УДК 517.51

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ПРО СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ТА АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ СЕРЕДНІХ ЗНАЧЕНЬ

We prove the mean-value theorem for functions analytic in starlike domains, propose an algorithm for finding the function of mean values, and study its analytic continuation. We present a differential equation for the function of mean values and the interpretation of the Lagrange formula for analytic functions in terms of the theory of differential equations. The set of points of the initial values of the function of mean values is analyzed and the upper of the radius of expansion of the function of mean values in Taylor's series is established.

Доказана теорема о средних значениях для аналитической в звездной области функции, приведен алгоритм нахождения функции средних значений и исследовано ее аналитическое продолжение. Приведены дифференциальное уравнение для функции средних значений и интерпретация формулы Лагранжа для аналитических функций в терминах теории дифференциальных уравнений. Проведен анализ множества точек начальных значений функции средних значений и получена оценка сверху радиуса разложения функции средних значений в ряд Тейлора.

У даній роботі, як і в [1], мова йтиме про поширення теореми Лагранжа про середні значення, тобто рівняння

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=f'(s) \tag{1}$$

на випадок, коли f — аналітична функція для z із зіркової області D комплексної площини $\mathbb{C}$ з центром у точці 0. Умова бути „теоремою про середні значення”, що накладається на рівняння (1), з якого визначається це значення $s(z)$, у цій роботі, як і в [1], обмежує розгляд рівняння (1) умовою

$$|s|<|z| \tag{2}$$

для кожного $z\neq 0$ із області D.

В даній роботі узагальнено об'єднання результатів [1], що наведені в теоремі 2 та наслідку 4.

Із робіт на цю тему інших авторів відмітимо роботи [2–4], які стосуються лише окремих реалізацій формули (1) для аналітичної функції й не мають такого загального, як результат роботи [1], характеру.

Теорема 1. *Нехай $f: z\to f(z)$ — однозначна, нелінійна та аналітична для z із круга*

$$|z|<r \tag{3}$$

функція. Тоді в деякому околі

$$|z|<r'<r \tag{4}$$

точки 0 для кожного z знайдеться одне і лише одне n-значне $s(z)$,

$$n=\operatorname{tind}_{f'}(0)\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

таке, що

$$f(z) = f(0) + f'(s(z))z, \quad |s(z)| < |z|. \tag{6}$$

Функція $s\colon z \to s(z)$ *є єдиним* n*-значним аналітичним для* z *із круга* $|z| < r'$ *розв'язком задачі*

$$zf'(s) = f(z) - f(0), \quad |s| < |z|,$$

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = r_n e^{2\pi \frac{k-1}{n} i}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$r_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}},$$

таким, що

$$\left| \int\limits_0^1 s'(z\tau)d\tau - s'(0) \right| < r'_n < 1 - r_n$$

для z *із круга* $|z| < r'$.

Тут, як і в роботі [1], $\operatorname{tind}_{f'}(0)$ — тейлорів індекс функції f у точці 0, який визначається як найменше ціле $k \geq 1$, для якого $f^{(k)}(0) \neq 0$.

Виняток у теоремі для лінійної функції пов'язаний з тим, що рівняння в теоремі для такої функції стає тотожністю, що задовольняється довільною функцією s. Більш того, лінійна функція — єдина з аналітичних для z із околу точки 0 функцій, для якої

$$\operatorname{tind}_{f'}(0) = \infty,$$

отже, для неї $\operatorname{tind}_{f'}(0) \notin \mathbb{N}$.

У даній роботі детально досліджено окремі питання, пов'язані з теоремою 1, зокрема, наведено алгоритм визначення функції середніх значень, аналіз множини точок $g'(0)$ та многокутників у $\mathbb{R}^2$ з вершинами в точках цієї множини, питання аналітичного продовження функції s в ряд Маклорена з оцінками значення r', деякі інтерпретації результатів роботи та деякі ілюстративні приклади.

Згідно з теоремою 1

$$g'(0) = r_n e^{2\pi \frac{k-1}{n} i}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{7}$$

$$r_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Розглянемо множину точок (7), як точок $\mathbb{R}^2$ з координатами

$$r_n \left(\cos 2\pi \frac{k-1}{n}, \sin 2\pi \frac{k-1}{n} \right). \tag{9}$$

Ці точки $\mathbb{R}^2$ лежать на колах

$$K_n : |z| = r_n. \tag{10}$$

Оскільки

$$r_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

то кола K_n лежать у кільці

$$\frac{1}{2} \leq |z| < 1. \tag{12}$$

Більш того, оскільки для $n \geq 2$

$$\ln \frac{r_{n+1}}{r_n} = \ln r_{n+1} - \ln r_n = \frac{1}{n} \ln (n+1) - \frac{1}{n+1} \ln (n+2) =$$

$$= \frac{1}{n} \ln (n+1) - \frac{1}{n+1} \ln (n+1) -$$

$$- \frac{1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \ln(n+1) -$$

$$- \frac{1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) -$$

$$- \frac{1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) >$$

$$> \frac{1}{n+1} \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} + \ldots\right)\right) >$$

$$> \frac{1}{n+1} \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} (\ln n - 1) > 0, \tag{13}$$

