|k|_+}{h}}d\beta\right)=$$

$$=c_2\Delta^{\alpha_0}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\qquad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,\quad 0<\Delta<(t-\tau)/2 \tag{27}$$

(тут оціночні сталі також не залежать від $\Delta,\ t,\ \tau,\ x$ і ξ).

Оцінки (23)–(27) забезпечують виконання нерівності (21), з якої безпосередньо випливає зазначена неперервність функції Φ щодо часової змінної.

Лему 2 доведено.

Теорема 2. *Об'ємний потенціал* $W(t,x;\tau,\xi)$ *на множині* Π_T^2 *є диференційовною за змінною* t *функцією за умови, що* $\alpha_* \geq p - p_1$ *і* $\alpha_* > n + \gamma$, *а у випадку, коли* $p_1 \geq h(1-\alpha)$, *то при* $\alpha_* \geq p - p_1$. *При цьому виконується рівність*

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi) = \Phi(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy +$$

$$+ \sum_{|k|_+ \leq p_1} \left(A_{0,k}(t) \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \right) +$$

$$+ \sum_{|r|_+ = p_1 < |q|_+ \leq p} \left(A_{0,q}(t) \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_\eta^r G(t,\beta;\eta))\partial_x^{q-r}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta \right) \tag{28}$$

для всіх $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$.

Доведення. Скористаємося зображенням

$$W(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \equiv$$

$$\equiv R(t,x;\tau,\xi) + V(t,x;\tau,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2,$$

згідно з яким для диференційовності за змінною t функції $W(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 достатньо встановити існування $\partial_t R(t,x;\tau,\xi)$ і $\partial_t V(t,x;\tau,\xi)$ на цій множині.

Зафіксуємо довільно $\tau \in [0;T)$ і $t \in (\tau,T]$, покладемо $\varepsilon := (t-\tau)/2$ та розглянемо множину $Q := [t-\varepsilon;T] \times \mathbb{R}^n$. Згідно з оцінками (3) і (16) знаходимо

$$|I_\tau(t,x,\xi)| := \left| \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \right| \leq$$

$$\leq cE(t-t_1)^{-\frac{n+p+\gamma}{h}} \int_\tau^{t_1} (\beta-\tau)^{\alpha_0-1}d\beta = \frac{cE}{\alpha_0}\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{\alpha_0 - \frac{n+p+\gamma}{h}}, \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.$$

Звідси отримуємо рівномірну збіжність на множині Q за сукупністю змінних t, x і ξ інтеграла $I_\tau(t,x,\xi)$, а відтак і диференційовність по t функції R та виконання рівності

$$\partial_t R(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2. \tag{29}$$

Далі, розглянемо допоміжну функцію

$$V^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{t_1}^{t-\Delta} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad \Delta \in (0;\varepsilon), \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.$$

Очевидно, що для всіх $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$ і $\Delta \in (0;\varepsilon)$

$$\partial_t V^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\Delta;x-y)\Phi(t-\Delta,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t-\Delta} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \equiv V_1^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) + V_2^{\Delta}(t,x;\tau,\xi). \tag{30}$$

Встановимо спочатку виконання граничного співвідношення

$$V_1^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) \underset{\Delta\to+0}{\overset{(t,x,\xi)\in Q}{\rightrightarrows}} \Phi(t,x;\tau,\xi) \tag{31}$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність на множині Q щодо змінних $t,\ x$ і ξ).

У випадку $p_1 \geq h(1-\alpha)$ будемо використовувати зображення

$$V_1^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\Delta;x-y)dy\Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi) -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\Delta;x-y)(\Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi)-\Phi(t-\Delta,y;\tau,\xi))dy \equiv$$

$$\equiv V_{1,1}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) - V_{1,2}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi).$$

Безпосередньо з рівності $G(t,\tau;\cdot) = F[\Theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot)$ та властивості оборотності перетворення Фур'є одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t-\Delta;x-y)dy = \Theta_{t-\Delta}^t(0), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси, враховуючи лему 2, отримуємо співвідношення

$$V_{1,1}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) \underset{\Delta\to+0}{\overset{(t,x,\xi)\in Q}{\rightrightarrows}} \Phi(t,x;\tau,\xi).$$

Таким чином, доведення граничного співвідношення (31) звелося до обґрунтування

$$V_{1,2}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi) \underset{\Delta\to+0}{\overset{(t,x,\xi)\in Q}{\rightrightarrows}} 0.$$

