УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Київ)

ПОТОЧКОВА ОЦІНКА МАЙЖЕ КОПОЗИТИВНОГО НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРАЇЧНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

In the case where a function continuous on a segment f changes its sign at s points $y_i:\ -1 < y_s < y_{s-1} < \ldots < y_1 < 1$, for any $n \in \mathbb{N}$ greater then a constant $N(k, y_i)$ that depends only on $k \in \mathbb{N}$ and $\min\limits_{i=1,\ldots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$, we determine an algebraic polynomial P_n of degree $\leq n$ such that: P_n has the same sign as f everywhere except possibly small neighborhoods of the points y_i:

$$(y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i)), \qquad \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n,$$

$P_n(y_i) = 0$, and

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, s)\, \omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

where $c(k, s)$ is a constant that depends only on k and s and $\omega_k(f, \cdot)$ is the modulus of continuity of the function f of order k

В случае, когда непрерывная на отрезке функция f меняет свой знак в s точках $y_i:\ -1 < y_s < y_{s-1} < \ldots < y_1 < 1$, для каждого $n \in \mathbb{N}$, большего некоторой постоянной $N(k, y_i)$, зависящей только от $k \in \mathbb{N}$ и $\min\limits_{i=1,\ldots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$, найден алгебраический многочлен P_n степени не больше n такой, что P_n имеет всюду тот же знак, что и функция f, за исключением, возможно, малых окрестностей точек y_i:

$$(y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i)), \quad \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n,$$

$P_n(y_i) = 0$ и

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, s)\omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

где $c(k, s)$ — постоянная, зависящая только от k и s, $\omega_k(f, \cdot)$ — модуль гладкости k-го порядка функции f.

1. Вступ. Нехай $C := C_{[-1,1]}$ — простір неперервних на $[-1, 1]$ функцій $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою

$$\|f\| := \|f\|_{[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |f(x)|,$$

$C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\}$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n$ — множина алгебраїчних многочленів $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$, степеня не вищого за n, $n \in \mathbb{N}$, і

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad x \in [-1, 1].$$

Нагадаємо класичну поточкову оцінку типу Нікольського, встановлену Тіманом (для $k = 1$), Дзядиком (для $k = 2$), Фройдом (для $k = 2$) та Брудним (для $k \geq 3$) (див., наприклад, [1, с. 244–256]):

Якщо функція f належить C, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, знайдеться многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k)\, \omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \tag{1.1}$$

де $c(k)$ — стала, яка залежить лише від k, і $\omega_k(f, \cdot)$ — модуль гладкості k-го порядку функції f, тобто

$$\omega_k(f,t) := \omega_k(f,t,[-1,1]) := \sup_{h\in[0,t]} \|\sigma_h^k(f,\cdot)\|_{[-1,1-kh]}, \quad t\in[0,2/k],$$

$$\sigma_h^k(f,x) := \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+ih)$$

— k-та різниця з кроком h функції f у точці x.

Наслідком (1.1) є рівномірна оцінка

$$\|f-P_n\| \le c(k)\,\omega_k(f,1/n), \quad n\ge k-1. \tag{1.2}$$

У 1968 р. Lorentz і Zeller [2] отримали монотонний аналог нерівності (1.1) з $k=1$ (тобто для наближення монотонних на відрізку функцій із C монотонними многочленами з $\mathbb{P}_n$) і тим започаткували пошук опуклих, кусково-опуклих або коопуклих, комонотонних та інших аналогів цієї нерівності. У 1995 р. Kopotun [3] отримав копозитивний її аналог з $k=3$. Саме його нерівність „узагальнюється” у цій статті. Для її точного формулювання наведемо необхідні позначення.

Нехай $Y := Y_s$ позначає набір з $s\in\mathbb{N}$ фіксованих точок y_i:

$$-1 < y_s < \ldots < y_1 < 1.$$

Через $\Delta^{(0)}(Y)$ позначимо множину функцій $f\in C$ таких, що f є невід'ємною на $[y_1,1]$, недодатною на $[y_2,y_1]$, невід'ємною на $[y_3,y_2]$ і т. д., тобто

$$f\in\Delta^{(0)}(Y) \Leftrightarrow f(x)\Pi(x)\ge 0, \qquad \Pi(x) := \Pi(x,Y) := \prod_{i=1}^{s}(x-y_i).$$

Функції з $\Delta^{(0)}(Y)$ називаються *копозитивними* (одна одній, або між собою).