то для $n \geq 2$

$$r_n < r_{n+1}. \tag{14}$$

Отже, в кільці (12) коло K_{n+1} лежить ззовні кола K_n, а оскільки

$$\lim_{n \to \infty} r_n = e^{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln (n+1)} = 1, \tag{15}$$

то кола K_n стягуються при $n \to \infty$ до одиничного кола $|z| = 1$.

Згідно з викладеним, r_n утворюють монотонно зростаючу послідовність

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < \ldots < \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} < \ldots < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1. \tag{16}$$

Точки (7) лежать на колі K_n в $\mathbb{R}^2$ та ділять його на n рівних дуг. З'єднавши сусідні з них хордами, отримаємо правильні віртуальні n-кутники в $\mathbb{R}^2$ для довільного $n \geq 3$, відрізок $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ для $n = 2$ та точку $\frac{1}{2}$ для $n = 1$ з вершинами в точках (7) на колі K_n. Знайдемо довжину d_n сторони n-кутника. Вона, очевидно, дорівнює довжині відрізка, що з'єднує точки $r_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}\right)$ та $(1; 0)$. Отже, для $n \geq 2$

$$d_n^2 = r_n^2\left(\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{n}\right) = 2r_n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 4r_n^2\sin^2\frac{\pi}{n}, \tag{17}$$

$$d_n = 2r_n \sin\frac{\pi}{n}, \quad n \geq 2.$$

Опишемо тепер кола навколо вершин n-кутника з центрами в цих вершинах і такі, щоб вони лежали всередині одиничного круга в $\mathbb{R}^2 : |z| = 1$ та дотикалися до цього круга в одній точці. Очевидно, це кола радіуса $1 - r_n$ і вони найбільші по площі з кіл, що утворюють круговий окіл навколо вершин n-кутника.

Вияснимо, чи перетинаються між собою кола з центрами в сусідніх вершинах n-кутника. Для цього порівняємо довжину d_n сторони n-кутника з діаметром кола, описаного навколо його вершини, з центром у ній, рівного $2(1 - r_n)$, згідно з побудовою. Отже, розглянемо порівняння

$$d_n \simeq 2(1 - r_n), \quad n \geq 2, \tag{18}$$

де $\simeq$ — знак порівняння, який відповідає потрібному та означає $<$, $>$ або $=$.

Очевидні операції, які можна робити з порівняннями, — це операції, які не змінюють знак, якому відповідає порівняння.

Згідно із викладеним та (17) для $n \geq 2$

$$r_n \sin\frac{\pi}{n} \simeq (1 - r_n), \tag{19}$$

$$r_n\left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right) \simeq 1, \tag{20}$$

або, позначивши r_n через $(n+1)^{-1/n}$,

$$\frac{1 + \sin\frac{\pi}{n}}{(n+1)^{1/n}} \simeq 1. \tag{21}$$

Підрахунки показують, що порівняння (21) набирає вигляду нерівностей

$$1 + \sin\frac{\pi}{n} > (n+1)^{1/n} \tag{22}$$

для $n = \overline{2,16}$ та нерівностей

$$1 + \sin\frac{\pi}{n} < (n+1)^{1/n} \tag{23}$$

для $n = \overline{17,50}$. Це означає, що кола з центрами у вершинах n-кутника для $n = \overline{2,16}$ не перетинаються, а для $n = \overline{17,50}$ — перетинаються.

