УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля)

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ НАИЛУЧШЕЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

The exact Jackson-type inequalities with modules of continuity of a fractional order $\beta \in (0, \infty)$ are obtained on the classes of functions defined via the derivatives of a fractional order $\alpha \in (0, \infty)$ for the best approximation by entire functions of the exponential type in the space $L_2(\mathbb{R})$. In particular, we prove the inequality

$$2^{-\beta/2}\sigma^{-\alpha}(1-\cos t)^{-\beta/2} \le \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f)/\omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha f, t/\sigma) \colon f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})\} \le \sigma^{-\alpha}(1/t^2+1/2)^{\beta/2},$$

where $\beta \in [1, \infty)$, $t \in (0, \pi]$, $\sigma \in (0, \infty)$. The exact values of various mean ν-widths of the classes of functions determined via the fractional modules of continuity and majorant satisfying certain conditions are also determined.

На класах функцій, означених за допомогою похідних дробового порядку $\alpha \in (0, \infty)$, отримано точні нерівності типу Джексона з модулем неперервності дробового порядку $\beta \in (0, \infty)$ у випадку найкращої апроксимації цілими функціями експоненціального типу у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Зокрема, доведено співвідношення

$$2^{-\beta/2}\sigma^{-\alpha}(1-\cos t)^{-\beta/2} \le \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f)/\omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha f, t/\sigma) \colon f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})\} \le \sigma^{-\alpha}(1/t^2+1/2)^{\beta/2},$$

де $\beta \in [1, \infty)$, $t \in (0, \pi]$, $\sigma \in (0, \infty)$. Також обчислено точні значення низки середніх ν-поперечників класів функцій, означених за допомогою дробового модуля неперервності та мажоранти, яка задовольняє певні умови.

1. Введение. Модули непрерывности дробного порядка 2π-периодических функций впервые были рассмотрены в работах [1, 2]. В последующем указанные характеристики гладкости изучались во многих работах (см., например, [3 – 7]). Для функций, заданных на всей вещественной оси, модули непрерывности дробного порядка рассматривались в работах [8, 9]. Данную статью в определенном смысле можно рассматривать как дальнейшее продолжение указанной тематики.

Приведем необходимые понятия и определения. Пусть $L_2(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x \colon -\infty < x < \infty\}$, — пространство всех измеримых функций f, заданных на вещественной оси $\mathbb{R}$, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма определяется формулой $\|f\| := \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty$.

Для $\beta \in (0, \infty)$ запишем биномиальные коэффициенты

$$\binom{\beta}{0} := 1, \quad \binom{\beta}{1} := \beta, \quad \binom{\beta}{j} := \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-j+1)}{j!}, \tag{1.1}$$

где $j \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Отметим, что в случае $\beta = m$, $m \in \mathbb{N}$, соотношение (1.1) принимает вид

$$\binom{m}{j} := \left\{\frac{m!}{j!(m-j)!}, \text{ если } j = 0, \ldots, m; \ 0, \text{ если } j = m+1, m+2, \ldots\right\}. \tag{1.2}$$

Поскольку (см., например, [10], глава 4, § 20) $\sum_{j=0}^{\infty} \left|\binom{\beta}{j}\right| < \infty$, то разность дробного порядка β функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ с шагом $h \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\Delta_h^\beta f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\beta}{j} f(x - jh), \tag{1.3}$$

определена почти всюду на $\mathbb{R}$ и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Разность (1.3) называют левосторонней, если $h > 0$, и правосторонней, если $h < 0$.

Модулем непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ дробного порядка $\beta \in (0, \infty)$ называют величину

$$\omega_\beta(f, t) := \sup \left\{ \left\| \Delta_h^\beta f \right\| : |h| \leq t \right\}, \quad t > 0. \tag{1.4}$$

При $\beta = m$, $m \in \mathbb{N}$, из (1.1)–(1.4) получаем обычный модуль непрерывности m-го порядка для $f \in L_2(\mathbb{R})$. Напомним (см., например, [8]), что характеристика гладкости (1.4) имеет следующие свойства:

1) функция $\omega_\beta(f, t)$ является неубывающей, неотрицательной и такой, что $\lim_{t \to 0+} \omega_\beta(f, t) = 0$;

2) $\omega_\beta(f, t) \leq 2^{\beta - \lambda} \omega_\lambda(f, t)$, где $0 < \lambda \leq \beta$, $0 < t < \infty$;

3) $\omega_\beta(f + \varphi, t) \leq \omega_\beta(f, t) + \omega_\beta(\varphi, t)$, где $f, \varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $0 < t < \infty$.

Следуя работе [2], в [8] для функций, заданных на вещественной оси, было рассмотрено понятие производной дробного порядка $\alpha \in (0, \infty)$, которое приведем для рассматриваемого нами случая $L_2(\mathbb{R})$. Пусть функция $g \in L_2(\mathbb{R})$ такова, что

$$\lim_{h \to 0+} \left\| \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - g \right\| = 0.$$

Тогда, согласно [10, 11], функцию g будем называть сильной производной Лиувилля – Грюнвальда – Летникова дробного порядка α для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ и обозначать символом $\mathcal{D}^\alpha f$, т. е. $g = \mathcal{D}^\alpha f$. Из приведенного выше равенства, в частности, получаем $\|\mathcal{D}^\alpha f\| = \lim_{h \to 0+} \|\Delta_h^\alpha f / h^\alpha\|$.

Через $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, где $\alpha \in (0, \infty)$, обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые имеют производные дробного порядка $\mathcal{D}^\alpha f \in L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^\alpha(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\| + \|\mathcal{D}^\alpha f\|$. В случае $\alpha = r$, $r \in \mathbb{N}$, под $L_2^r(\mathbb{R})$ будем понимать класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что в данном случае $\mathcal{D}^r f = f^{(r)}$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

2. Некоторые дополнительные сведения о модуле непрерывности дробного порядка в $\boldsymbol{L_2}(\mathbb{R})$. Предварительно напомним необходимые нам сведения. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим последовательность функций $\{\mathcal{F}_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}$ вида

$$\mathcal{F}_k(f, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Важную роль в теории интеграла Фурье играет теорема Планшереля (см., например, [12], глава II, § 2.3, теорема 3): *если* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *то последовательность функций* $\{\mathcal{F}_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}$

сходится в среднеквадратическом к некоторой функции $\mathcal{F}(f)$, *интегрируемой в квадрате на всей вещественной оси* $\mathbb{R}$, *т. е.* $\lim_{k\to\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}_k(f,x)-\mathcal{F}(f,x)|^2dx=0.$

Напомним, что функцию $\mathcal{F}(f)\in L_2(\mathbb{R})$ называют преобразованием Фурье функции f в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$\mathcal{F}(f,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt \tag{2.1}$$

и функция $f\in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлена через ее преобразование Фурье, т. е.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f,t)e^{ixt}dt. \tag{2.2}$$

Отметим, что в формулах (2.1), (2.2), которые называют формулами обращения Фурье, интегралы понимают сходящимися в среднеквадратическом. Данный факт принято обозначать следующим образом:

$$\mathcal{F}(f,x)=\mathrm{l.i.m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-m}^{m}f(t)e^{-ixt}dt\colon m\to\infty\right\}$$

и

$$f(t)=\mathrm{l.i.m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-m}^{m}\mathcal{F}(f,x)e^{ixt}dt\colon m\to\infty\right\},$$

где под l.i.m понимают предел в среднем в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Также имеет место фундаментальная формула Парсеваля – Планшереля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,x)|^2dx. \tag{2.3}$$

Используя определение преобразования Фурье и соотношение (1.3), получаем

$$\mathcal{F}\left(\Delta_h^{\beta}f,x\right)=\left(1-e^{-ihx}\right)^{\beta}\mathcal{F}(f,x). \tag{2.4}$$

Из формул (2.3), (2.4) имеем

$$\left\|\Delta_h^{\beta}f\right\|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left(\Delta_h^{\beta}f,x\right)\right|^2dx=2^{\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,x)|^2(1-\cos(hx))^{\beta}dx. \tag{2.5}$$

Тогда согласно формулам (1.4), (2.5) модуль непрерывности дробного порядка $\beta\in(0,\infty)$ для функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\omega_{\beta}(f,t)=\sup_{|h|\le t}\left\{2^{\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,x)|^2(1-\cos(hx))^{\beta}dx\right\}^{1/2},\quad t>0. \tag{2.6}$$

Поскольку в случае $\beta = m,\ m \in \mathbb{N}$,

$$2^m(1-\cos(hx))^m = \left(2\sin\frac{hx}{2}\right)^{2m} =$$

$$= \binom{2m}{m} + 2\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m-j}\binom{2m}{j}\cos((m-j)hx)$$

(см., например, [13], пункт 1.320, формула 1), то в силу (2.6) для обыкновенного модуля непрерывности m-го порядка имеем

$$\omega_m(f,t) = \sup_{|h|\le t}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,x)|^2\left[\binom{2m}{m} - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{2m}{m-j}\cos(jhx)\right]dx\right\}^{1/2}. \quad (2.7)$$

В работе [14] было получено описание модуля непрерывности (2.7) в $L_2(\mathbb{R})$ при $m=1$.