Теорема 1 [3]. *Якщо $f\in\Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n\in\mathbb{N}$, що більше за деяку сталу $N(Y)$, яка залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,s-1}\{y_i-y_{i+1}\}$, існує многочлен $P_n\in\mathbb{P}_n$ такий, що $P_n\in\Delta^{(0)}(Y)$, тобто*

$$P_n(x)\Pi(x)\ge 0, \quad x\in[-1,1], \tag{1.3}$$

зокрема $P_n(y_i)=0$, $i=1,\ldots,s$, і

$$|f(x)-P_n(x)| \le c(s)\,\omega_3(f,\rho_n(x)), \quad x\in[-1,1], \tag{1.4}$$

де $c(s)$ — стала, яка залежить лише від s.

З (1.4) випливає оцінка

$$\|f-P_n\| \le c(s)\,\omega_3(f,1/n), \quad n\ge N(Y), \tag{1.5}$$

яку (зі сталою $C(Y)$ замість $c(s)$ і $n\ge 2$) довели також Yu і Hu [4], як наслідок аналогічної нерівності для сплайна [4].

Оцінка (1.5), а отже і (1.4), є остаточною за порядком, тобто в ній неможливо замінити ω_3 на ω_k з $k>3$, тому що Zhou [5, 6] побудував функцію $f\in\Delta^{(0)}(Y_1)$ $\big($яка є навіть ще й з $C^{(1)}\big)$ таку, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\inf_{P_n\in\mathbb{P}_n\cap\Delta^{(0)}(Y_1)}\|f-P_n\|}{\omega_4(f,1/n)}=\infty. \tag{1.6}$$

Однак з *комонотонного* наближення (де (1.4) і (1.5) тільки з ω_2 замість ω_3 встановлено у [7], а (1.6) з ω_3 і $\Delta^{(1)}$ замість ω_4 і $\Delta^{(0)}$ встановлено Wu і Zhou [8]) відомо, що якщо послабити умову комонотонності для многочленів у маленьких околах точок зміни монотонності, то можна збільшити порядок комонотонного наближення на одиницю [9] і не більше ніж на одиницю [10].

У *коопуклому* наближенні (де (1.5) встановлено в [11], (1.4) для різних випадків — у [12–15], а (1.6) з $\Delta^{(2)}$ замість $\Delta^{(0)}$ — у [8]) — приблизно така сама ситуація: послабивши умову коопуклості для многочленів у маленьких околах точок перегину, ми отримаємо додатковий порядок наближення, тобто ω_4 замість ω_3 у (1.5) (див. [16]) і те саме у (1.4) (див. [17]). Здається, що тут теж більше ніж один додатковий порядок отримати неможливо, хоча це припущення ще не доведено.

Досить несподіваним виявилось те, що у копозитивному наближенні, при послабленні умови зберігання знака для многочлена у маленьких околах точок зміни знака функції, можливо покращити наближення не на один порядок, а як завгодно, тобто так само, як при наближенні без обмежень (1.1). А саме, справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Якщо f належить $\in \Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n\in\mathbb{N}$, що більше за деяку сталу $N(k,Y)$, яка залежить лише від $k\in\mathbb{N}$ і $\min_{i=1,\dots,s-1}\{y_i-y_{i+1}\}$, існує многочлен $P_n\in\mathbb{P}_n$ такий, що*

$$P_n(x)\Pi(x)\ge 0, \qquad x\in[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{s}(y_i-\rho_n(y_i),y_i+\rho_n(y_i)), \tag{1.7}$$

$P_n(y_i)=0,\ i=1,\dots,s,$ *і*

$$|f(x)-P_n(x)|\le c(k,s)\,\omega_k(f,\rho_n(x)),\quad x\in[-1,1], \tag{1.8}$$

де $c(k,s)$ — стала, яка залежить лише від k і s.

Наслідком (1.8) є оцінка

$$\|f-P_n\|\le c(k,s)\,\omega_k(f,1/n),\quad n\ge N(k,Y). \tag{1.9}$$

Зауважимо, що для диференційовних функцій з $\Delta^{(0)}(Y)$ має місце така теорема.