Покажемо, що нерівність (23) виконується для довільного $n > 50$. Для цього розглянемо порівняння

$$1 + \sin\frac{\pi}{n} - (n+1)^{1/n} \simeq 0 \tag{24}$$

для $n > 50$.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \sin\frac{\pi}{x} - (x+1)^{1/x}, \tag{25}$$

— функція, яка збігається з лівою частиною (24) для $x = n$. Оскільки

$$f(1) = -1, \quad f(16) > 0, \quad f(17) < 0, \tag{26}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 - \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} = 0, \tag{27}$$

то f' має нулі на півпрямій $x \geq 16$. Знайдемо похідну функції f. Згідно з (25) маємо

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x} - (x+1)^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x(x+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left((x+1)^{1/x}\left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) - \pi\cos\frac{\pi}{x}\right). \tag{28}$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+1) - (\pi+1)\right) = \infty. \tag{29}$$

Із нерівностей та граничних співвідношень (27) та (29) випливає, що функція f для $x \geq 1$ набуває як найбільшого додатного, так і найменшого від'ємного значення, причому перше на відрізку $[1, x_1]$, $16 < x_1 < 17$, а друге на відрізку $[x_1, x_0]$, $x_0 \geq x_1$, де x_0 визначається як найбільший із нулів функції f' умовами

$$f'(x_0) = 0, \quad f'(x) > 0, \quad x > x_0. \tag{30}$$

Оскільки згідно з (28) для $x \geq 2$

$$x^2 f'(x) \geq \ln(x+1) - (\pi+1), \tag{31}$$

то

$$f'(x) > 0, \quad x > e^{\pi+1} - 1, \tag{32}$$

отже,

$$x_0 \leq e^{\pi+1} - 1. \tag{33}$$

Запишемо далі рівняння для x_0: згідно з (28) та (30) для визначення x_0 маємо рівняння

$$(x+1)^{1/x}\left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) = \pi\cos\frac{\pi}{x} \tag{34}$$

та оцінку (33). Підрахунки показують, що

$$x_0 < 47. \tag{35}$$

Отже, для $x \geq 47$ має місце нерівність

$$f'(x) > 0, \tag{36}$$

інтегруючи яку, для $x \geq 47$ отримуємо

$$f(x) > f(x_0), \quad f(47) > f(x_0). \tag{37}$$

Оскільки $f(47) < 0$, то із (37) випливає, що

$$f(x_0) < 0. \tag{38}$$

Згідно з (30), (38) та граничними значеннями із (27), функція f монотонно зростає від $f(x_0)$ до 0 при зростанні x від x_0 до ∞. Це доводить, що для $n > 50$

$$f(x) < 0. \tag{39}$$

Отже,

$$f(x_0) < 0, \quad n \geq 17. \tag{40}$$

Таким чином, ми отримали підсумовуюче твердження:

$$1 + \sin\frac{\pi}{n} > (n+1)^{1/n} \quad \text{для} \quad n = \overline{2,16},$$

$$1 + \sin\frac{\pi}{n} < (n+1)^{1/n} \quad \text{для} \quad n \geq 17,$$

з якого випливає, що

$$d_n > 2(1 - r_n) \quad \text{для} \quad n = \overline{2,16},$$

$$d_n < 2(1 - r_n) \quad \text{для} \quad n \geq 17, \tag{41}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Отже, кола з центрами у вершинах n-кутника при $n \geq 17$ перетинаються, утворюючи область в одиничному крузі з межею, утвореною дугами цих кіл, причому таку, що верхньою своєю межею область дотикається одиничного кола в точках, що ділять одиничне коло на n рівних частин.

Чи можлива побудова таких n-кутників в $\mathbb{R}^2$? Відповідь є очевидною: можлива, але лише випадкова та з імовірністю нуль: достатньо в $\mathbb{R}^2$ провести коло радіуса випадкової довжини та зафіксувати на ньому випадково дві точки. Тоді з імовірністю нуль може трапитися, що радіус такого кола дорівнюватиме r_n, відстань між точками дорівнюватиме d_n для деякого $n \geq 3$, а побудований по r_n та d_n n-кутник буде правильним. Теорія ймовірностей визначає можливість такої побудови з нульовою ймовірністю, але не виключає можливість такої побудови, бо така подія є серед імовірних подій.

Чому лише випадкова? Доводить це наступний факт: для тих n, для яких одиничне коло ділиться на n рівних частин, можна побудувати правильні n-кутники в $\mathbb{R}^2$; для побудови наших n-кутників, а побудова їх, як було зазначено, можлива саме для таких n, потрібно ще провести в $\mathbb{R}^2$ коло радіуса $r_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$, концентричне до одиничного кола, а це вимагає виділення з одиничного відрізка відрізка довжиною r_n, тобто вимагає ділення відрізка одиничної довжини на $\sqrt[n]{n+1}$ частин, що неможливо внаслідок ірраціональності числа $\sqrt[n]{n+1}$ для $n \geq 2$.

Неможливість побудови в $\mathbb{R}^2$ таких n-кутників є причиною для того, щоб назвати їх правильними віртуальними n-кутниками.

Нехай r — радіус круга з центром у центрі області D, найбільший із можливих, що забезпечують належність круга

$$|z| < r \tag{42}$$

зірковій області $D \subset \mathbb{C}$.