Указанный результат на общий случай $m = 2, 3, \ldots$ был распространен в работе [15]. Продолжим данную тематику для модулей непрерывности дробного порядка $\beta \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{R}_+ := \{x\colon 0 \le x < \infty\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,2,\ldots\}$. Для этого запишем формулу разложения бинома $(1+t)^\beta$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t=0$ [16] (глава I, § 4, пункт 3):

$$(1+t)^\beta = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\binom{\beta}{j}t^j. \quad (2.8)$$

Ряд, расположенный в правой части формулы (2.8), сходится абсолютно и равномерно для всех $|t| < 1$. При этом в случае $t = 1$ и $t = -1$ указанный ряд также является сходящимся. Используя равенство (2.8), получаем

$$(1-\cos(hx))^\beta = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\binom{\beta}{2j}\cos^{2j}(hx) - \binom{\beta}{2j-1}\cos^{2j-1}(hx)\right\}. \quad (2.9)$$

В силу формул 5 и 7 из [13] (пункт 1.320) запишем

$$\cos^{2j}(hx) = \frac{1}{2^{2j}}\left\{\binom{2j}{j} + 2\sum_{k=1}^{j}\binom{2j}{j-k}\cos(2khx)\right\}, \quad (2.10)$$

$$\cos^{2j-1}(hx) = \frac{1}{2^{2j-2}}\sum_{k=1}^{j}\binom{2j-1}{j-k}\cos((2k-1)hx). \quad (2.11)$$

Используя формулы (2.6) и (2.9)–(2.11), имеем

$$\omega_\beta(f,t) = \sup_{|h|\le t}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f,x)|^2\left[2^\beta + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2j-\beta}}\binom{\beta}{2j}\binom{2j}{j} + \right.\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{2^{2j-1-\beta}}\binom{\beta}{2j}\binom{2j}{j-k}\cos(2khx) - \right.$$

$$-\frac{1}{2^{2j-2-\beta}}\binom{\beta}{2j-1}\binom{2j-1}{j-k}\cos\left((2k-1)hx\right)\Bigg)\Bigg]\,dx\Bigg\}^{1/2}, \quad t>0. \tag{2.12}$$

Прежде чем сформулировать одно утверждение, напомним, что под $L_1(\mathbb{R})$ понимают пространство измеримых функций f, модуль которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке и $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. Символом $L_1^+(\mathbb{R})$ обозначим множество всех неотрицательных и неэквивалентных нулю функций из $L_1(\mathbb{R})$.

Утверждение 1. *Для того чтобы функция ω_β была модулем непрерывности дробного порядка $\beta\in\mathbb{R}_+\backslash\mathbb{Z}_+$ некоторой функции из пространства $L_2(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция ρ, которая удовлетворяет следующим условиям*:

1) *ρ — косинус-преобразование Фурье некоторой функции $\zeta\in L_1^+(\mathbb{R})$, т. е.*

$$\rho(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta(\tau)\cos(x\tau)d\tau; \tag{2.13}$$

2) *имеет место представление*

$$\omega_\beta(t)=\sup_{|h|\le t}\left\{2^\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta(\tau)(1-\cos(h\tau))^\beta d\tau\right\}^{1/2}=$$

$$=\sup_{|h|\le t}\Bigg\{\left[2^\beta+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2j-\beta}}\binom{\beta}{2j}\binom{2j}{j}\right]\rho(0)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\Bigg[\frac{1}{2^{2j-1-\beta}}\binom{\beta}{2j}\binom{2j}{j-k}\rho(2kh)-$$

$$-\frac{1}{2^{2j-2-\beta}}\binom{\beta}{2j-1}\binom{2j-1}{j-k}\rho((2k-1)h)\Bigg]\Bigg\}^{1/2}. \tag{2.14}$$

Доказательство. *Достаточность*. Пусть существует функция ρ, удовлетворяющая условиям 1, 2 данного утверждения. Исходя из вида соотношения (2.13), рассмотрим функцию f_0, для преобразования Фурье которой имеем $\mathcal{F}(f_0,x)=\sqrt{\zeta(x)}$. Здесь функция ζ удовлетворяет требованиям условия 1. Следовательно, $f_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\zeta(t)}\,e^{ixt}dt$. Учитывая соотношения (2.12) – (2.14), для $f_0\in L_2(\mathbb{R})$ получаем $\omega_\beta(t)=\omega_\beta(f_0,t)$, где $t>0$.

Необходимость. Полагаем, что существует функция $f_1\in L_2(\mathbb{R})$, для которой при любом $t>0$ справедливо равенство $\omega_\beta(t)=\omega_\beta(f_1,t)$. Пусть $\zeta(x):=|\mathcal{F}(f_1,x)|^2$. Тогда $\zeta\in L_1^+(\mathbb{R})$ и

$$\rho(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f_1,\tau)|^2\cos(x\tau)d\tau. \tag{2.15}$$

Поскольку, в силу соотношения (2.15), правая часть формулы (2.12), где $f = f_1$, может быть представлена в виде правой части равенства (2.14), отсюда получаем выполнение условия 2, что и завершает доказательство утверждения 1.

Далее напомним, что из результатов, полученных в работе [8], следует, что для произвольной функции $f \in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, \infty)$, почти всюду на $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^{\alpha} f) = (ix)^{\alpha} \mathcal{F}(f, x). \tag{2.16}$$

Воспользовавшись данным результатом, сделаем одно замечание. Из формулы (2.4) следует соотношение

$$\mathcal{F}\left(\Delta_h^{\alpha} f / h^{\alpha}, x\right) = \left((1 - e^{-ihx})/h\right)^{\alpha} \mathcal{F}(f, x),$$

из которого имеем

$$\lim_{h \to 0+} \mathcal{F}\left(\Delta_h^{\alpha} f / h^{\alpha}, x\right) = (ix)^{\alpha} \mathcal{F}(f, x).$$

Тогда в силу формулы (2.16) для почти всех $x \in \mathbb{R}$ получаем $\mathcal{F}(\mathcal{D}^{\alpha} f, x) = \lim_{h \to 0+} \mathcal{F}\left(\Delta_h^{\alpha} f / h^{\alpha}, x\right)$. Используя обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [17], глава III, пункт 3.11.21) и данное равенство, для почти всех $x \in \mathbb{R}$ записываем

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathcal{D}^{\alpha} f, t) \frac{e^{-itx} - 1}{-it} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \to 0+} \mathcal{F}\left(\frac{\Delta_h^{\alpha} f}{h^{\alpha}}, t\right) \frac{e^{-itx} - 1}{-it} dt =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left(\frac{\Delta_h^{\alpha} f}{h^{\alpha}}, t\right) \frac{e^{-itx} - 1}{-it} dt = \lim_{h \to 0+} \frac{\Delta_h^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}}.$$

Таким образом, если существует в указанном ранее смысле сильная производная Лиувилля – Грюнвальда – Летникова $\mathcal{D}^{\alpha} f$, то почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем $\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0+} \Delta_h^{\alpha} f(x) / h^{\alpha}$.

Дополним свойства модуля непрерывности дробного порядка, использовав для этого понятие сильной производной Лиувилля – Грюнвальда – Летникова, представление $\omega_{\beta}(f)$ в виде (2.6) и соотношение (2.16):

4) пусть $f \in L_2^{\beta}(\mathbb{R})$, где $\beta \in (0, \infty)$, тогда $\omega_{\beta}(f, t) \le t^{\beta} \|\mathcal{D}^{\beta} f\|,\ t > 0$;

5) пусть $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ и $f \in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, тогда $\omega_{\alpha+\beta}(f, t) \le t^{\alpha} \omega_{\beta}(\mathcal{D}^{\alpha} f, t),\ t > 0$.

Докажем свойство 4. Поскольку $1 - \cos(hx) \le 2\sin^2(hx/2) \le (hx)^2/2$, то для произвольной функции $f \in L_2^{\beta}(\mathbb{R})$ в силу формул (2.3), (2.6) и (2.16) имеем

$$\omega_{\beta}(f, t) \le \sup_{|h| \le t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f, x)|^2\, |hx|^{2\beta} dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le t^{\beta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f, x)|^2\, |x|^{2\beta} dx \right\}^{1/2} =$$

$$= t^{\beta} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\mathcal{D}^{\beta} f, x)|^2 dx \right\}^{1/2} = t^{\beta} \|\mathcal{D}^{\beta} f\|.$$

Далее докажем свойство 5. Пусть $f \in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\omega_{\alpha+\beta}(f,t) = \sup_{|h| \le t} \left\{ 2^{\alpha+\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f,x)|^2 (1-\cos(hx))^{\beta} \left(2\sin^2(hx/2)\right)^{\alpha} dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{|h| \le t} \left\{ 2^{\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f,x)|^2 \ |hx|^{2\alpha} (1-\cos(hx))^{\beta} dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le t^{\alpha} \sup_{|h| \le t} \left\{ 2^{\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\mathcal{D}^{\alpha} f,x)|^2 (1-\cos(hx))^{\beta} dx \right\}^{1/2} = t^{\alpha} \omega_{\beta}(\mathcal{D}^{\alpha} f, t).$$

3. Наилучшая среднеквадратическая аппроксимация целыми функциями экспоненциального типа $\sigma \in (0,\infty)$ на классах $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, где $\alpha \in (0,\infty)$, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Начало исследованиям, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси, было положено в работе [18]. Средством приближения при этом служило пространство целых функций конечного экспоненциального типа. В последующем это направление исследований получило дальнейшее развитие во многих работах (см., например, [18–35]). При этом особый интерес, по мнению автора, представляет получение точных в том или ином смысле результатов, связанных с решением экстремальных задач теории аппроксимации функций на прямой $\mathbb{R}$ (см., например, [21–24, 27–35]).