Лема 1 та теорема Лагранжа про скінченні прирости забезпечують існування додатних сталих c_0 і δ_0 таких, що для всіх $\{x,y,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \tau < t \leq T$ і $0 < \Delta < \varepsilon$

$$\left|\Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi) - \Phi(t-\Delta,y;\tau,\xi)\right| \leq c_0\|x-y\|(t-\tau)^{-\frac{n+1+\gamma}{h}} e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Тоді

$$\left|V_{1,2}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)\right| \leq c\Delta^{-\frac{n+\gamma}{h}}(t-\tau)^{-\frac{n+1+\gamma}{h}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\frac{\|x-y\|}{\Delta^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\|x-y\|dy \leq$$

$$\leq cE\sup_{\rho\geq 0}\left\{\rho e^{-\frac{\delta}{2}\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right\}(t-\tau)^{-\frac{n+1+\gamma}{h}}\Delta^{\alpha_0+\alpha-1+\frac{p_1}{h}}, \qquad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \quad 0<\Delta<\varepsilon.$$

Одержана оцінка забезпечує виконання співвідношення (31) при $p_1 \geq h(1-\alpha)$, оскільки у цьому випадку $\alpha_0+\alpha-1+\dfrac{p_1}{h}>0$.

Розглянемо тепер загальний випадок $p_1 \geq 0$. Тут користуватимемося тим, що матрична функція V_1^{Δ} є згорткою функцій $G(t,t-\Delta;\cdot)$ і $\Phi(t-\Delta,\cdot;\tau,\xi)$:

$$V_1^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)=G(t,t-\Delta;x)*\Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \quad 0<\Delta<\varepsilon.$$

Враховуючи властивості функцій G і Φ щодо просторових змінних, а також відому рівність

$$F[f*g](\cdot)=F[f](\cdot)\cdot F[g](\cdot),$$

одержуємо таке зображення:

$$V_1^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)=F^{-1}_{\eta\to x}[\Theta^t_{t-\Delta}(\eta)\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)](t-\Delta,x;\tau,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \quad 0<\Delta<\varepsilon,$$

в якому

$$\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi):=F_{x\to\eta}[\Phi(\beta,x;\tau,\xi)].$$

Таким чином, співвідношення (31) виконується, якщо справджуються такі твердження:

1) $\Theta^t_{t-\Delta}(\eta)\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi) \overset{\eta\in\mathbb{K},\xi\in\mathbb{R}^n,t\in[t-\varepsilon;T]}{\underset{\Delta\to+0}{\rightrightarrows}} 0$ $(\forall\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n)$ (тут $\mathbb{K}$ — компактна множина);

2) $\forall\tau\in[0;T)\ \exists c_\tau>0\ \exists r>n\ \forall t\in[t-\varepsilon;T]\ \forall\Delta\in(0;\varepsilon)\ \forall\{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$:

$$|\Theta^t_{t-\Delta}(\eta)\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)|\leq c_\tau(1+\|\eta\|)^{-r}.$$

Оскільки

$$\Theta^t_{t-\Delta}(\eta)\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi)=$$
$$=(\Theta^t_{t-\Delta}(\eta)-I)\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)+(\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi)),$$

де I — одинична матриця, то за лемою 2 виконання умови 1 рівносильне виконанню співвідношень

$$|\Theta^t_{t-\Delta}(\eta)-I| \overset{\eta\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n,t\in[t-\varepsilon;T]}{\underset{\Delta\to+0}{\rightrightarrows}} 0, \qquad |\Psi(t,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)| \overset{\eta\in\mathbb{K},\xi\in\mathbb{R}^n,t\in[t-\varepsilon;T]}{\underset{\Delta\to+0}{\rightrightarrows}} 0. \quad (32)$$

Безпосередньо з обмеженості елементів матриці $P_0(t;\eta)$ на множині $[0;T]\times\mathbb{K}$ $(\forall\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n)$ та структури матриціанта $\Theta^t_\tau(\cdot)$ знаходимо

$$|\Theta_{t-\Delta}^{t}(\eta) - I| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(mc\Delta)^l}{l!} \equiv e^{mc\Delta} - 1, \quad (t;\eta) \in [0;T] \times \mathbb{K}.$$

Звідси приходимо до першого граничного співвідношення із (32).

Для встановлення другого граничного співвідношення із (32) ще раз скористаємося лемою 2. Тоді для всіх $t \in [t-\varepsilon; T],\ \Delta \in (0;\varepsilon),\ \theta \in (0;1)$ і $\{\eta;\xi\} \subset \mathbb{R}^n$

$$|\Psi(t,\eta;\tau,\xi) - \Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Phi(t,x;\tau,\xi) - \Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi)| dx \leq$$

$$\leq \left(c_0 E \theta^{-\frac{p_1}{h}} (t-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+p+\gamma}{h}} \right) \sigma(\Delta) \equiv c(\tau;\varepsilon)\, \sigma(\Delta)$$

(тут оціночна величина $c(\tau;\varepsilon) > 0$ не залежить від $\Delta,\ t,\ \eta$ і ξ, а $\sigma(\Delta) \xrightarrow[\Delta\to+0]{} 0$).