Запишемо формулу Лагранжа про середнє значення

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(s),$$

використавши рівність

$$f(z) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau} f(z\tau) d\tau = \int\limits_0^1 f'(z\tau) d\tau z,$$

у вигляді рівняння відносно s

$$f'(s) = \int\limits_0^1 f'(z\tau) d\tau \tag{43}$$

та замінимо в отриманому рівнянні s на zw. Отже, покладемо

$$s = zw \tag{44}$$

та отримаємо (43) у вигляді рівняння

$$f'(zw) = \int\limits_0^1 f'(z\tau)d\tau. \tag{45}$$

Врахуємо обмеження теореми 1, яке для w перетворюється на умову $|w| < 1$, та розглянемо (45) в області

$$|z| < r, \quad |w| < 1 \tag{46}$$

простору $\mathbb{C}^2$. Очевидно, що як функція $f' \colon (z, w) \to f'(zw)$ є аналітичною по обох змінних (z, w) в області (46) простору $\mathbb{C}^2$, так і функція $f' \colon (z, \tau) \to f'(z\tau)$ є аналітичною по обох змінних (z, τ) в області

$$|z| < r, \quad \tau \in (0, 1), \tag{47}$$

простору $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Із аналітичності функції f' у крузі

$$|z| < r \tag{48}$$

випливає, що ряд Маклорена цієї функції збігається до самої функції для z із круга (48), при цьому рівномірно в будь-якому компакті, що знаходиться всередині круга (48).

Це дозволяє, враховуючи порядок функції f' в точці 0, записати (45) через ряди Маклорена відповідних функцій у вигляді

$$\sum_n \frac{f^{(k+1)}}{k!} z^k w^k = \sum_n \frac{f^{(k+1)}}{(k+1)!} z^k \tag{49}$$

або після скорочення на $z \neq 0$ у вигляді

$$w^n \sum_{n+1} \frac{f^{(k)}}{(k-1)!} (zw)^{k-(n+1)} = \sum_{n+1} \frac{f^{(k)}}{k!} z^{k-(n+1)} \tag{50}$$

і нарешті у вигляді

$$w^n \sum_0 \frac{f^{(k+n+1)}}{(k+n)!} z^k w^k = \sum_0 \frac{f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!} z^k, \tag{51}$$

де позначено

$$f^{(k)} = f^{(k)}(0), \quad k = n+1, n+2, \ldots .$$

При $z = 0$ рівняння (51) набирає вигляду

$$w^n \frac{f^{(n+1)}}{n!} = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}, \tag{52}$$

і оскільки, згідно з визначенням порядку функції f' в точці 0,

$$f^{(n+1)} \neq 0, \tag{53}$$

то (52) переходить у рівняння

$$w^n = \frac{1}{n+1}. \tag{54}$$

Отже, n і лише n різних значень w_0 при $z = 0$ задовольняють рівняння (51) і ці значення — це

$$r_n e^{2\pi \frac{k-1}{n} i}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{55}$$

Розглянемо рівняння (51) у околі

$$|z| < r, \quad |w - w_0| < 1 - r_n \tag{56}$$

точки $(0, w_0) \in \mathbb{C}^2$, де w_0 — довільне із значень (55).

Для кожного z із круга (42) точки круга

$$|w - w_0| < 1 - r_n \tag{57}$$

знаходяться всередині одиничного круга

$$|w| < 1, \tag{58}$$

а границя круга (57) дотикається границі одиничного круга (58) в одній точці.

Нарешті, похідна по w лівої частини рівняння (51) в точці $(0, w_0)$ не дорівнює нулеві:

$$n w_0^{n-1} \frac{f^{(n+1)}}{n!} \neq 0, \tag{59}$$

згідно з визначенням $\operatorname{tind}_{f'}(0)$, а правої — дорівнює нулеві. Це доводить, що рівняння (51) задовольняє всі умови теореми про неявну функцію [5]. Згідно з цією теоремою, в деякому околі

$$|z| < r', \quad |w - w_0| < r_n' < 1 - r_n, \tag{60}$$

точки $(0, w_0)$ рівняння (51) для кожного z має один і лише один розв'язок $w(z)$. Цей розв'язок є аналітичною для z із круга

$$|z| < r' \tag{61}$$

функцією і неявною функцією, що визначається рівнянням (51), умовою (60) для $w(z)$ та початковою умовою

