УДК 517.5

Р. Р. Салимов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ИСКАЖАЮЩИХ МОДУЛИ ЦИЛИНДРОВ

We consider the mappings satisfying one modular inequality with respect to cylinders in the space. The distortion of modulus is majorized by an integral depending on a certain locally integrable function. We also prove a result on the absolute continuity of the analyzed mappings on lines.

Розглянуто відображення, що задовольняють модульну нерівність відносно циліндрів у просторі. Спотворення модуля мажорується інтегралом, що залежить від деякої локально інтегровної функції. Доведено результат про абсолютну неперервність на лініях вказаних відображень.

1. Введение. Настоящая статья посвящена изучению свойств отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время (см., например, [1 – 6]). Здесь и далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является непрерывным соответствием $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Напомним, что *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого либо полуоткрытого интервала одного из видов (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Кривая будет называться *дугой*, если указанное отображение отрезка (интервала) в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно (см. [7], определение 2.7). Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, в [7] (разд. 1 – 6, гл. I).

Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\displaystyle\int_\gamma \rho(x)\,|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ порядка $p \geq 1$ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^p(x)\,dm(x). \tag{1}$$

Полагаем $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$. Под *цилиндром в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, будем понимать тройку $Z = (Q, E_1, E_2)$, где Q — область в $\mathbb{R}^n$, а E_1, E_2 — подмножества границы Q со следующим свойством: найдется гомеоморфизм множества $\overline{Q}$ на единичный цилиндр $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq 1$, $0 \leq x_n \leq 1$, отображающий E_1 и E_2 на его основания (см. [10]). С каждым цилиндром Z будем ассоциировать семейство Γ_Z, состоящее из дуг, соединяющих E_1 и E_2 в Q. Модуль Γ_Z будем называть модулем цилиндра Z и обозначать $M(Z)$.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $I = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ — открытый n-мерный интервал. Отображение $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL (*абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям. Отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL в G, если сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала I, $\overline{I} \subset G$.

В работе [10] установлен следующий факт (см. лемму 2). Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий условию $M(Z) \leq KM(f(Z))$ для каждого цилиндра $Z \subset D$ и некоторой постоянной $K \geq 1$, тогда $f \in ACL$ в D. По этому поводу следует также упомянуть интересный результат Тенгвалля в этом направлении (см. [8], а также работу авторов [9], где установлено свойство ACL для Q-отображений). Следующее усиление этого результата будет установлено в настоящей работе.

Теорема 1. *Пусть* $p > 1,\ Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — *локально интегрируемая функция*, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — *открытое дискретное отображение*, *удовлетворяющее условию*

$$M_p(Z) \leq \int\limits_{f(D)} Q(y)\rho_*^p(y)dm(y) \tag{2}$$

для любого цилиндра $Z \subset D$ *и произвольной функции* $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma_Z)$. *Тогда* $f \in ACL$.

2. Некоторые предварительные сведения. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\operatorname{Bor} U$ класс всех борелевских подмножеств U. Функция $\varphi\colon \operatorname{Bor} U \to \mathbb{R}$ называется *q-квазиаддитивной*, $q \geq 1$, если выполняются следующие условия:

1) $\varphi(A) \geq 0$ для произвольного борелевского множества $A \subset U$;

2) из условия $A \subset B$ следует неравенство $\varphi(A) \leq \varphi(B)$, какие бы ни были борелевские множества $A, B \subset \operatorname{Bor} U$;

3) $\varphi(A) < \infty$ для произвольного компактного множества $A \subset U$;

4) если множества $A_1, \ldots, A_m \subset U$ не пересекаются и $A_i \subset A \subset U,\ i = 1, \ldots, m$, то

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(A_i) \leq q\varphi(A). \tag{3}$$

Верхняя и нижняя производные q-квазиаддитивной функции φ в точке $x \in U$ определяются следующим образом:

$$\overline{\varphi'}(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{d(Q)<h} \frac{\varphi(Q)}{m(Q)}, \qquad \underline{\varphi'}(x) = \lim_{h\to 0} \inf_{d(Q)<h} \frac{\varphi(Q)}{m(Q)},$$

где Q пробегает все открытые кубы и шары такие, что $x \in Q \subset U$. Следующее утверждение см., например, в [11] (лемма 2.3).