Через $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $\sigma \in (0,\infty)$, обозначим множество, элементами которого являются сужения на $\mathbb{R}$ всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ величину $\mathcal{A}_{\sigma}(f) := \inf\{\|f-g\| : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$ называют наилучшим приближением f элементами множества $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Введем следующие обозначения:

$$(1-\cos x)_* := \{1-\cos x, \ \text{ если } \ |x| \le \pi; \ \ 2, \ \text{ если } \ |x| \ge \pi\}, \tag{3.1}$$

$$\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\psi,t) := 2^{\beta/2} |u|^{\alpha} \left\{ \int\limits_0^t (1-\cos(u\tau))^{\beta p/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}, \tag{3.2}$$

$$\chi_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t) := \sup_{f \in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{ \int_0^t \omega_{\beta}^p(\mathcal{D}^{\alpha} f, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}}. \tag{3.3}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha, \beta, \sigma \in (0,\infty)$, $0 < p \le 2$, $0 < t \le \pi/\sigma$, ψ — неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке $[0,t]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место двойное неравенство*

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t)} \le \chi_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t) \le \frac{1}{\inf\{\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\psi,t) : \sigma \le u < \infty\}}. \tag{3.4}$$

Доказательство. В работе [21] было установлено, что для произвольной функции $f \in \in L_2(\mathbb{R})$ целая функция

$$\Lambda_\sigma(f,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{F}(f,\tau) e^{ix\tau} d\tau, \tag{3.5}$$

принадлежащая $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, является элементом наилучшего приближения f в смысле метрики пространства $L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \|f - \Lambda_\sigma(f)\| = \left\{ \int\limits_{|\tau|\ge\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}. \tag{3.6}$$

Используя формулы (2.4) и (2.16), имеем

$$\mathcal{F}(\Delta_h^\beta \mathcal{D}^\alpha f, x) = (1 - e^{-ihx})^\beta \mathcal{F}(\mathcal{D}^\alpha f, x) = (1 - e^{-ihx})^\beta (ix)^\alpha \mathcal{F}(f,x). \tag{3.7}$$

На основании соотношений (2.3) и (3.7) получаем

$$\left\|\Delta_h^\beta \mathcal{D}^\alpha f\right\|^2 = 2^\beta \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f,u)|^2 \, |u|^{2\alpha} (1 - \cos(hu))^\beta du. \tag{3.8}$$

Из определения модуля непрерывности дробного порядка (1.4) и формулы (3.8) имеем

$$\omega_\beta^2(\mathcal{D}^\alpha f, \tau) \ge \left\|\Delta_\tau^\beta \mathcal{D}^\alpha f\right\|^2 \ge 2^\beta \int\limits_{|u|\ge\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2 \, |u|^{2\alpha} (1 - \cos(\tau u))^\beta du, \tag{3.9}$$

где $\tau > 0$. Полагаем

$$G(f;u,\tau) := 2^{p\beta/2} |\mathcal{F}(f,u)|^p \, |u|^{\alpha p} (1 - \cos(\tau u))^{p\beta/2} \psi(\tau).$$

Используя соотношение (3.9), обозначение (3.2) и обобщенное неравенство Минковского (см., например, [20]), глава I, § 1.3), для $0 < t \le \pi/\sigma$ записываем

$$\left\{ \int\limits_0^t \omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha f, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{ \int\limits_0^t \left[2^\beta \int\limits_{|u|\ge\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2 \, |u|^{2\alpha} (1 - \cos(\tau u))^\beta du \right]^{p/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^t \left[\int\limits_{|u|\ge\sigma} G^{2/p}(f;u,\tau) du \right]^{p/2} d\tau \right\}^{1/p} \ge$$

$$\geq \left\{ \int\limits_{|u|\geq\sigma} \left[\int\limits_0^t G(f;u,\tau)d\tau \right]^{2/p} du \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{|u|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2 \left[2^{p\beta/2}\, |u|^{\alpha p} \int\limits_0^t (1-\cos{(\tau u)})^{p\beta/2}\psi(\tau)d\tau \right]^{2/p} du \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{|u|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2\; \gamma^2_{u,\beta,\alpha,p}(\psi,t)du \right\}^{1/2}. \tag{3.10}$$

Из формулы (3.10) с учетом (3.6) получаем

$$\left\{ \int\limits_0^t \omega^p_\beta(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)\psi(\tau)d\tau \right\}^{1/p} \geq \mathcal{A}_\sigma(f)\; \inf\{\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\psi,t)\colon \sigma\leq u<\infty\}.$$

Используя данное неравенство и обозначение (3.3), находим

$$\chi_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t) \leq \frac{1}{\inf\{\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\psi,t)\colon \sigma\leq u<\infty\}}. \tag{3.11}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики (3.3), где $0<t\leq\pi/\sigma$, рассмотрим функцию $q_\varepsilon(x)\colon = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(\lambda_{\sigma+\varepsilon}(x)-\lambda_\sigma(x))$ экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$. Здесь $0<\varepsilon<\sigma_*$, где $\sigma_* := \min\{\sigma,1/\sigma\}$, $\lambda_a(x) := \{\sin(ax)/x$, если $x\neq 0$; a, если $x=0\}$, $a>0$ (см., например, [28–33]). При этом для преобразования Фурье функции q_ε имеем $\mathcal{F}(q_\varepsilon,x) = \{1$, если $\sigma<|x|<\sigma+\varepsilon$; 0, если $|x|<\sigma$ или $|x|>\sigma+\varepsilon\}$. Тогда, согласно формуле (3.6), получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Используя соотношения (2.5), (2.16) и (3.1), для функции q_ε имеем

$$\|\Delta^\beta_h\mathcal{D}^\alpha q_\varepsilon\|^2 = 2^{\beta+1}\int\limits_\sigma^{\sigma+\varepsilon} x^{2\alpha}(1-\cos{(hx)})^\beta dx \leq 2^{\beta+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2\alpha}(1-\cos{((\sigma+\varepsilon)h)})^\beta_*. \tag{3.13}$$

На основании формул (1.4) и (3.13) для модуля непрерывности дробного порядка функции $\mathcal{D}^\alpha q_\varepsilon$ запишем оценку сверху

$$\omega^p_\beta(\mathcal{D}^\alpha q_\varepsilon,\tau) \leq 2^{p(\beta+1)/2}\,\varepsilon^{p/2}(\sigma+\varepsilon)^{\alpha p}(1-\cos{((\sigma+\varepsilon)\tau)})^{p\beta/2}_*. \tag{3.14}$$

Умножая обе части неравенства (3.14) на функцию ψ и интегрируя левую и правую части полученного таким образом соотношения по переменной τ в пределах от 0 до t, где $0<t\leq$ $\leq\pi/\sigma$, получаем

$$\int\limits_0^t \omega^p_\beta(\mathcal{D}^\alpha q_\varepsilon,\tau)\psi(\tau)d\tau \leq 2^{p(\beta+1)/2}\,\varepsilon^{p/2}(\sigma+\varepsilon)^{\alpha p}\int\limits_0^t (1-\cos{((\sigma+\varepsilon)\tau)})^{p\beta/2}_*\psi(\tau)d\tau.$$

На основании обозначения (3.2) далее полагаем

$$\gamma^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha,p}(\psi,t) := 2^{\beta/2}(\sigma+\varepsilon)^{\alpha}\left\{\int\limits_0^t (1-\cos((\sigma+\varepsilon)\tau))_*^{p\beta/2}\psi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}. \qquad (3.15)$$

Тогда с учетом формул (3.12), (3.14) и (3.15) запишем

$$\mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon)\Big/\left\{\int\limits_0^t \omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha q_\varepsilon,\tau)\psi(\tau)d\tau\right\}^{1/p} \geq 1\Big/\gamma^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha,p}(\psi,t).$$

Поскольку, как нетрудно проверить, $q_\varepsilon \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$, то согласно соотношению (3.3) имеем

$$\chi_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t) \geq 1/\gamma^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha,p}(\psi,t), \quad 0 < t \leq \pi/\sigma. \qquad (3.16)$$

Из формулы (3.15) следует, что величина $\gamma^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha,p}(\psi,t)$ при $\varepsilon \to 0+$ монотонно убывает при фиксированных значениях остальных параметров, при этом $\lim_{\varepsilon\to 0+}\gamma^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha,p}(\psi,t) = \gamma_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t)$. Отсюда следует, что для произвольного сколь угодно малого числа $\delta > 0$ существует такое значение $\widehat{\varepsilon} := \widehat{\varepsilon}(\delta) \in (0,\sigma_*)$, для которого выполняется неравенство

$$1/\gamma^*_{\sigma+\widehat{\varepsilon},\beta,\alpha,p}(\psi,t) > 1/\gamma_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t) - \delta. \qquad (3.17)$$

Из формулы (3.17) и из определения верхней грани числового множества имеем

$$\sup\left\{1/\gamma^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha,p}(\psi,t) \colon 0 < \varepsilon < \sigma_*\right\} = 1/\gamma_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t). \qquad (3.18)$$

Поскольку левая часть неравенства (3.16) не зависит от ε, то после вычисления верхней грани по $\varepsilon \in (0,\sigma_*)$ от его правой части с учетом (3.18) получаем

$$\chi_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t) \geq 1/\,\gamma_{\sigma,\beta,\alpha,p}(\psi,t). \qquad (3.19)$$

Требуемое двойное неравенство (3.4) следует из соотношений (3.11) и (3.19).

Теорема 1 доказана.