Теорема 3 [18]. *Якщо f належить $C^{(1)}\cap\Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n\in\mathbb{N}$, що більше за деяку сталу $N(k,Y)$, яка залежить лише від $k\in\mathbb{N}$ і $\min_{i=1,\dots,s-1}\{y_i-y_{i+1}\}$, існує многочлен $P_n\in\mathbb{P}_n$ такий, що $P_n\in\Delta^{(0)}(Y)$, тобто*

$$P_n(x)\Pi(x)\ge 0,\quad x\in[-1,1], \tag{1.10}$$

зокрема $P_n(y_i)=0,\ i=1,\dots,s,$ *і*

$$|f(x)-P_n(x)|\le c(k,s)\,\rho_n(x)\,\omega_k(f',\rho_n(x)),\quad x\in[-1,1], \tag{1.11}$$

$$\|f-P_n\|\le c(k,s)\,(1/n)\,\omega_k(f',1/n), \tag{1.12}$$

де $c(k,s)$ — стала, яка залежить лише від k і s.

Для комонотонного та коопуклого наближень диференційовних функцій такі остаточні за порядком оцінки у формі (1.11) (а отже, і у (1.12)) див. у [19] та [20, 21] відповідно, а повний огляд усіх випадків формозберігаючого наближення алгебраїчними многочленами — у [22]. Також зауважимо, що з нерівності Уітні (2.1) випливає, що в усіх наведених вище оцінках сталі $N(k, Y)$ та $c(k, s)$ можна замінити на $k-1$ та $C(k, Y)$ відповідно.

2. Допоміжні факти. Наступні дві леми містять необхідні нам властивості двох важливих многочленів: многочлена Дзядика „найкращого” наближення функцій без обмежень (лема 1) і одного многочлена(нів) хорошого розбиття одиниці (лема 2). Вони використовувались у багатьох роботах з наближення, але ми посилатимемось лише на [1, 19, 23].

Нехай $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_k \ni L_k(x, g, [a, b])$ — многочлен Лагранжа, що інтерполює $g \in C_{[a,b]}$ у рівновіддалених точках $a + \nu\dfrac{b-a}{k}$, $\nu = 0, \ldots, k$, відрізка $[a, b]$, $L_0(x, g, [a, b]) := g(a)$, $L_k(x, g) := L_k(x, g, [-1, 1])$. Наведемо нерівність Уітні [24]

$$\big\|g - L_{k-1}(\cdot, g, [a, b])\big\|_{[a,b]} \le 3\,\omega_k\big(g, (b-a)/k, [a, b]\big). \tag{2.1}$$

Нехай $\varphi = \varphi(t)$ — k-мажоранта, тобто неперервна і неспадна на $[0, \infty)$ функція така, що $\varphi(0) = 0$, $t^{-k}\varphi(t)$ не зростає при $t > 0$ і Φ^k— множина всіх φ. Відомо (див., наприклад, [23], теорема 2.1), що для будь-якого k-го модуля неперервності $\omega_k(g, t, [a, b])$ функції $g \in C_{[a,b]}$ існує така $\varphi \in \Phi^k$, що

$$\omega_k(g, t, [a, b]) \le \varphi(t) \le 2^k\,\omega_k(g, t, [a, b]), \quad t \ge 0. \tag{2.2}$$

Для фіксованого парного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\beta := \arccos x$, $x \in I$; $\alpha := \arccos y$, $y \in I$; $r := 24ks + 3k + s + 3$;

$$D_{2r+1,n,r}(y, x) := \frac{1}{(2r)!}\frac{\partial^{2r+1}}{\partial x^{2r+1}}(x-y)^{2r}\int\limits_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} J_{n,r}(t)dt$$

— поліноміальне ядро типу Дзядика (див. [23], § 15), де

$$J_{n,r}(t) = \left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^{2(r+1)} \Big/ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2(r+1)} dt$$

— ядро типу Джексона.