Предложение 1. *Предположим*, *что функция* $\varphi\colon \operatorname{Bor} U \to \mathbb{R}$ *является* q-*квазиаддитивной функцией множеств. Тогда*: 1) *функции* $\overline{\varphi'}$ *и* $\underline{\varphi'}$ *являются борелевскими*, 2) *для почти всех* $x \in U$ *имеет место неравенство* $\overline{\varphi'}(x) \leq q\underline{\varphi'}(x) < \infty$, 3) *для каждого открытого множества* $V \subset U$ $\int\limits_V \underline{\varphi'}(x)dm(x) \leq q\varphi(V)$.

Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е.

$$N(y, f, E) = \operatorname{card}\big\{x \in E\colon f(x) = y\big\},$$

$$N(f, E) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Заметим, что для открытых дискретных отображений $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ всегда $N(f, G) < \infty$ для любой области G такой, что $\overline{G} \subset D$ (см. [11], лемма 2.12(3)).

3. Доказательство основного результата. Пусть I — n-мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными осям координат, и $\overline{I} \subset D$. Тогда $I = I_0 \times J$, где I_0 — $(n-1)$-мерный интервал в $\mathbb{R}^{n-1}$, J — одномерный интервал, $J=(a,b)$. Далее отождествляем $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ с $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для почти всех сегментов $J_z=\{z\}\times J$, $z\in I_0$, отображение $f|_{J_z}$ абсолютно непрерывно. Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в I_0,

$$\Phi(B)=\int\limits_{f\left(B\times J\right)} Q(y)dm(y).$$

Заметим, что Φ — q-квазиаддитивная функция при $q=N(f,I)$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{k}\Phi(B_i)=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{f(B_i\times J)} Q(y)dm(y)\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{f(B\times J)} N(y,f,B_i\times J)Q(y)dm(y)\le N(f,I)\Phi(B),$$

где $B_i\subset B\subset I_0$ — борелевские множества, $B_i\cap B_l=\varnothing$ при $l\ne i$. По предложению 1

$$\varphi(z)=\limsup_{r\to 0}\frac{\Phi(B(z,r))}{\Omega_{n-1}r^{n-1}}<\infty \tag{4}$$

для почти всех $z\in I_0$, где через $B(z,r)$ обозначен шар в $I_0\subset\mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z\in I_0$ радиуса r, Ω_{n-1} — объем единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$. Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на каждом сегменте $J_z, z\in I_0$, где предел (4) существует и конечен. Обозначим соответствующее множество z через Z_0 и покажем, что сумма диаметров образов любого конечного набора непересекающихся сегментов в $J_z=\{z\}\times J$, $z\in Z_0$, стремится к нулю вместе с суммарной длиной интервалов. Вследствие непрерывности f вдоль J_z достаточно проверить этот факт для сегментов с рациональными концами в J_z. Обозначим $\Delta_i:=(\alpha_i,\beta_i)$.

Не ограничивая общности можно считать, что $|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|\ne 0$ для каждого $i=$ $=1,\ldots,k$. Тогда, поскольку отображение f непрерывно, для каждого $i=1,\ldots,k$ найдется такое $\delta_i>0$, что

$$|f(z,\alpha_i)-f(x)|<\frac{|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|}{4},\quad |x-(z,\alpha_i)|<\delta_i, \tag{5}$$

$$|f(z,\beta_i)-f(x)|<\frac{|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|}{4},\quad |x-(z,\beta_i)|<\delta_i. \tag{6}$$

В дальнейшем положим $\delta:=\min_{i=1,\ldots,k}\delta_i$, $0<r<\min\left\{\delta,\operatorname{dist}(I,\partial D)\right\}$.

Множество $\{z\}\times\{\Delta_i\}_{i=1}^k$ покроем цилиндрами $C_i=B(z,r)\times(\alpha_i,\beta_i)$ и определим $\widetilde{\rho}_i(z)=$ $=2|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|^{-1}\chi_{f(C_i)}(z)$, $i=1,\ldots,k$. Обозначим также $G_i:=|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|$.