4. Некоторые следствия из теоремы 1.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\beta,\sigma \in (0,\infty)$, $\alpha \in [1/2,\infty)$, $t \in (0,\pi/\sigma]$, ψ *— неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке* $[0,t]$ *функция, которая не эквивалентна нулю и дифференцируема почти всюду на интервале* $(0,t)$. *Если существует такое значение* $\widetilde{p} \in [1/\alpha, 2]$, *что для почти всех* $\tau \in [0,t]$ *справедливо соотношение*

$$(\alpha\widetilde{p}-1)\psi(\tau) - \tau\psi'(\tau) \geq 0, \qquad (4.1)$$

то имеет место равенство

$$\chi_{\sigma,\beta,\alpha,\widetilde{p}}(\psi,t) = 1/\gamma_{\sigma,\beta,\alpha,\widetilde{p}}(\psi,t). \qquad (4.2)$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости формулы (4.2), нужно показать выполнение равенства

$$\inf\{\gamma_{u,\beta,\alpha,\widetilde{p}}(\psi,t) \colon \sigma \leq u < \infty\} = \gamma_{\sigma,\beta,\alpha,\widetilde{p}}(\psi,t). \qquad (4.3)$$

В связи с этим рассмотрим вспомогательную функцию

$$Q(u) := 2^{-\widetilde{p}\beta/2}\gamma^{\widetilde{p}}_{u,\beta,\alpha,\widetilde{p}}(\psi,t) = u^{\alpha\widetilde{p}}\int\limits_0^t (1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}\psi(\tau)d\tau,$$

где $\sigma \le u < \infty$, и вычислим ее первую производную

$$Q'(u) = \alpha\widetilde{p}u^{\alpha\widetilde{p}-1}\int\limits_0^t (1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}\psi(\tau)d\tau + u^{\alpha\widetilde{p}}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial u}(1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}\psi(\tau)d\tau.$$

Полагая, что переменные τ и u принимают положительные значения из множества $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, путем непосредственной проверки можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial u}(1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2} = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial \tau}(1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}\ .$$

С учетом этого для Q' получаем

$$Q'(u) = u^{\alpha\widetilde{p}-1}\left\{\alpha\widetilde{p}\int\limits_0^t (1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}\psi(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \tau\psi(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}d\tau\right\}.$$

Вычисляя второй интеграл путем интегрирования по частям, записываем

$$Q'(u) = u^{\alpha\widetilde{p}-1}\left\{t\psi(t)(1-\cos(tu))^{\widetilde{p}\beta/2} + \int\limits_0^t \left[\alpha\widetilde{p}\psi(\tau) - (\tau\psi(\tau))'\right](1-\cos(\tau u))^{\widetilde{p}\beta/2}d\tau\right\}. \tag{4.4}$$

Учитывая соотношение (4.1), из (4.4) заключаем, что для любого $u \in [\sigma,\infty)$ выполнено неравенство $Q'(u) \ge 0$, т. е. функция Q является неубывающей на рассматриваемом множестве. Следовательно, имеет место равенство (4.3) и (4.2) вытекает из формулы (3.4).

Следствие 1 доказано.

Далее приведем несколько примеров весовых функций, удовлетворяющих условию (4.1).

Пусть $\alpha \in [1/2,\infty)$, $\widetilde{p} \in [1/\alpha, 2]$ и $\xi \in [0, \alpha\widetilde{p}-1]$. Тогда для весовой функции $\psi_0(\tau) := \tau^{\xi}$ условие (4.1) имеет место, поскольку в указанном случае оно принимает вид $\alpha\widetilde{p}-1 \ge \xi$. В частности, при $\xi = 0$ из формул (3.2), (3.3) и (4.2) получаем

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^t \omega_\beta^{\widetilde{p}}(\mathcal{D}^{\alpha}f,\tau)d\tau\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{2^{\beta/2}\left\{\int_0^t (1-\cos(\sigma\tau))^{\widetilde{p}\beta/2}d\tau\right\}^{1/\widetilde{p}}}, \tag{4.5}$$

где $t \in (0,\pi/\sigma]$, $\beta \in (0,\infty)$. В качестве второго примера рассмотрим весовую функцию $\psi_1(\tau) := \sin^{\xi}(b\tau/t)$, где $b \in (0,\pi]$, $\tau \in (0,t]$, $t \in (0,\pi/\sigma]$, $\sigma \in (0,\infty)$, $\xi \in [0,\alpha\widetilde{p}-1]$, $\alpha \in [1/2,\infty)$, $\widetilde{p} \in [1/\alpha, 2]$. Полагаем $\operatorname{sinc} x := \{\sin(x)/x$, если $x \ne 0; 1$, если $x = 0\}$. Условие (4.1) для функции ψ_1 принимает вид

$$(\alpha\widetilde{p}-1)\psi_1(\tau) - \tau\psi_1'(\tau) = (\alpha\widetilde{p}-1)\sin^{\xi}(b\tau/t) - \xi(b\tau/t)\sin^{\xi-1}(b\tau/t)\cos(b\tau/t) =$$
$$= (b\tau/t)\sin^{\xi-1}(b\tau/t)\left\{(\alpha\widetilde{p}-1)\operatorname{sinc}(b\tau/t) - \xi\cos(b\tau/t)\right\}. \tag{4.6}$$

Поскольку при $x \in [0, \pi]$ имеем $\operatorname{sinc} x \geq \cos x$, то из соотношения (4.6) получаем

$$(\alpha\widetilde{p} - 1)\psi_1(\tau) - \tau\psi_1^{'}(\tau) \geq (b\tau/t)\sin^{\xi-1}(b\tau/t)(\alpha\widetilde{p} - 1 - \xi)\operatorname{sinc}(b\tau/t) \geq 0,$$

т. е. условие (4.1) для функции ψ_1 выполнено. В указанном случае равенство (4.2) принимает вид

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^t \omega_\beta^{\widetilde{p}}(\mathcal{D}^\alpha f, \tau) \sin^\xi(b\tau/t) d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\beta/2} \left\{ \int_0^t (1 - \cos(\sigma\tau))^{\widetilde{p}\beta/2} \sin^\xi(b\tau/t) d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}},$$

где $\beta \in (0, \infty)$. Очевидно, что при $\xi = 0$ непосредственно получаем соотношение (4.5).

***Следствие* 2.** *Пусть* $\alpha, \sigma \in (0, \infty)$, $\beta \in [1, \infty)$, $p = 2/\beta$, $t \in (0, 3\pi/(4\sigma)]$, $\psi \equiv 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\alpha \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^t \omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f, \tau) d\tau \right\}^{\beta/2}} = \left\{ \frac{1}{2t(1 - \operatorname{sinc}(\sigma t))} \right\}^{\beta/2}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Для получения соотношения (4.7) покажем справедливость равенства

$$\inf\{ \gamma_{u,\beta,\alpha,2/\beta}(1, t) \colon \sigma \leq u < \infty \} = \gamma_{\sigma,\beta,\alpha,2/\beta}(1, t). \tag{4.8}$$

С этой целью, используя формулу (3.2), рассматриваем функцию

$$\widetilde{Q}(u) := \gamma_{u,\beta,\alpha,2/\beta}(1, t) = 2^{\beta/2} u^\alpha \left\{ \int_0^t (1 - \cos(u\tau)) d\tau \right\}^{\beta/2} = u^\alpha \left\{ 2t(1 - \operatorname{sinc}(ut)) \right\}^{\beta/2},$$

где $\sigma \leq u < \infty$. Поскольку при $0 < t \leq 3\pi/(4\sigma)$ в силу поведения функции $\operatorname{sinc} x$ [31] имеем

$$\inf_{\sigma \leq u < \infty} (1 - \operatorname{sinc}(ut))^{\beta/2} = \left(1 - \sup_{\sigma \leq u < \infty} \operatorname{sinc}(ut) \right)^{\beta/2} = (1 - \operatorname{sinc}(\sigma t))^{\beta/2},$$

то $\inf\{\widetilde{Q}(u) \colon \sigma \leq u < \infty\} = \widetilde{Q}(\sigma)$, т. е. формула (4.8) имеет место. В силу соотношения (3.4) и равенства (4.8) получаем требуемый результат (4.7), что и завершает доказательство следствия 2.

Отметим, что существуют такие $\beta \in [1, \infty)$, при которых значение $p := 2/\beta$ не будет принадлежать отрезку $[1/\alpha, 2]$, где $\alpha \in [1/2, \infty)$. Указанное получаем, когда $\beta \in (2\alpha, \infty)$, поскольку для определенных отмеченным выше образом $p = 2/\beta$ имеем $0 < p < 1/\alpha$. Таким образом, следствие 2 является результатом, который не может рассматриваться как частный случай, вытекающий из следствия 1 при $\psi \equiv 1$.