Отже, граничне співвідношення 1 виконується.

Доведемо тепер твердження 2. Враховуючи лему 1 та оцінку (16), для всіх $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$, $0 < \Delta < \varepsilon$ і $|q|_+ \leq \alpha_*$ знаходимо

$$|\eta^q \Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^q e^{i(x,\eta)}) \Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi) dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^q \Phi(t-\Delta,x;\tau,\xi)|\, dx \leq c_1 E \left(\frac{t-\tau}{2} \right)^{\alpha n - \frac{n+|q|_+ + \gamma}{h}},$$

тобто одержуємо оцінку

$$\begin{gathered} |\Psi(t-\Delta,\eta;\tau,\xi)| \leq c(\tau;\varepsilon)(1+\|\eta\|)^{-|q|_+}, \\ |q|_+ \leq \alpha_*, \quad \{\eta,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in [t-\varepsilon;T], \quad \Delta \in (0;\varepsilon), \end{gathered} \tag{33}$$

у якій оціночний вираз $c(\tau;\varepsilon)$ не залежить від $\Delta,\ t,\ \eta$ і ξ.

Згідно з означенням параболічності за Шиловим системи (2) із коефіцієнтами, залежними від t, маємо [6]

$$|\Theta_\tau^t(\eta)| \leq c(1 + (t-\tau)\|\eta\|^p)^{m-1} e^{-\delta(t-\tau)\|\eta\|^h}, \qquad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

тоді

$$|\Theta_{t-\Delta}^t(\eta)| \leq c_0(1+\|\eta\|)^\gamma, \qquad 0 < \Delta < 1, \quad t \in [0;T], \quad \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{34}$$

Оцінки (33), (34) забезпечують правильність твердження 2 при $\alpha_* > n + \gamma$. Таким чином, виконання співвідношення (31) доведено.

Далі, враховуючи те, що при $\alpha_* \geq p - p_1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_0(t; i\partial_x) G(t,\beta; x-y) \Phi(\beta,y;\tau,\xi) dy =$$

$$= \sum_{|k|_+\le p_1} \left(A_{0,k}(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \right) +$$

$$+ \sum_{p_1<|q|_+\le p} \left(A_{0,q}(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_\eta^r G(t,\beta;\eta))\partial_x^{q-r}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta \right),$$

$$|r|_+ = p_1, \quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,$$

а також що матрична функція G є розв'язком системи (2), дістаємо рівність

$$V_2^\Delta(t,x;\tau,\xi) = V_{2,1}^\Delta(t,x;\tau,\xi) + V_{2,2}^\Delta(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \quad \Delta\in(0;\varepsilon),$$

у якій

$$V_{2,1}^\Delta(t,x;\tau,\xi) := \sum_{|k|_+\le p_1} A_{0,k}(t) \int\limits_{t_1}^{t-\Delta} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$V_{2,2}^\Delta(t,x;\tau,\xi) := \sum_{p_1<|q|_+\le p} A_{0,q}(t) \int\limits_{t_1}^{t-\Delta} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_\eta^r G(t,\beta;\eta))\partial_x^{q-r}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta.$$

Оскільки для всіх $\Delta\in(0;\varepsilon)$ і $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ виконуються оцінки

$$\left| \int\limits_{t-\Delta}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \right| \le$$

$$\le cE\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} \int\limits_{t-\Delta}^{t} (t-\beta)^{\alpha_0-1+\frac{p_1-|k|_+}{h}} d\beta =$$

$$= \frac{cEh\Delta^{\alpha_0+\frac{p_1-|k|_+}{h}}}{\alpha_0 h + p_1 - |k|_+} \left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}}, \quad |k|_+\le p_1,$$

і

$$\left| \int\limits_{t-\Delta}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_\eta^r G(t,\beta;\eta)\right) \partial_x^{q-r}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)dy \right| \le$$

$$\le c_1E\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{-\frac{n+\gamma+|q|_+}{h}} \int\limits_{t-\Delta}^{t} (t-\beta)^{\alpha_0-1} d\beta =$$

$$= \frac{c_1E}{\alpha_0}\,\Delta^{\alpha_0} \left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{-\frac{n+\gamma+|q|_+}{h}}, \quad |r|_+ = p_1 < |q|_+ \le p,$$