$$w(0) = w_0. \tag{62}$$

Оскільки з нерівності (60) для $w(z)$ випливає нерівність для $s(z)$ вигляду

$$|s(z)| = |zw(z)| = |z||w(z) - w_0 + w_0| \leq$$

$$\leq |z| \left(|w(z) - w_0| + |w_0|\right) \leq |z| \left(r'_n + r_n\right) <$$

$$< |z| \left(1 - r_n + r_n\right) \leq |z| \tag{63}$$

для кожного z із круга (61), то із (60) випливає нерівність із теореми 1

$$|s(z)| < |z|.$$

Запишемо оцінку (60), врахувавши заміну (44):

$$s(z) = zw(z), \quad w(z) = \frac{s(z)}{z}, \tag{64}$$

отже, маючи рівність

$$\left|\frac{s(z)}{z} - w(0)\right| = \left|\int\limits_0^1 s'(z\tau)d\tau - s'(0)\right|, \tag{65}$$

у вигляді

$$\left|\int\limits_0^1 s'(z\tau)d\tau - s'(0)\right| < r'_n < 1 - r_n. \tag{66}$$

Нерівність (66) доводить другу із нерівностей із теореми 1, що і завершує доведення теореми 1.

Наведемо алгоритм визначення функції середніх значень. Для цього запишемо тотожність, в яку перетворюється рівняння (51) після підстановки в нього $w(z)$. Для $n = 1$ це буде тотожність

$$w(z) \left(f^{(2)} + \sum_1 \frac{f^{(k+2)}}{(k+1)!} z^k w^k(z)\right) = \frac{f^{(2)}}{2} + \sum_1 \frac{f^{(k+2)}}{(k+2)!} z^k. \tag{67}$$

Здиференціюємо (67) та отримаємо

$$w'(0) f^{(2)} + w^2(0) \frac{f^{(3)}}{2} = \frac{f^{(3)}}{3!}. \tag{68}$$

Оскільки $f^{(2)} \neq 0$, із (68) знаходимо

$$w'(0) = \frac{f^{(3)}}{24 f^{(2)}}. \tag{69}$$

Здиференціюємо (67) двічі та одержимо

$$w''(0) f^{(2)} + 2w'(0) \left(f^{(2)} + \frac{f^{(3)}}{2!} zw + \frac{f^{(4)}}{3!} z^2 w^2 \right)'_0 +$$

$$+ w(0) \left(f^{(2)} + \frac{f^{(3)}}{2!} zw + \frac{f^{(4)}}{3!} z^2 w^2 \right)''_0 = \frac{f^{(4)} 2!}{4!}. \tag{70}$$

Далі знаходимо коефіцієнт при $2w'(0)$ у формулі (70)

$$\frac{f^{(3)}}{2} w(0) = \frac{f^{(3)}}{4} \tag{71}$$

та при $w(0)$

$$\frac{f^{(3)}}{2!} 2w'(0) + \frac{f^{(4)} 2!}{3!} w^2(0) = f^{(3)} w'(0) + \frac{f^{(4)}}{12}. \tag{72}$$

Отже, формула (70) з урахуванням рівностей (71), (72) набирає вигляду

$$w''(0) f^{(2)} + w'(0) \frac{f^{(3)}}{2} + w'(0) \frac{f^{(3)}}{2} + \frac{f^{(4)}}{24} = \frac{f^{(4)}}{12}. \tag{73}$$

Із (73) визначаємо $w''(0)$:

$$w''(0) = \frac{1}{24 f^{(2)}} \left(f^{(4)} - 24 w'(0) f^{(3)} \right). \tag{74}$$

З урахуванням (69) із (74) отримуємо

$$w''(0) = \frac{1}{24 f^{(2)}} \left(f^{(4)} - \frac{(f^{(3)})^2}{f^{(2)}} \right). \tag{75}$$

Здиференціюємо тотожність (67) $k \geq 3$ разів та отримаємо, згідно з формулою Лейбніца, рівність

$$w^{(k)}(0) f^{(2)} + \sum_{\nu=1}^{k} C_k^{\nu} w^{(k-\nu)}(0) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{f^{(j+2)}}{(j+1)!} (z^j w^j(z))_0^{(\nu)} = \frac{k!}{(k+2)!} f^{(k+2)}. \tag{76}$$

Оскільки

$$(z^j w^j(z))_0^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{\nu} C_\nu^n (w^j)_0^{(\nu-n)} (z^j)_0^{(n)} = C_\nu^j (w^j)_0^{(\nu-j)} j!, \tag{77}$$

то (76) набирає вигляду

$$w^{(k)}(0)f^{(2)}+\sum_{\nu=1}^{k}C_k^{\nu}w^{(k-\nu)}(0)\sum_{j=1}^{\nu}C_{\nu}^{j}(w^j)_0^{(\nu-j)}\frac{f^{(j+2)}}{j+1}=\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)}. \tag{78}$$