Далі $c_\nu := c_\nu(k, s)$ — різні невід'ємні сталі, що можуть залежати лише від фіксованих $k, s \in \mathbb{N}$. Нехай

$$I := [-1, 1], \qquad \rho := \rho_n(x), \quad x \in I.$$

Лема 1 ([23], лема 15.3). *Якщо $g \in C$, то многочлен*

$$\mathcal{D}(x, g) := \mathcal{D}_n(x, g) := \int\limits_{-1}^{1}\big(g(y) - L_k(y, g)\big)D_{2r+1,n,r}(y, x)dy + L_k(x, g) \in \mathbb{P}_{(r+1)(n-1)-1}$$

для будь-якої $\delta > 0$ задовольняє нерівність

$$\big|g(x) - \mathcal{D}(x,g)\big| \le c_1\,\omega_k\big(g,\rho,[x-\delta,x+\delta]\cap I\big) + c_2\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{r-2k-2}\varphi(\rho) \le$$
$$\le c_3\varphi(\rho), \quad x\in I, \tag{2.3}$$

і для кожної фіксованої точки $x^* \in I$ — *нерівність*

$$\left|L'_{k-1}(x,g,J_n^*) - \mathcal{D}'(x,g)\right| \le \frac{c_4}{\rho}\varphi(\rho), \quad x\in J_n^*, \tag{2.4}$$

де $J_n^* := [x^*-\rho_n(x^*), x^*+\rho_n(x^*)]\cap I$.

Нехай $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j=0,\ldots,n$. Для кожного $j=1,\ldots,n$ позначимо

$$I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \qquad h_j =: h_{j,n} := x_{j-1}-x_j.$$

Виконуються нерівності

$$h_{j\pm1}\le 3h_j, \qquad \rho_n(x) < h_j < 5\rho_n(x), \quad x\in I_j,$$
$$\rho_n^2(y) < 4\rho_n(x)\big(|x-y|+\rho_n(x)\big), \quad x,y\in I, \tag{2.5}$$
$$2\big(|x-y|+\rho_n(x)\big) > |x-y|+\rho_n(y) > \big(|x-y|+\rho_n(x)\big)/2, \quad x,y\in I.$$

Для фіксованих $n\in\mathbb{N}$ і Y позначимо ($x_{n+1} := -1$, $x_{-1} = x_{-2} := 1$)

$$O_i := O_{i,n,Y} := (x_{j+1},\ x_{j-2}), \quad \text{якщо} \quad y_i\in[x_j,x_{j-1}), \qquad O := O_{n,Y} := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Будемо писати $j\in H$, $I_j\cap O=\varnothing$, $j=1,\ldots,n$. Виберемо число $N(Y)$ так, що для кожного $n\ge N(Y)$ будь-який інтервал (y_{i+1},y_i), $i=1,\ldots,s-1$, містить принаймні сім різних відрізків I_j. Далі $n\ge N(Y)$, і тому, зокрема, $H\ne\varnothing$.

Покладемо

$$\chi_j(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le x_j, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > x_j, \end{cases} \qquad j=1,\ldots,n,$$

$$K_n^*(x,Y) := \min_{i=1,\ldots,s}\frac{|x-y_i|}{\rho_n(y_i)}, \qquad K(x) := K_n(x,Y) := \min\big\{1, K_n^*(x,Y)\big\},$$

$$t_j(x) := t_{j,n}(x) := \frac{\cos^2 2n\arccos x}{\left(x-x_j^0\right)^2} + \frac{\sin^2 2n\arccos x}{(x-\overline{x}_j)^2},$$

де $\overline{x}_j = \cos\left(j-\dfrac{1}{2}\right)\pi/n$, $x_j^0 = \cos\beta_j^0$, $\beta_j^0 = \left(j-\dfrac{1}{4}\right)\pi/n$ при $j\le n/2$ і $\beta_j^0 = \left(j-\dfrac{3}{4}\right)\pi/n$ при $j>n/2$. Точки $\overline{x}_j$ і x_j^0 є нулями відповідних чисельників і знаходяться точно в середині I_j, а $t_j\in\mathbb{P}_{4n-2}$ і такі, що

$$t_j(x) \le \frac{c_5}{\big(|x-x_j|+h_j\big)^2} \le c_6\,t_j(x), \quad x\in I, \qquad t_j(x)\le\frac{10^3}{h_j^2}, \quad x\in I_j.$$

Нехай $B_\nu := B_\nu(k,s,b)$ — різні невід'ємні сталі, що можуть залежати лише від фіксованих $k,s,b\in N$. Для $j\in H$ позначимо

$$V_j(x) := V_{j,n}(x,b,Y) := \frac{1}{d_j}\int\limits_{-1}^{x} t_j^b(u)\Pi(u)du \in \mathbb{P}_{b(4n-2)+s},$$

$$d_j := d_{j,n}(b,Y) := \int\limits_{-1}^{1} t_j^b(u)\Pi(u)du,$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x,b) := \left(\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j}\right)^{2b}\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|.$$