Определим семейство кривых Γ_i следующим образом:

$$\Gamma_i=\left\{\gamma_x^i\colon x\in B(z,r/2)\right\},$$

где $\gamma_x^i\colon[\alpha_i,\beta_i]\to\mathbb{R}^n$ — кривая, определенная как $\gamma_x^i(t)=(x,t)$. Тогда для каждой локально спрямляемой кривой $f\circ\gamma$, $\gamma\in\Gamma_i$, в силу соотношений (5), (6) будем иметь

$$\int\limits_{f\circ\gamma} \widetilde{\rho}_i(z)|dz| = 2G_i^{-1}\int\limits_{f\circ\gamma} \chi_{f(C_i)}(z)|dz| \geq G_i^{-1}|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)| = 1.$$

В таком случае $\widetilde{\rho}_i \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma_i)$ и, значит, в силу условия (2) имеем

$$M_p(\Gamma_i) \leq 2^p G_i^{-p} \int\limits_{f(C_i)} Q(y)dm(y). \tag{7}$$

Заметим, что $M_p(\Gamma_i) = \dfrac{\Omega_{n-1}r^{n-1}}{2^{n-1}|\alpha_i-\beta_i|^{p-1}}$ (см. [7], п. 7.2), поэтому из (7) непосредственно получаем

$$\frac{\Omega_{n-1}r^{n-1}}{2^{n-1}|\alpha_i-\beta_i|^{p-1}} \leq 2^p G_i^{-p} \int\limits_{f(C_i)} Q(y)dm(y),$$

откуда

$$|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|^p \leq |\alpha_i-\beta_i|^{p-1}\frac{2^{p+n-1}}{\Omega_{n-1}}\frac{1}{r^{n-1}}\int\limits_{f(C_i)} Q(y)dm(y). \tag{8}$$

Обозначим для удобства $V_i := \int_{f(C_i)} Q(y)dm(y)$, тогда из (8) следует, что

$$|\alpha_i-\beta_i| \geq \left(\frac{Cr^{n-1}|f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|^p}{V_i}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{9}$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от размерности пространства n и числа p. В силу неравенства Гельдера $\dfrac{\left(\sum_{i=1}^k G_i\right)^p}{\sum_{i=1}^k V_i} \leq \left(\sum_{i=1}^k \dfrac{G_i^{p/(p-1)}}{V_i^{1/(p-1)}}\right)^{p-1}$, тогда из (9) получаем

$$\frac{C\left(\sum_{i=1}^k G_i\right)^p}{\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{r^{n-1}}} \leq \left(\sum_{i=1}^k |\alpha_i-\beta_i|\right)^{p-1}. \tag{10}$$

Поскольку Φ — квазиаддитивная функция множества, имеем

$$\sum_{i=1}^k \frac{V_i}{r^{n-1}} \leq N(f,I)\frac{\Phi(B(z,r))}{r^{n-1}}. \tag{11}$$

Переходя в (11) к верхнему пределу при $r\to 0$, с учетом (4) из (10) находим

$$\left(\sum_{i=1}^k |f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|\right)^p \leq C_1\left(\sum_{i=1}^k |\alpha_i-\beta_i|\right)^{p-1}, \tag{12}$$

где C_1 — некоторая новая постоянная, зависящая только от размерности пространства n и функции Q. Пусть теперь $\varepsilon>0$ и $\Delta_i = (\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,\ldots,k$, — система непересекающихся интервалов в J такая, что $\sum_{i=1}^k |\alpha_i-\beta_i| < \varepsilon$. Тогда из (12) следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^k |f(z,\alpha_i)-f(z,\beta_i)|\right)^p \leq C_1\varepsilon^{p-1}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 552 p.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
4. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Developments Math. – 2012. – **26**.
5. *Gutlyanskiĭ V. Ya., Golberg A.* On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space // J. d'Anal. Math. – 2009. – **109**. – P. 233 – 251.
6. *Golberg A., Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. – 2012. – **3(61)**, № 1. – P. 49 – 66.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
8. *Tengvall V.* Absolute continuity of mappings with finite geometric distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. – 2015. – **40**. – P. 3 – 15.
9. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 6. – С. 131 – 158.
10. *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. – 1965. – **362**. – P. 1 – 12.
11. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. – 1969. – **448**. – С. 1 – 40.
12. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.

Получено 26.05.16