то справджуються граничні співвідношення

$$V_{2,1}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)\xrightarrow[\Delta\to+0]{(t,x,\xi)\in Q}\sum_{|k|_+\le p_1}A_{0,k}(t)\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^kG(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \tag{35}$$

$$V_{2,2}^{\Delta}(t,x;\tau,\xi)\xrightarrow[\Delta\to+0]{(t,x,\xi)\in Q}\sum_{p_1<|q|_+\le p}A_{0,q}(t)\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\partial_\eta^{p_1}G(t,\beta;\eta))\partial_x^{q-p_1}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta. \tag{36}$$

Зазначимо, що співвідношення (31), (35) і (36) дозволяють у формулі (30) перейти до границі при $\Delta\to+0$ та отримати рівність

$$\partial_tV(t,x;\tau,\xi)=\Phi(t,x;\tau,\xi)+\sum_{|k|_+\le p_1}\left(A_{0,k}(t)\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^kG(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy\right)+$$
$$+\sum_{|r|_+=p_1<|q|_+\le p}\left(A_{0,q}(t)\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\partial_\eta^{r}G(t,\beta;\eta))\partial_x^{q-r}\Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)d\eta\right),\quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \tag{37}$$

яка характеризує диференційовність функції V за змінною t.

Формула (28) стає очевидною, якщо зважити на (29) і (37) та рівність

$$\partial_tW(t,x;\tau,\xi)=\partial_tR(t,x;\tau,\xi)+\partial_tV(t,x;\tau,\xi).$$

Теорему 2 доведено.

Слід зазначити, що умова $p_1\ge h(1-\alpha)$ виконується, зокрема, для параболічних за Петровським систем, оскільки у цьому випадку $\mu=1,\ h=p_0=2b,\ b\in\mathbb{N}$ і $p_1=2b-1$, тому

$$h(1-\alpha)=2b\left(1-\frac{1}{2b}\right)=2b-1=p_1.$$

А для систем (1) з родом $\mu=0$ завжди

$$p-p_1>n+\gamma. \tag{38}$$

Цей факт випливає безпосередньо із того, що $p\ge h$, та умови (А), яка при $\mu=0$ набирає вигляду $n+\gamma<h-p_1$. Більше того, співвідношення (38) виконується також для систем із родом $0\le\mu\le\dfrac{p_0(p-h)}{nh}$. Дійсно, згідно з умовою (А) при таких μ матимемо

$$n+\gamma<h-p_1+\frac{nh}{p_0}\mu\le h-p_1+\frac{nh}{p_0}\,\frac{p_0(p-h)}{nh}=p-p_1.$$

Зазначимо також, що із теореми 2, рівності (5) та оцінок (3) і (16) випливає очевидний наслідок.

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *тоді на множині* Π_T^2 *матрична функція* $Z(t,x;\tau,\xi)$ *є диференційовною за змінною* t, *при цьому*

$$\exists\delta>0\ \ \exists c>0\ \ \forall(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2\colon|\partial_tZ(t,x;\tau,\xi)|\le c(t-\tau)^{-\frac{n+p+\gamma}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{39}$$

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай для системи* (1) *виконуються умови* (A) *і* (B). *Тоді при* $\alpha_* \ge p - p_1$ *і* $\alpha_* > n + \gamma$, *а у випадку, коли* $p_1 \ge h(1-\alpha)$, *то при* $\alpha_* \ge p - p_1$ *матрична функція* Z, *що визначається рівністю* (5), *є ФРЗК для цієї системи. При цьому для відповідних похідних функції* Z *виконуються оцінки* (20) *і* (39).

Доведення. Те, що у кожній фіксованій точці $(\tau;\xi) \in \Pi_{[0;T)}$ матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, що визначається рівністю (5), є класичним розв'язком системи (1) за змінними t і x на множині $\Pi_{(\tau;T]}$, випливає безпосередньо з рівності (22) і того, що матрична функція G є розв'язком системи (2), а також із теорем 1, 2.

Властивість δ-подібності функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ щодо змінної t встановлено в [3].

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, № 4. – С. 89 – 101.
2. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1 – 72.
3. *Літовченко В. А., Довжицька І. М.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 4. – С. 516 – 552.
4. *У Хоу Синь.* Об определении параболичности систем уравнений в частных производных // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 6. – С. 157 – 161.
5. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**. – С. 925 – 932.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
7. *Litovchenko V. A., Dovzhytska I. M.* Cauchy problem for a class parabolic systems of Shilov type with variable coefficients // Cent. Eur. J. Math. – 2012. – **10**, № 3. – P. 1084 – 1102.
8. *Литовченко В. А, Довжицкая И. М.* Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сиб. мат. журн. – 2014. – **55**, № 2. – С. 341 – 349.
9. *Довжицька І. М.* Задача Коші для параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2014. – 20 с.
10. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
11. *Литовченко В. А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 4. – С. 809 – 821.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

Одержано 20.09.16