Лема 2 ([19], лема 5.3). *Якщо* $j\in H$ *і* $b\ge 6s$, *то*

$$\operatorname{sign} d_j = \operatorname{sign}\Pi(x_j), \qquad B_1\, h_j^{1-2b}|\Pi(x_j)| \le |d_j| \le B_2\, h_j^{1-2b}|\Pi(x_j)|,$$

$$V_j'(x)\Pi(x)\operatorname{sign} d_j \ge 0, \quad x\in I, \tag{2.6}$$

$$B_3\frac{1}{h_j}\Gamma_j(x) \le \left|V_j'(x)\right| \le B_4\frac{1}{h_j}\Gamma_j(x), \quad x\in I, \tag{2.7}$$

$$|\chi_j(x)-V_j(x)| \le B_5\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j}\right)^{2b-s}, \quad x\in I,$$

і, зокрема, для $\varphi\in\Phi^k$

$$h_j\varphi(h_j)\left|V_j'(x)\right| \ge B_6\varphi(\rho)\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x,I_j)+\rho}\right)^{4b+k+s}K(x), \quad x\in I, \tag{2.8}$$

$$h_j\varphi(h_j)\left|V_j'(x)\right| \ge B_6\varphi(\rho), \quad x\in I_j. \tag{2.9}$$

Зауважимо, що

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \le \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)}+1\right)^s, \qquad x\in I, \quad y\in I\backslash O. \tag{2.10}$$

3. Доведення теореми 2. Для кожного $i=1,\ldots,s$ покладемо

$$J_{i,n} := [y_i-\rho_n(y_i), y_i+\rho_n(y_i)]\cap I, \qquad J_n := \bigcup_{i=1}^{s} J_{i,n},$$

$$\mathcal{T}_i(x) := V_{j_i,n}'\big(x,b,Y\setminus\{y_i\}\big),$$

де j_i позначає індекс j, для якого $y_i\in I_j$ (якщо таких індексів два, то нехай j_i — менший із них) і $b=6ks$.

Лема 3. *Якщо* $f\in C$ *і* $f(y_i)=0$ *при всіх* $i=1,\ldots,s$, *то многочлен*

$$\mathcal{Q}(x,f) := \mathcal{Q}_n(x,f,Y) := \mathcal{D}(x,f) - \sum_{i=1}^{s}\frac{\mathcal{D}(y_i,f)}{\mathcal{T}_i(y_i)}\mathcal{T}_i(x) \in \mathbb{P}_{25ksn}$$

задовольняє нерівності

$$\big|f(x) - \mathcal{Q}(x,f)\big| \le c_5\,\varphi(\rho), \quad x \in I, \tag{3.1}$$

$$|\,\Lambda(x)| := \big|L_{k-1}(x,f,J_{i,n}) - L_{k-1}(y_i,f,J_{i,n}) - \mathcal{Q}(x,f)\big| \le$$

$$\le c_6\,\varphi(\rho)\,K(x), \qquad x \in J_{i,n}, \quad i = 1,\ldots,s. \tag{3.2}$$

Зокрема, $\mathcal{Q}(y_i,f) = 0,\ i = 1,\ldots,s.$

Доведення. З урахуванням (2.5) для кожного $i = 1,\ldots,s$, згідно з (2.3) та відповідно (2.7), (2.10), знаходимо

$$\big|\mathcal{D}(y_i,f)\big| = \big|f(y_i) - \mathcal{D}(y_i;f)\big| \le c_3\,\varphi(\rho_n(y_i)) \le c_7\left(\frac{|x-y_i|+\rho}{\rho}\right)^{k/2}\varphi(\rho), \quad x \in I, \tag{3.3}$$

та

$$|\mathcal{T}_i(y_i)| \ge \frac{c_8}{h_{j_i}}. \tag{3.4}$$

Позначимо

$$\alpha(x) := \sum_{i=1}^{s}\frac{\mathcal{D}(y_i,f)}{\mathcal{T}_i(y_i)}\mathcal{T}_i(x).$$

З (2.5), (2.7), (2.10), (3.3) та (3.4) для будь-яких $x \in I$ випливає нерівність

$$|\alpha(x)| \le c_9\varphi(\rho)\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{|x-y_i|+\rho}{\rho}\right)^{k/2}\left(\frac{h_{j_i}}{|x-x_{j_i}|+h_{j_i}}\right)^{2b}\left|\frac{\Pi(x,Y\setminus\{y_i\})}{\Pi(x_{j_i},Y\setminus\{y_i\})}\right| \le$$

$$\le c_{10}\varphi(\rho)\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{h_{j_i}}{|x-x_{j_i}|+\rho}\right)^{2b-k-s+1} \le c_{11}\rho\varphi(\rho)\sum_{i=1}^{s}\frac{h_{j_i}}{(|x-x_{j_i}|+\rho)^2} \le 2c_{11}\varphi(\rho). \tag{3.5}$$

Звідси та з (2.3) випливає (3.1).