Пусть далее $t := z/\sigma$ и $\psi_*(\tau) := \eta(\sigma\tau)$, где $z \in (0, \pi]$; $\tau \in (0, z/\sigma]$; $\sigma \in (0, \infty)$. Тогда, используя формулу (3.2), для $\sigma \leq u < \infty$ записываем

$$\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\psi_*, z/\sigma) = 2^{\beta/2}u^{\alpha}\left\{\int\limits_0^{z/\sigma}(1-\cos(u\tau))^{p\beta/2}\eta(\sigma\tau)d\tau\right\}^{1/p} =$$

$$= 2^{\beta/2}\sigma^{\alpha-1/p}\left\{(u/\sigma)^{\alpha p}\int\limits_0^{z}(1-\cos(u\tau/\sigma))^{p\beta/2}\eta(\tau)d\tau\right\}^{1/p}.$$

Полагая $x := u/\sigma$, отсюда получаем

$$\inf_{\sigma\le u<\infty}\gamma_{u,\beta,\alpha,p}(\psi_*, z/\sigma) \ge \sigma^{\alpha-1/p}\inf_{1\le x<\infty}\left\{2^{p\beta/2}x^{\alpha p}\int\limits_0^{z}(1-\cos(x\tau))^{p\beta/2}\eta(\tau)d\tau\right\}^{1/p}. \qquad (4.9)$$

Введем обозначение

$$\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta, z; x) := 2^{p\beta/2}x^{\alpha p}\int\limits_0^{z}(1-\cos(x\tau))^{p\beta/2}\eta(\tau)d\tau. \qquad (4.10)$$

Тогда в силу (4.9), (4.10) из теоремы 1 получаем такое следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\alpha, \beta, \sigma \in (0, \infty)$, $0 < p \le 2$, $z \in (0, \pi]$, η *— измеримая, суммируемая на отрезке* $[0, z]$ *функция, которая неотрицательна и не эквивалентна нулю. Тогда выполняется двойное неравенство*

$$\frac{1}{\{\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta, z; 1)\}^{1/p}} \le \sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^z\omega_{\beta}^p(\mathcal{D}^{\alpha}f, \tau/\sigma)\eta(\tau)d\tau\right\}^{1/p}} \le \frac{1}{\left\{\inf\limits_{1\le x<\infty}\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta, z; x)\right\}^{1/p}}.$$

Если же функция η *такова, что*

$$\inf_{1\le x<\infty}\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta, z; x) = \theta_{\beta,\alpha,p}(\eta, z; 1), \qquad (4.11)$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^z\omega_{\beta}^p(\mathcal{D}^{\alpha}f, \tau/\sigma)\eta(\tau)d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\{\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta, z; 1)\}^{1/p}}.$$

Приведенное далее утверждение можно рассматривать как своеобразную конкретизацию второй части следствия 3.

***Следствие* 4.** *Пусть* $\alpha, \beta, \sigma \in (0, \infty)$, $0 < p \le 2$, $z \in (0, \pi]$, $\eta_*(\tau) := \tau^{\alpha p-1}\eta_1(\tau)$, *где* η_1 *— измеримая, суммируемая, невозрастающая на отрезке* $[0, z]$ *функция, которая является неотрицательной и не эквивалентной нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{1\le x<\infty}\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta_*, z; x) = \theta_{\beta,\alpha,p}(\eta_*, z; 1) \qquad (4.12)$$

и справедливо соотношение

$$\sup_{f\in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{\alpha}\mathcal{A}_{\sigma}(f)}{\left\{\int_0^z\omega_{\beta}^p(\mathcal{D}^{\alpha}f, \tau/\sigma)\tau^{\alpha p-1}\eta_1(\tau)d\tau\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\{\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta_*, z; 1)\}^{1/p}}. \qquad (4.13)$$

Доказательство. Покажем, что имеет место формула (4.12), поскольку тогда, на основании следствия 3, будет выполнено и равенство (4.13). Учитывая, что η_1 является невозрастающей функцией, и используя обозначение (4.10), для любого $x \in [1, \infty)$ получаем

$$\theta_{\beta,\alpha,p}(\eta_*, z; x) = 2^{p\beta/2} x^{\alpha p} \int\limits_0^z (1 - \cos(x\tau))^{p\beta/2} \tau^{\alpha p-1} \eta_1(\tau) d\tau =$$

$$= 2^{p\beta/2} \int\limits_0^{zx} (1 - \cos\tau)^{p\beta/2} \tau^{\alpha p-1} \eta_1(\tau/x) d\tau \geq 2^{p\beta/2} \int\limits_0^{zx} (1 - \cos\tau)^{p\beta/2} \tau^{\alpha p-1} \eta_1(\tau) d\tau \geq$$

$$\geq 2^{p\beta/2} \int\limits_0^{z} (1 - \cos\tau)^{p\beta/2} \tau^{\alpha p-1} \eta_1(\tau) d\tau = \theta_{\beta,\alpha,p}(\eta_*, z; 1).$$

Таким образом, равенство (4.12) выполнено для функции η_*, что и завершает доказательство следствия 4.

5. Оценка констант в неравенствах Джексона для модулей непрерывности дробного порядка. Определенный интерес, с точки зрения автора, представляет изучение поведения констант в неравенствах Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а именно

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leq K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha f, x/\sigma), \quad x > 0,$$

для модулей непрерывности дробного порядка $\beta \in (0, \infty)$ на классах функций $L_2^\alpha(\mathbb{R})$, где $\alpha \in (0, \infty)$, т. е. исследование величин

$$K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) := \sup_{f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha f, x/\sigma)} \ . \tag{5.1}$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha, \sigma \in (0, \infty)$, $\beta \in [1, \infty)$. *Тогда для любого* $x \in (0, \pi]$ *выполняется двойное неравенство*

$$\frac{1}{2^{\beta/2}\sigma^\alpha (1 - \cos x)^{\beta/2}} \leq K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \leq \frac{1}{\sigma^\alpha} \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \right\}^{\beta/2} . \tag{5.2}$$

Доказательство. Используя соотношения (3.6), (1.4), (3.8), (3.9), а также применяя неравенство Гельдера, поскольку $1 \leq \beta < \infty$, получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) - \int\limits_{|\tau| \geq \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 \cos(u\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{|\tau| \geq \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^{2(1-1/\beta)} |\mathcal{F}(f, \tau)|^{2/\beta} (1 - \cos(u\tau)) d\tau \leq$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{|\tau| \geq \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 d\tau \right\}^{1-1/\beta} \left\{ \int\limits_{|\tau| \geq \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 (1 - \cos(u\tau))^\beta d\tau \right\}^{1/\beta} \leq$$

$$\leq \{\mathcal{A}_\sigma(f)\}^{2(1-1/\beta)}(2\sigma^{2\alpha/\beta})^{-1}\left\{2^\beta \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\, |\tau|^{2\alpha}(1-\cos(u\tau))^\beta d\tau\right\}^{1/\beta} \leq$$

$$\leq (2\sigma^{2\alpha/\beta})^{-1}\{\mathcal{A}_\sigma(f)\}^{2(1-1/\beta)}\omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f, u). \tag{5.3}$$

Интегрируя левую и правую части соотношения (5.3) по переменной u в пределах от 0 до v, а затем интегрируя полученное указанным образом неравенство по переменной v в пределах от 0 до t, где $t\in(0,\pi/\sigma]$, имеем

$$\frac{t^2}{2}\mathcal{A}_\sigma^2(f) \leq \int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\cos(t\tau))\frac{d\tau}{\tau^2} +$$

$$+\frac{1}{2\sigma^{2\alpha/\beta}}\{\mathcal{A}_\sigma(f)\}^{2(1-1/\beta)}\int\limits_0^t\int\limits_0^v \omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f, u)du dv. \tag{5.4}$$

Установим оценку сверху первого интеграла в формуле (5.4), использовав с этой целью неравенство Гельдера, определение модуля непрерывности дробного порядка (1.4), а также соотношения (3.6), (3.8), (3.9):

$$\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\cos(t\tau))\frac{d\tau}{\tau^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^{2(1-1/\beta)}\left\{|\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\cos(t\tau))^\beta\right\}^{1/\beta} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma^2}\left\{\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau\right\}^{1-1/\beta}\left\{\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\cos(t\tau))^\beta d\tau\right\}^{1/\beta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sigma^{2(1+\alpha/\beta)}}\{\mathcal{A}_\sigma(f)\}^{2(1-1/\beta)}\left\{2^\beta\int\limits_{|\tau|\geq\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\, |\tau|^{2\alpha}(1-\cos(t\tau))^\beta d\tau\right\}^{1/\beta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sigma^{2(1+\alpha/\beta)}}\{\mathcal{A}_\sigma(f)\}^{2(1-1/\beta)}\,\omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f, t)\,. \tag{5.5}$$

Из формул (5.4), (5.5) получаем

$$t^{2\beta}\mathcal{A}_\sigma^2(f) \leq \frac{1}{\sigma^{2(\alpha+\beta)}}\left\{\omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f, t) + \sigma^2\int\limits_0^t\int\limits_0^v \omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f, u)du dv\right\}^\beta. \tag{5.6}$$

После интегрирования по частям интеграла в неравенстве (5.6) имеем

$$t^{2\beta}\mathcal{A}_\sigma^2(f) \le \frac{1}{\sigma^{2(\alpha+\beta)}}\left\{\omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f,t)+\sigma^2\int\limits_0^t (t-v)\omega_\beta^{2/\beta}(\mathcal{D}^\alpha f,v)dv\right\}^\beta .$$

Учитывая, что модуль непрерывности ω_β — неубывающая функция, отсюда получаем

$$t^\beta\mathcal{A}_\sigma(f) \le \sigma^{-(\alpha+\beta)}\{1+(\sigma t)^2/2\}^{\beta/2}\omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha f,t) . \tag{5.7}$$

Использовав соотношение (5.7), в котором полагаем $t := x/\sigma$, запишем оценку сверху экстремальной характеристики (5.1):

$$K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \le \sigma^{-\alpha}\{1/x^2+1/2\}^{\beta/2}. \tag{5.8}$$

Для установления оценки снизу величины (5.1) рассмотрим функцию $q_\varepsilon \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$, где $0<\varepsilon<\sigma_* := \min(\sigma, 1/\sigma)$, введенную в ходе доказательства теоремы 1. Очевидно, что

$$K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \ge \mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon)/\omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha q_\varepsilon, x/\sigma) . \tag{5.9}$$