Отже,

$$w^{(k)}(0)=\frac{1}{f^{(2)}}\left\{\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)}-\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu}C_k^{\nu}C_{\nu}^{j}w^{(k-\nu)}(0)(w^j)_0^{(\nu-j)}\frac{f^{(j+2)}}{j+1}\right\}. \tag{79}$$

Введемо позначення

$$P_{j\nu}=(w^j)_0^{(\nu)}. \tag{80}$$

Тоді формула (79) набере вигляду

$$w^{(k)}(0)=\frac{1}{f^{(2)}}\left\{\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)}-\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu}C_k^{\nu}C_{\nu}^{j}P_{j(\nu-j)}w^{(k-\nu)}(0)\frac{f^{(j+2)}}{j+1}\right\} \tag{81}$$

з поки що не визначеними коефіцієнтами (80). Згідно з позначеннями (80)

$$P_{j0}=w^j(0),\quad P_{1\nu}=w^{(\nu)}(0), \tag{82}$$

і формулу (81) можемо записати у вигляді

$$w^{(k)}(0)=\frac{1}{f^{(2)}}\left\{\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)}-\sum_{\nu=2}^{k}\sum_{j=1}^{\nu}C_k^{\nu}C_{\nu}^{j}P_{j(\nu-j)}w^{(k-\nu)}(0)\frac{f^{(j+2)}}{j+1}-\right.$$

$$\left.-C_k^1C_1^1w(0)w^{(k-1)}(0)\frac{f^{(3)}}{2}\right\}=\frac{1}{f^{(2)}}\left\{\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)}-\right.$$

$$-\sum_{\nu=2}^{k}\sum_{j=2}^{\nu}C_k^{\nu}C_{\nu}^{j}P_{j(\nu-j)}w^{(k-\nu)}(0)\frac{f^{(j+2)}}{j+1}-\sum_{\nu=2}^{k}C_k^{\nu}C_{\nu}^{1}w^{(\nu-1)}(0)w^{(k-\nu)}(0)\frac{f^{(3)}}{2}-$$

$$\left.-w(0)w^{(k-1)}(0)\frac{kf^{(3)}}{2}\right\}=\frac{1}{f^{(2)}}\left\{\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)}-\right.$$

$$-\sum_{\nu=3}^{k}\left(\sum_{j=2}^{\nu}C_k^{\nu}C_{\nu}^{j}P_{j(\nu-j)}w^{(k-\nu)}(0)\frac{f^{(j+2)}}{j+1}-C_k^2w^2(0)w^{(k-2)}(0)\frac{f^{(4)}}{3}\right)-$$

$$\left.-\sum_{\nu=2}^{k}C_k^{\nu}w^{(\nu-1)}(0)w^{(k-\nu)}(0)\frac{\nu f^{(3)}}{2}-w^{(k-1)}(0)\frac{kf^{(3)}}{2^2}\right\}=$$

$$= \frac{1}{f^{(2)}}\left\{\frac{f^{(k+2)}}{(k+1)(k+2)} - \sum_{\nu=3}^{k}\sum_{j=2}^{\nu} C_k^\nu C_\nu^j P_{j(\nu-j)} w^{(k-\nu)}(0)\frac{f^{(j+2)}}{j+1} - \right.$$

$$\left. - C_k^2 w^{(k-2)}(0)\frac{f^{(4)}}{12} - \sum_{\nu=2}^{k} C_k^\nu w^{(\nu-1)}(0) w^{(k-\nu)}(0)\frac{\nu f^{(3)}}{2} - w^{(k-1)}(0)\frac{k f^{(3)}}{4}\right\}. \tag{83}$$

Формула (83) визначає $w^{(k)}(0)$ по $w^{(j)}(0)$ з $j = \overline{1, k-1}$ та по $P_{j(\nu-j)}$ з $\nu = \overline{3, k},\ j = \overline{2, \nu}$.

Згідно з позначенням (80)

$$P_{j(\nu-j)} = (w^j)^{(\nu-j)}(0) \tag{84}$$

дорівнює значенню $(\nu - j)$-ї похідної функції $w^j : z \to w^j(z)$ у точці 0, і оскільки $\nu - j$, згідно з (83), не перевищує $k-2$, то $P_{j(\nu-j)}$ визначається по $w(0), w'(0), \ldots, w^{(k-2)}(0)$.