З нерівності Дзядика для модуля похідної алгебраїчного многочлена (див. [1], або [23, с. 120]) випливає, що

$$\big|\,\alpha'(x)\big| \le \frac{c_{12}}{\rho}\varphi(\rho), \quad x \in I. \tag{3.6}$$

Нехай $x \in J_{i,n},\ i = 1,\ldots,s.$ З (2.4), (3.6) і рівності $\Lambda(y_i) = 0$ випливає оцінка

$$|\,\Lambda(x)| = \left|\int\limits_{y_i}^{x}\Lambda'(y)dy\right| \le |x-y_i|\,\frac{c_{12}+c_4}{\rho}\,\varphi(\rho) \le c_6\,\varphi(\rho)K(x).$$

Лему 3 доведено.

Зауважимо, що якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, то з (3.1) випливає нерівність

$$\mathcal{Q}(x,f)\Pi(x) = \big(f(x) + \mathcal{Q}(x,f) - f(x)\big)\Pi(x) \ge -c_5\,\varphi(\rho)\,K(x)\,|\,\Pi(x)|, \quad x \in I\setminus J_n, \tag{3.7}$$

а з (3.2) для кожного $i = 1,\ldots,s$ — нерівність

$$\mathcal{Q}(x,f)\Pi(x) \ge -c_6\,\varphi(\rho)K(x)|\Pi(x)| +$$

$$+\big(L_{k-1}(x,f,J_{i,n}) - L_{k-1}(y_i,f,J_{i,n})\big)\Pi(x), \quad x \in J_{i,n}. \tag{3.8}$$

Лема 4. *Многочлен*

$$\mathcal{U}(x) := \mathcal{U}_n(x, Y) := \sum_{j \in H} h_j \varphi(h_j) V'_{j,n}(x, b, Y) \operatorname{sign} d_j \in \mathbb{P}_{25ksn}$$

для всіх $x \in I$ задовольняє нерівності

$$\mathcal{U}(x)\Pi(x) \geq 0, \tag{3.9}$$

$$|\mathcal{U}(x)| \leq c_{13}\varphi(\rho), \tag{3.10}$$

$$|\mathcal{U}(x)| \geq c_{14}\varphi(\rho)\, K(x). \tag{3.11}$$

Доведення. З (2.6) випливає (3.9). Нерівність (3.10) є наслідком (2.5), (2.7) та (2.10). А саме, для $x \in I$ маємо

$$\left|\mathcal{U}(x)\right| \leq c_{15} \sum_{j \in H} \varphi\left(h_j\right) \Gamma_j(x) \leq c_{16}\varphi(\rho) \sum_{j \in H} \left(\frac{|x - x_j| + \rho}{\rho}\right)^{k/2} \left(\frac{h_j}{|x - x_j| + \rho}\right)^{2b-s} \leq$$

$$\leq c_{17}\varphi(\rho) \sum_{j \in H} \left(\frac{h_j}{|x - x_j| + \rho}\right)^{2b-k-s} \leq c_{18}\rho\, \varphi(\rho) \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2} \leq c_{13}\, \varphi(\rho).$$

Для фіксованого $x \in I \setminus O$ через j^* позначимо будь-який (їх може бути два) індекс $j \in H$ такий, що $x \in I_j$. Для $x \in O_i,\ i = 1, \ldots, s$, покладемо $j^* := j_i + 2$. Отже, $j^* \in H$ при всіх $x \in I$. З (2.5), (2.8), (2.9) знаходимо (3.11):

$$|\mathcal{U}(x)| \geq c_{19}\varphi(\rho)K(x) \sum_{j \in H} \left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, I_j) + \rho}\right)^{4b+k+s} \geq$$

$$\geq c_{19}\varphi(\rho)K(x) \left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, I_{j^*}) + \rho}\right)^{4b+k+s} \geq c_{14}\, \varphi(\rho)\, K(x), \quad x \in I.$$