Введя обозначения

$$\overline{\theta}_{y,\beta,\alpha}(x) := y^\alpha(1-\cos{(xy/\sigma)})^{\beta/2}, \tag{5.10}$$

$$\overline{\theta}^*_{y,\beta,\alpha}(x) := y^\alpha(1-\cos{(xy/\sigma)})_*^{\beta/2} \tag{5.11}$$

и использовав формулы (3.12), (3.14) и (5.9), запишем

$$K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \ge 1/(2^{\beta/2}\,\overline{\theta}^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha}(x)). \tag{5.12}$$

Из формул (5.10) и (5.11) следует, что величина $\overline{\theta}^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha}(x)$ возрастает по ε при постоянных значениях остальных параметров и $\lim_{\varepsilon\to 0+}\overline{\theta}^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha}(x) = \overline{\theta}_{\sigma,\beta,\alpha}(x)$. Учитывая это, из определения верхней грани числового множества получаем

$$\sup\left\{1/\overline{\theta}^*_{\sigma+\varepsilon,\beta,\alpha}(x) \colon \varepsilon\in(0,\sigma_*)\right\} = 1/\overline{\theta}_{\sigma,\beta,\alpha}(x) . \tag{5.13}$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon\in(0,\sigma_*)$ от правой части неравенства (5.12) и используя формулу (5.13), записываем оценку снизу величины (5.1):

$$K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \ge \frac{1}{2^{\beta/2}\sigma^\alpha(1-\cos\,x)^{\beta/2}} . \tag{5.14}$$

Теперь (5.2) следует из неравенств (5.8) и (5.14).

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 5.** *При выполнении условий теоремы* 2 *имеет место двойное неравенство*

$$\frac{1}{\sigma^\alpha x^\beta} \le K_{\sigma,\beta,\alpha}(x) \le \frac{1}{\sigma^\alpha}\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right\}^{\beta/2} .$$

Теорему 2 и вытекающее из нее следствие 5 можно рассматривать как распространение одного результата Л. В. Тайкова [36] на случай модулей непрерывности и производных дробных порядков в задачах наилучшей среднеквадратической аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

6. Точные значения средних ν-поперечников классов функций, определенных с помощью модулей непрерывности и производных дробных порядков. В работах [34, 35] было введено определение средней размерности, которое является некоторой модификацией соответствующего понятия, приведенного ранее [37]. Это позволило определить асимптотические экстремальные характеристики, подобные поперечникам, где в качестве размерности использована средняя размерность. В результате этого стало возможным сравнение аппроксимативных свойств подпространств $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $\sigma \in (0,\infty)$, с аналогичными свойствами иных подпространств из $L_2(\mathbb{R})$, имеющих ту же среднюю размерность, и решение в $L_2(\mathbb{R})$ ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций оптимизационного содержания.

Напомним необходимые далее понятия и определения, приведенные в [34, 35]. Пусть $BL_2(\mathbb{R})$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Lin}\,(L_2(\mathbb{R}))$ — совокупность всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$;

$$\mathrm{Lin}\,_n(L_2(\mathbb{R})) := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}\,(L_2(\mathbb{R}))\colon \dim\mathcal{L} \le n\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$d(\mathfrak{M}, A, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\inf\{\|x-y\|\colon y \in A\}\colon x \in \mathfrak{M}\}$$

— наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$. Под A_T, $T>0$, понимаем сужение множества $A \subset L_2(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T,T]$, а через $\mathrm{Lin}_C L_2(\mathbb{R})$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}\,(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T,T])$ при любом $T>0$.

Если $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $T,\varepsilon>0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in \mathrm{Lin}_n(L_2(\mathbb{R}))$, для которых $d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon$. Пусть

$$D_\varepsilon(T,\mathcal{L},L_2(\mathbb{R})) := \min\{n \in \mathbb{Z}_+\colon \exists \mathcal{M} \in \mathrm{Lin}_n(L_2([-T,T])),$$

$$d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon\}.$$

Данная величина не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \lim\{\liminf\{D_\varepsilon(T,\mathcal{L},L_2(\mathbb{R}))/(2T)\colon T \to \infty\}\colon \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. В [34] было показано, что

$$\overline{\dim}\,(\mathbb{B}_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) = \sigma/\pi. \tag{6.1}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $\nu>0$ является произвольным числом. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|\colon \varphi \in \mathcal{L}\}\colon f \in \mathfrak{M}\}\colon$$

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \le \nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\|f - V(f)\|\colon f \in \mathfrak{M}\}\colon (X,V)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, V) таким, что X — нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$, а $V: X \to L_2(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $\operatorname{Im} V \subset \operatorname{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и выполнено неравенство $\overline{\dim}\,(\operatorname{Im} V, L_2(\mathbb{R})) \leq$ $\leq \nu$, $\mathfrak{M} \subset X$. Здесь $\operatorname{Im} V$ — образ оператора V. Пару, на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\, \sup\{\rho > 0\colon \mathcal{L} \cap \rho B L_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\} :$$

$$\mathcal{L} \in \operatorname{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu, \overline{d}_\nu(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$, т. е. $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Для множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ между перечисленными выше его экстремальными характеристиками имеют место неравенства

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})). \qquad (6.2)$$

Отметим, что точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций впервые были получены в работах [34, 35]. В последующем данная тематика была продолжена в работах других авторов (см., например, [28–33]). Краткий обзор, касающийся вычисления точных значений указанных экстремальных характеристик, можно найти в работе [38].

Пусть $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, $p \in (0, 2]$, H — некоторая положительная константа, ψ — неотрицательная, измеримая и суммируемая на отрезке $[0, H]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Символом $HW^\alpha_{2,p}(\omega_\beta, \psi)$ обозначим класс функций $f \in L^\alpha_2(\mathbb{R})$, для каждой из которых выполняется неравенство

$$\int_0^H \omega^p_\beta(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\psi(\tau)d\tau \leq \int_0^H \psi(\tau)d\tau.$$

Напомним, что в случае 2π-периодических функций при $p = 2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ в определенном смысле подобные классы впервые были рассмотрены в работе [36].

Теорема 3. *Пусть* $\beta, \nu \in (0, \infty)$, $\alpha \in [1/2, \infty)$, $H \in (0, 1/\nu]$, ψ *— неотрицательная, измеримая и суммируемая на отрезке* $[0, H]$ *функция, которая дифференцируема почти всюду на интервале* $(0, H)$ *и не эквивалентна нулю. Если для некоторого значения* $\widetilde{p} \in [1/\alpha, 2]$ *и для почти всех* $\tau \in [0, H]$ *имеет место неравенство* (4.1)*, то справедливы следующие равенства:*

$$\overline{q}_\nu(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi)) =$$

$$= \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi)\} =$$

$$= 2^{-\beta/2}\,(\nu\pi)^{-\alpha} \left\{ \int_0^H (1 - \cos(\nu\pi\tau))^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1/\widetilde{p}} \left\{ \int_0^H \psi(\tau)d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}, \qquad (6.3)$$

где $\overline{q}_\nu$ *— любой из средних* ν*-поперечников: колмогоровский* $\overline{d}_\nu$*, бернштейновский* $\overline{b}_\nu$*, линейный* $\overline{\delta}_\nu$*;* $\mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathfrak{M}) := \sup\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f)\colon f \in \mathfrak{M}\}$*,* $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$*. При этом пара* $(L_2^\alpha(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi})$*, где линейный оператор* $\Lambda_{\nu\pi}$ *определяется формулой* (3.5)*, когда* $\sigma := \nu\pi$*, является экстремальной для* $\overline{\delta}_\nu(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R}))$*, а подпространство* $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ *— экстремальным для* $\overline{d}_\nu(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R}))$*.*

Доказательство. Используя следствие 1, для произвольной функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$ при $0 < t \leq \pi/\sigma$ имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \|f - \Lambda_\sigma(f)\| \leq$$

$$\leq 2^{-\beta/2}\ \sigma^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^t (1 - \cos{(\sigma\tau)})^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^t \omega_\beta^{\widetilde{p}}(\mathcal{D}^\alpha f, \tau)\psi(\tau)d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{6.4}$$

Полагая в формуле (6.4) $\sigma := \nu\pi$ и $t := H$, в силу определения класса $HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi)$ и соотношений (6.1), (6.2) получаем оценки сверху

$$\overline{q}_\nu(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{d}_\nu(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R})) \leq$$

$$\leq \mathcal{A}_{\nu\pi}(HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi)) = \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\|\colon f \in HW^\alpha_{2,p}(\omega_\beta, \psi)\} \leq$$

$$\leq 2^{-\beta/2}\ (\nu\pi)^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^H (1 - \cos{(\nu\pi\tau)})^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^H \psi(\tau)d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{6.5}$$

Для установления оценок снизу рассматриваемых средних ν-поперечников класса $HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi)$ рассмотрим множество целых функций $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\overline{\rho}) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \overline{\rho}BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\colon \|g\| \leq \overline{\rho}\}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$ — произвольное число, $\widetilde{\nu} := \min(\nu, 1/\nu)$,

$$\overline{\rho} := 2^{-\beta/2}\ (\widehat{\sigma})^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^H (1 - \cos{(\widehat{\sigma}\tau)})_*^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^H \psi(\tau)d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{6.6}$$