Таким чином, формула (83) визначає $w^{(k)}(0)$ для $k \geq 3$ по $w(0), \ldots, w^{(k-2)}(0)$ та $P_{j\nu}$ з $j = \overline{3, k},\ \nu = \overline{2, j}$.

Для визначення коефіцієнтів $P_{j\nu}$, що входять у формулу (83), для $k \geq 3$ використаємо формулу Лейбніца, згідно з якою для $j \geq \nu > 0$

$$P_{j\nu} = (w^j)^{(\nu)}(0) = j(w^{j-1}w')^{(\nu-1)}(0). \tag{85}$$

Отже, для $\nu = 1$

$$P_{j\nu} = j w^{j-1}(0) w'(0) = \frac{j}{2^{j-1}} w'(0) = \frac{j}{2^{j-1}} P_{11}, \tag{86}$$

для $\nu \geq 2$

$$P_{j\nu} = j\left\{(w^{j-1})^{(\nu-1)}(0) w'(0) + \sum_{m=1}^{\nu-1} C_{\nu-1}^m (w^{j-1})^{(\nu-m-1)}(0) w^{(m+1)}(0)\right\} =$$

$$= j\left\{P_{(j-1)(\nu-1)} P_{11} + \sum_{m=1}^{\nu-1} C_{\nu-1}^m P_{(j-1)(\nu-m-1)} P_{1(m+1)}\right\}. \tag{87}$$

Таким чином, ми отримали рекурентне співвідношення для коефіцієнтів $P_{j\nu}$ (87) і завершили алгоритм визначення функції середніх значень у випадку $n = 1$.

Цей алгоритм утворюють формули (69), (75) для знаходження $w'(0), w''(0)$ та (83), (86), (87) для знаходження $w^{(k)}(0)$ при $k \geq 3$.

Нехай $n \geq 2$. Тоді тотожність (51) набирає вигляду

$$w^n(z)\left(\frac{f^{(n+1)}}{n!} + \sum_{j=1} \frac{f^{(j+n+1)}}{(j+n)!} z^j w^j\right) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} + \sum_{j=1} \frac{f^{(j+n+1)}}{(j+n+1)!} z^j. \tag{88}$$

Здиференціюємо (88) та отримаємо

$$nw_0^{n-1}w'(0)\frac{f^{(n+1)}}{n!}+w_0^{n+1}\frac{f^{(n+2)}}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+2)}}{(n+2)!}. \tag{89}$$

Оскільки

$$w_0^n=w^n(0)=\frac{1}{n+1}, \quad f^{(n+1)}\neq 0, \tag{90}$$

то (89) набирає вигляду

$$\frac{n}{(n+1)!}w'(0)f^{(n+1)}+w_0^2\frac{f^{(n+2)}}{(n+1)!(n+1)}=w_0\frac{f^{(n+2)}}{(n+2)!} \tag{91}$$

та визначає $w'(0)$:

$$w'(0)=\frac{f^{(n+2)}w(0)}{nf^{(n+1)}}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{w(0)}{n+1}\right). \tag{92}$$

Здиференціюємо (88) $k\geq 2$ разів та отримаємо

$$(w^n)^{(k)}(0)\frac{f^{(n+1)}}{n!}+\sum_{j=1}^{k}C_k^j(w^n)^{(k-j)}(0)\sum_{\nu=1}^{j}\frac{f^{(\nu+n+1)}}{(\nu+n)!}(z^\nu w^\nu)^{(j)}(0)=\frac{k!f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!}. \tag{93}$$

Оскільки

$$(z^\nu w^\nu)^{(j)}(0)=C_j^\nu(w^\nu)^{(j-\nu)}(0)\nu!, \tag{94}$$

то (93) набирає вигляду

$$(w^n)^{(k)}(0)\frac{f^{(n+1)}}{n!}+\sum_{j=1}^{k}C_k^j(w^n)^{(k-j)}(0)\sum_{\nu=1}^{j}C_j^\nu(w^\nu)^{(j-\nu)}(0)\frac{\nu!f^{(\nu+n+1)}}{(\nu+n)!}=\frac{k!f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!}. \tag{95}$$

Із (95) отримуємо, враховуючи, що $f^{(n+1)}\neq 0$, рівняння для визначення $w^{(k)}(0)$:

$$(w^n)^{(k)}(0)=\frac{n!}{f^{(n+1)}}\left\{\frac{k!f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{j}C_k^jC_j^\nu(w^n)^{(k-j)}(0)(w^\nu)^{(j-\nu)}(0)\frac{\nu!f^{(\nu+n+1)}}{(\nu+n)!}\right\}. \tag{96}$$

Зауважимо, що частина цього рівняння згідно з його визначенням залежить лише від f та $w(0)$, $w'(0),\ldots,w^{(k-1)}(0)$ та не залежить від $w^{(k)}(0)$.