З лем 3 і 4 випливає, що многочлен

$$P_n(x) := \mathcal{Q}(x, f) + \frac{\max\{c_5, c_6\}}{c_{14}} \mathcal{U}(x) \in \mathbb{P}_{25ksn} \tag{3.12}$$

задовольняє нерівності (1.7) і (1.8). Дійсно, оцінка (1.8) з $c(k, s) = 2^k(c_5 + c_{13} \max\{c_5, c_6\}/c_{14})$ випливає з (2.2), (3.1), (3.10) та (3.12), а нерівність (1.7) — з (3.7)–(3.9), (3.11) та (3.12).

Теорему 2 доведено $(N(k, Y) = 25ksN(Y))$.

Насамкінець зауважимо, що нерівність (3.8) свідчить про те, що многочлен (3.12) задовольняє також і теорему 1 [3], де $k = 3$, тому що для будь-якої $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ існує многочлен L_2 (парабола) такий, що $\big(L_2(x, f, J_{i,n}) - L_2(y_i, f, J_{i,n})\big)\Pi(x) \geq 0,\ x \in J_{i,n},\ i = 1, \ldots, s,$ тоді як для $k > 3$ такого L_{k-1} не існує.

Література

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of approximation by monotone polynomials I // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**, № 4. – P. 501 – 504.

3. *Kopotun K. A.* Copositive approximation by algebraic polynomials // Anal. Math. – 1995. – **21**, № 4. – P. 269 – 283.
4. *Hu Y., Yu X. M.* The degree of copositive approximation and a computer algorithm // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – **33**, № 1. – P. 388 – 398.
5. *Zhou S. P.* A counterexample in copositive approximation // Isr. J. Math. – 1992. – **78**. – P. 75 – 83.
6. *Zhou S. P.* On copositive approximation // Approxim. Theory and Appl. – 1993. – **9**, № 2. – P. 104 – 110.
7. *Дзюбенко Г. А.* Поточечная оценка комонотонного приближения // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1467 – 1472.
8. *Wu X., Zhou S. P.* A counterexample in comonotone approximation in L^p space // Colloq. Math. – 1993. – **64**. – P. 265 – 274.
9. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Nearly comonotone approximation // J. Approxim. Theory. – 1998. – **95**. – P. 53 – 81.
10. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Nearly comonotone approximation II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2000. – **66**. – P. 115 – 135.
11. *Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* The degree of coconvex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – **127**. – P. 409 – 415.
12. *Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д.* Коопукле наближення функцій, які мають більше однієї точки перегину // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 3. – С. 352 – 365.
13. *Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Coconvex pointwise approximation // Rend. circ. mat. Palermo. Ser. II. Suppl. – 2010. – **82**. – P. 359 – 374.
14. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Coconvex pointwise approximation // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**. – С. 1200 – 1212.
15. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* New phenomena in coconvex approximation // Anal. Math. – 2006. – **32**. – P. 113 – 121.
16. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Nearly coconvex approximation // Serdica Math. J. – 2002. – **28**. – P. 361 – 378.
17. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Nearly coconvex pointwise approximation by cubic splines and polynomials // East J. Approxim. – 2006. – **12**, № 4. – P. 417 – 439.
18. *Dzyubenko G. A.* Copositive and positive pointwise approximation. – Kyiv, 1994. – 14 p. – (Preprint / Inst. Math. NAS Ukraine, № 94.38).
19. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Piecewise monotone pointwise approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 311 – 348.
20. *Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Nikolskii-type estimates for coconvex approximation of functions with one inflection point // Jaen J. Approxim. – 2010. – **2**, № 1. – P. 51 – 64.
21. *Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Pointwise estimates of coconvex approximation // Jaen J. Approxim. – 2014. – **6**, № 2. – P. 261 – 295.
22. *Kopotun K. A., Leviatan D., Prymak A., Shevchuk I. A.* Uniform and pointwise shape preserving approximation by algebraic polynomials // Surv. Approxim. Theory. – 2011. – **6**. – P. 24 – 74.
23. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
24. *Whitney H.* On functions with bouded n-th differences // J. math. pures et appl. – 1957. – **36**, № 9. – P. 67 – 95.

Одержано 12.12.16