Покажем, что множество $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\overline{\rho})$ принадлежит классу $HW^\alpha_{2,\widetilde{p}}(\omega_\beta, \psi)$. Для этого, воспользовавшись неравенством С. Н. Бернштейна $\|\mathcal{D}^\alpha g\| \leq (\widehat{\sigma})^\alpha \|g\|$, где $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$, формулой (2.6) и обозначением (3.1), запишем

$$\omega_\beta(\mathcal{D}^\alpha g, t) \leq \sup \left\{ \left(2^\beta \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\mathcal{F}(\mathcal{D}^\alpha g, x)|^2 (1 - \cos{(hx)})^\beta dx \right)^{1/2} : |h| \leq t \right\} \leq$$

$$\leq 2^{\beta/2}(1 - \cos{(t\widehat{\sigma})})_*^{\beta/2} \|\mathcal{D}^\alpha g\| \leq 2^{\beta/2}(\widehat{\sigma})^\alpha (1 - \cos{(t\widehat{\sigma})})_*^{\beta/2}\ \|g\|. \tag{6.7}$$

Тогда для произвольной функции $g \in \mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\overline{\rho})$ на основании соотношения (6.7) получаем

$$\int\limits_0^H \omega_\beta^{\widetilde{p}}(\mathcal{D}^\alpha g, t)\psi(t)dt \leq 2^{\widetilde{p}\beta/2}(\widehat{\sigma})^{\alpha\widetilde{p}} \|g\|^{\widetilde{p}} \int\limits_0^H (1 - \cos{(t\widehat{\sigma})})_*^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(t)dt \leq \int\limits_0^H \psi(t)dt.$$

Следовательно, $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\overline{\rho}) \subset HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_\beta, H)$. Отметим, что подпространство $\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подпространствам, участвующим в определении среднего бернштейновского ν-поперечника, т. е. $\overline{\dim}\,(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu(1+\varepsilon)$ и $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = 1$. Тогда согласно формулам (6.2) и (6.6) имеем

$$\overline{q}_\nu(HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R})) \geq \overline{b}_\nu(\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\overline{\rho}); L_2(\mathbb{R})) \geq$$

$$\geq \sup\{\rho > 0 : \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) \subset HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_\beta, \psi)\} \geq \overline{\rho} =$$

$$= 2^{-\beta/2}(\nu\pi(1+\varepsilon))^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^H (1 - \cos(\nu\pi\tau(1+\varepsilon)))_*^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{-1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^H \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}. \quad (6.8)$$

Поскольку правая часть соотношения (6.8), как функция от ε, при фиксированных значениях остальных параметров и $\varepsilon \to 0+$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху, то, вычисляя от нее верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$, имеем

$$\overline{q}_\nu(HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_\beta, \psi); L_2(\mathbb{R})) \geq$$

$$\geq 2^{-\beta/2}(\nu\pi)^{-\alpha} \left\{ \int\limits_0^H (1 - \cos(\nu\pi\tau))^{\widetilde{p}\beta/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{-1/\widetilde{p}} \left\{ \int\limits_0^H \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/\widetilde{p}}. \quad (6.9)$$

Требуемые равенства (6.3) следуют из соотношений (6.5) и (6.9).

Теорема 3 доказана.

Отметим, что, полагая, например, $\beta := 2/\widetilde{p}$ и $\psi \equiv 1$, из формулы (6.3) получаем

$$\overline{q}_\nu(HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_{2/\widetilde{p}}, 1); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_{2/\widetilde{p}}, 1)) =$$

$$= \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\| : f \in HW_{2,\widetilde{p}}^{\alpha}(\omega_{2/\widetilde{p}}, 1)\} = (\nu\pi)^{-\alpha}\{2(1 - \mathrm{sinc}\,(\nu\pi H))\}^{-1/\widetilde{p}}.$$

Возрастающую и непрерывную на множестве $[0, \infty)$ функцию Φ назовем мажорантой, если $\Phi(0) = 0$. Символом $\mathcal{W}_{2,p}^{\alpha}(\omega_\beta, \Phi)$, где $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, $0 < p \leq 2$, Φ — мажоранта, обозначим класс функций, состоящий из элементов $f \in L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$, у которых дробные производные порядка α удовлетворяют условию $\int_0^t \omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha f, \tau) d\tau \leq \Phi(t)$ для любого $t \in (0, \infty)$.

Теорема 4. *Пусть $\beta \in (0, \infty)$, $\alpha \in [1/2, \infty)$, $p \in [1/\alpha, 2]$, $\nu \in (0, \infty)$, мажоранта Φ для любого конечного числа $\sigma > \nu\pi$ удовлетворяет условию*

$$\Phi(t) \int\limits_0^\pi (1 - \cos\tau)^{p\beta/2} d\tau \geq \Phi(\pi/\sigma) \int\limits_0^{t\sigma} (1 - \cos\tau)_*^{p\beta/2} d\tau, \quad (6.10)$$

где $0 \leq t < \infty$ — произвольное число. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\overline{q}_\nu(\mathcal{W}_{2,p}^{\alpha}(\omega_\beta, \Phi); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}_{2,p}^{\alpha}(\omega_\beta, \Phi)) =$$

$$= \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{W}_{2,p}^{\alpha}(\omega_\beta, \Phi)\} =$$

$$= 2^{-\beta/2}(\nu\pi)^{1/p-\alpha}\left\{\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{p\beta/2}d\tau\right\}^{-1/p}\Phi^{1/p}(1/\nu), \tag{6.11}$$

где $\overline{q}_\nu$ *— любой из рассмотренных выше средних* ν*-поперечников. При этом пара* $(L_2^\alpha(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi})$ *является экстремальной для среднего линейного* ν*-поперечника* $\overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi); L_2(\mathbb{R}))$, *а подпространство* $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ *будет экстремальным для среднего колмогоровского* ν*-поперечника* $\overline{d}_\nu(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi); L_2(\mathbb{R}))$. *Множество мажорант, удовлетворяющих условию* (6.10), *не пусто.*

Доказательство. Полагая $\psi \equiv 1$, для произвольной функции $f \in L_2^\alpha(\mathbb{R})$ из следствия 1 получаем неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \|f - \Lambda_\sigma(f)\| \le$$

$$\le 2^{-\beta/2}\sigma^{-\alpha}\left\{\int_0^t(1-\cos(\sigma\tau))^{p\beta/2}d\tau\right\}^{-1/p}\left\{\int_0^t\omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha f,\tau)d\tau\right\}^{1/p}, \tag{6.12}$$

где $0 < t \le \pi/\sigma$, $\sigma \in (0,\infty)$. Полагая $\sigma := \nu\pi$, $t := \pi/\sigma = 1/\nu$ и используя формулы (6.1), (6.2), а также определение класса $\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi)$, записываем оценки сверху

$$\overline{q}_\nu(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi); L_2(\mathbb{R})) \le \overline{d}_\nu(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi); L_2(\mathbb{R})) \le$$

$$\le \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi)) = \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\| :$$

$$f \in \mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi)\} \le 2^{-\beta/2}(\nu\pi)^{1/p-\alpha}\left\{\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{p\beta/2}d\tau\right\}^{-1/p}\Phi^{1/p}(1/\nu). \tag{6.13}$$

Для получения оценок снизу средних ν-поперечников класса $\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi))$ рассмотрим множество целых функций $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho}) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\cap\widetilde{\rho}BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} : \|g\| \le \widetilde{\rho}\}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,\widetilde{\nu})$, $\widetilde{\nu} := \min(\nu, 1/\nu)$,

$$\widetilde{\rho} := 2^{-\beta/2}(\widehat{\sigma})^{1/p-\alpha}\left\{\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{p\beta/2}d\tau\right\}^{-1/p}\Phi^{1/p}(\pi/\widehat{\sigma}). \tag{6.14}$$

Далее покажем, что $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho})$ является подмножеством класса $\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi)$. Используя неравенство (6.7) и соотношения (6.10), (6.14), для произвольной функции $g \in \mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho})$ имеем

$$\int_0^t\omega_\beta^p(\mathcal{D}^\alpha g,\tau)d\tau \le 2^{p\beta/2}(\widehat{\sigma})^{\alpha p-1}\|g\|^p\int_0^{t\widehat{\sigma}}(1-\cos\tau)_*^{p\beta/2}d\tau \le$$

$$\le \Phi(\pi/\widehat{\sigma})\left\{\int_0^{t\widehat{\sigma}}(1-\cos\tau)_*^{p\beta/2}d\tau\right\}\Big/\left\{\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{p\beta/2}d\tau\right\} \le \Phi(t)$$

для любого $t \in (0,\infty)$. Следовательно, $\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho}) \subset \mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi)$.

Используя определение среднего бернштейновского ν-поперечника и формулы (6.2), (6.14), получаем

$$\overline{q}_\nu(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\geq \overline{b}_\nu(\mathfrak{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho});L_2(\mathbb{R}))\geq$$
$$\geq\sup\{\rho>0\colon \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\cap\rho BL_2(\mathbb{R})\subset\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi)\}\geq$$
$$\geq\widetilde{\rho}=2^{-\beta/2}(\nu\pi(1+\varepsilon))^{1/p-\alpha}\left\{\int\limits_0^\pi(1-\cos\tau)^{p\beta/2}d\tau\right\}^{-1/p}\Phi^{1/p}(1/(\nu(1+\varepsilon))). \tag{6.15}$$

В цепочке неравенств (6.15) ее левая часть не зависит от ε. Поэтому, вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon\in(0,\widetilde{\nu})$ от ее правой части, имеем оценку снизу

$$\overline{q}_\nu(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_\beta,\Phi);L_2(\mathbb{R}))\geq 2^{-\beta/2}(\nu\pi)^{1/p-\alpha}\left\{\int\limits_0^\pi(1-\cos\tau)^{p\beta/2}d\tau\right\}^{-1/p}\Phi^{1/p}(1/\nu). \tag{6.16}$$

Равенства (6.11) непосредственно следуют из соотношений (6.13), (6.16).

В завершение доказательства данной теоремы покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (6.10), не пусто. Для этого предварительно запишем неравенство (6.10) в эквивалентном ему виде

$$\Phi(t)\int\limits_0^\pi\sin^{p\beta}(\tau/2)d\tau\geq\Phi(\pi/\sigma)\int\limits_0^{t\sigma}(\sin(\tau/2))_*^{p\beta}d\tau, \tag{6.17}$$

где $0\leq t<\infty$, $(\sin t)_*:=\{\sin t,$ если $0\leq t\leq\pi/2;\ 1,$ если $t\geq\pi/2\}$. Покажем, что мажоранта $\Phi_0(t):=t^y$, где

$$y:=\pi\Big/\left\{\int\limits_0^\pi\sin^{p\beta}(\tau/2)d\tau\right\}, \tag{6.18}$$

удовлетворяет соотношению (6.17). Прежде всего оценим величину y сверху и снизу, воспользовавшись двойным неравенством $\tau/\pi<\sin(\tau/2)<1$, где $0<\tau<\pi$. С учетом этого из (6.18) получаем

$$1<y<p\beta+1. \tag{6.19}$$

Заменив в формуле (6.17) Φ на Φ_0 и использовав обозначение (6.18), запишем неравенство

$$(t\sigma/\pi)^y\geq\frac{y}{\pi}\int\limits_0^{t\sigma}(\sin(\tau/2))_*^{p\beta}d\tau, \tag{6.20}$$

которое необходимо доказать. Полагая $v:=t\sigma/\pi$, из (6.20) получаем

$$v^y\geq\frac{y}{\pi}\int\limits_0^{\pi v}(\sin(\tau/2))_*^{p\beta}d\tau. \tag{6.21}$$

Введем вспомогательную функцию

$$G(v) := v^y - \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{\pi v}(\sin(\tau/2))_*^{p\beta}d\tau, \tag{6.22}$$

где $v \in [0,\infty)$, и покажем ее неотрицательность. На множестве $0 \le v \le \varepsilon$ бесконечно малой длины ε в силу (6.22) имеем

$$G(v) \ge v^y - \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{\pi v}(\tau/2)^{p\beta}d\tau = v^y\left[1 - \frac{y(\pi/2)^{p\beta}v^{p\beta+1-y}}{p\beta+1}\right]. \tag{6.23}$$

Из (6.23) и (6.19) следует, что $G(v) \ge 0$ при $v \to 0+$. Осталось доказать этот факт для любого $0 < v < \infty$. Для этого рассмотрим два случая: $0 \le v \le 1$ и $1 \le v < \infty$.

Пусть $0 \le v \le 1$. Проведем рассуждения методом от противного, полагая, что на интервале $(0,1)$ существует некоторая точка, в которой функция G меняет свой знак. Используя формулы (6.18) и (6.22), записываем $G(0) = G(1) = 0$. Тогда, в силу теоремы Ролля, производная первого порядка

$$G'(v) = y\left(v^{y-1} - \sin^{p\beta}(\pi v/2)\right) \tag{6.24}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Из (6.24) следует, что функция

$$G_1(v) := v^{(y-1)/(p\beta)} - \sin(\pi v/2) \tag{6.25}$$

также будет иметь на $(0,1)$ не менее двух различных нулей в тех же точках, что и функция G. Учитывая (6.19), из (6.25) получаем $G_1(0) = G_1(1) = 0$. Следовательно, производная первого порядка

$$G_1'(v) = \frac{(y-1)v^{(y-1-p\beta)/(p\beta)}}{p\beta} - \frac{\pi\cos(\pi v/2)}{2} \tag{6.26}$$

должна иметь на $(0,1)$ не менее трех различных нулей. Однако, согласно формулам (6.19) и (6.26), это не так, поскольку G_1', как разность положительной выпуклой вниз и положительной монотонно убывающей выпуклой вверх функций, может иметь на интервале $(0,1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие показывает, что функция G не меняет свой знак на интервале $(0,1)$, т. е. $G(v) > 0$ для любого $v \in (0,1)$.

Пусть далее $1 \le v < \infty$. Тогда согласно формуле (6.22) записываем

$$G(v) = v^y - y(v-1) - 1. \tag{6.27}$$

Из (6.27) получаем

$$G'(v) = y(v^{y-1} - 1). \tag{6.28}$$

В силу соотношений (6.19) и (6.28) имеем $G'(v) \ge 0$ для любого $v \in [1,\infty)$. Поскольку $G(1) = 0$, то $G(v) \ge 0$ на рассматриваемом точечном множестве.

Таким образом, условие (6.10) имеет место для мажоранты $\Phi_0(t)$ при $0 \le t < \infty$ и теорема 4 полностью доказана.

Если, например, в теореме 4 полагаем $\beta := 2/p$, то условие (6.10) и равенства (6.11) примут соответственно вид

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/\sigma)} \ge \begin{cases} t\sigma\left(1 - \operatorname{sinc}(t\sigma)\right)/\pi, & \text{если} \quad 0 \le t \le \pi/\sigma, \\ 1 + 2\left(t\sigma/\pi - 1\right), & \text{если} \quad \pi/\sigma \le t < \infty, \end{cases} \tag{6.29}$$

$$\overline{q}_\nu\left(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_{2/p}, \Phi); L_2(\mathbb{R})\right) = \mathcal{A}_{\nu\pi}\left(\mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_{2/p}, \Phi)\right) =$$

$$= \sup\left\{||f - \Lambda_{\nu\pi}(f)||\colon f \in \mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\omega_{2/p}, \Phi)\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-1/p}\,(\nu\pi)^{1/p-\alpha}\,\Phi^{1/p}(1/\nu).$$

Отметим, что в указанном случае одним из примеров мажорант, удовлетворяющих условию (6.29), в силу формулы (6.18) может быть функция $\widetilde{\Phi}_0(t) = t^2$.

Литература

1. *Butzer P. L., Westphal U.* An access to fractional differentiation via fractional defference quotiens // Lect. Notes Math. – 1975. – **457**. – P. 116 – 145.
2. *Butzer P. L., Dyckhoff H., Gorlich E., Stens R. L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Can. J. Math. – 1977. – **l29**, № 4. – P. 781 – 793.
3. *Taberski R.* Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Comment. Math. – 1976 – 1977. — **19**. – P. 389 – 400.
4. *Ivanov K. G.* On the rates of convergence of two moduli of functions // Pliska Stud. Math. Bulg. – 1983. – **5**. – P. 97 – 104.
5. *Бугров Я. С.* Дробные разностные операторы и классы функций // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций. – М.: АН СССР, 1987. – С. 75 – 78.
6. *Пономаренко В. Г.* Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в L_p $(1 < p < \infty)$ // Конструктивная теория функций: Тр. Междунар. конф. по конструктивной теории функций. – София, 1983. – С. 129 – 133.
7. *Самко С. Г., Якубов А. Я.* Оценка Зигмунда для модулей непрерывности дробного порядка сопряженной функции // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 12. – С. 49 – 53.
8. *Гаймназаров Г.* О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси // Докл. АН ТаджССР. – 1981. – **24**, № 3. – С. 148 – 150.
9. *Гаймназаров Г.* Некоторые соотношения для модулей гладкости дробного порядка в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ // Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук. – 1985. – № 3. – С. 8 – 13.
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
11. *Butzer P. L., Westphal U.* An introduction to fractional calculus // Application Fractional Calculus in Physics. – Singapore: World Sci. Publ., 2000. – P. 1 – 85.
12. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
14. *Бесов О. В., Стечкин С. Б.* Описание модулей непрерывности в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **134**. – С. 23 – 25.
15. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217 – 223.
16. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
17. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

18. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени (1912). – Собр. соч. – М.: АН СССР, 1952. – Т. 2. – С. 371 – 375.
19. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 324 с.
20. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
21. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1013 – 1016.
22. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 73.
23. *Arestov V. V.* On Jackson inequalities for approximation in L^2 of periodic functions by trigonometric polynomials and of functions on the line by entire functions // Approxim. Theory (A volume dedicated to Borislaw Bojanov). – Sofia: Marin Drinov Acad. Publ. House, 2004. – P. 1 – 19.
24. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1998. – № 5. – С. 3 – 7.
25. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
26. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 210 – 222.
27. *Лигун А. А., Доронин В. Г.* Точные константы в неравенствах типа Джексона для L_2-аппроксимации на прямой // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 92 – 98.
28. *Vakarchuk S. B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 27 – 39.
29. *Vakarchuk S. B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I // J. Math. Sci. – 2013. – **188**, № 2. – P. 146 – 166.
30. *Вакарчук С. Б.* Наилучшее среднеквадратическое приближение функций, заданных на вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 604 – 615.
31. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона для специальных модулей непрерывности на всей вещественной оси и точные значения средних ν-поперечников классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 740 – 766.
32. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа и средние ν-поперечники классов функций на прямой // Мат. заметки. – 2014. – **96**, № 6. – С. 827 – 848.
33. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 7. – С. 1 – 19.
34. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 11. – С. 1635 – 1656.
35. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 1. – С. 35 – 38.
36. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
37. *Тихомиров В. М.* Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 183 – 188.
38. *Vakarchuk S. B.* On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 613 – 630.

Получено 07.10.16