Запишемо (96), використавши (80):

$$(w^n)^{(k)}(0)=\frac{n!}{f^{(n+1)}}\left\{\frac{k!f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!}-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{j}C_k^jC_j^\nu P_{n(k-j)}P_{\nu(j-\nu)}\frac{\nu!f^{(\nu+n+1)}}{(\nu+n)!}\right\}. \tag{97}$$

Далі маємо

$$(w^n)^{(k)}(0) = n(w'w^{n-1})^{(k-1)}(0) = n\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^{j} w^{(k-j)}(0)(w^{n-1})^{(j)}(0) =$$

$$= nw^{n-1}(0)w^{(k)}(0) + n\sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^{j} w^{(k-j)}(0)(w^{n-1})^{(j)}(0) =$$

$$= nw^{n-1}(0)w^{(k)}(0) + n\sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^{j} P_{(n-1)j}P_{1(k-j)}. \tag{98}$$

З урахуванням (98) рівняння (97) можна записати у вигляді

$$nw^{n-1}(0)w^{(k)}(0) = \frac{n!}{f^{(n+1)}}\left\{\frac{k!f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!} - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{j} C_k^j C_j^\nu P_{n(k-j)} \times\right.$$

$$\left.\times P_{\nu(j-\nu)}\frac{\nu! f^{(\nu+n+1)}}{(\nu+n)!}\right\} - n\sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^{j} P_{(n-1)j}P_{1(k-j)}. \tag{99}$$

Із (99) отримуємо формулу для визначення $w^{(k)}(0)$ вигляду

$$w^{(k)}(0) = (n+1)\left\{\frac{(n-1)!}{f^{(n+1)}}\left(\frac{k!f^{(k+n+1)}}{(k+n+1)!} - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{j} C_k^j C_j^\nu P_{n(k-j)} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times P_{\nu(j-\nu)}\frac{\nu! f^{(\nu+n+1)}}{(\nu+n)!}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^{j} P_{(n-1)j}P_{1(k-j)}\right\} w(0). \tag{100}$$

Отже, формула (92) для знаходження $w'(0)$ та (100) для знаходження $w^{(k)}(0),\ k \geq 2$, разом із рекурентними співвідношеннями (82), (86), (87) для визначення коефіцієнтів $P_{j\nu}$ утворюють алгоритм визначення розвинення функції середніх значень s у ряд Маклорена для $n \geq 2$.

Згідно з теоремою 1 справджується рівність

$$f'(zw(z)) = \int_0^1 f'(z\tau)d\tau \tag{101}$$

для z із круга

$$|z| < r', \quad r' < r, \tag{102}$$

при цьому

$$|w(z) - w(0)| < r_n' < 1 - r_n. \tag{103}$$

Із (103) випливає нерівність

$$w(z) \neq 0 \tag{104}$$

для z із круга (102).

Дійсно, припустимо, що (104) не виконується, тобто для деякого $z_0 \neq 0$,

$$|z_0| < r',$$

має місце рівність

$$w(z_0) = 0. \tag{105}$$

Для цього z_0 виконується нерівність (103), отже,

$$|w(0)| = |w(z_0) - w(0)| < 1 - r_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{106}$$

Але згідно з позначеннями $w(0) = r_n$, так що нерівність (106) набирає вигляду

$$2r_n < 1, \quad r_n < \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{107}$$

що суперечить ланцюгу нерівностей (16).

Суперечність доводить нерівність (104).

Відносно функції s нерівність (104) означає, що

$$s(z) = zw(z) \neq 0 \tag{108}$$

для $z \neq 0, |z| < r'$. Це доводить справедливість важливого доповнення до теореми 1.

***Наслідок* 1.** *Нехай $f : z \to f(z)$ — функція, що задовольняє умови теореми* 1. *Тоді функція середніх значень s із теореми* 1 *задовольняє нерівність*

$$0 < \left| \frac{s(z)}{z} \right| < 1$$

для $z \neq 0$ із круга (102).

Як результат, отриманий із використанням теореми про неявну функцію, теорема даної роботи має локальний характер, і ця локальність пов'язана з тим, що в теоремі функція середніх значень s визначена в крузі радіуса r', про який відомо лише, що він менший за $r : r' < r$.

Щоб позбутися цієї локальності теореми 1, використаємо аналітичність функції s у крузі (102) та надану цією властивістю можливість аналітичного продовження функції s із круга (102) в більшу область простору $\mathbb{C}$.

З метою спрощення викладок розглянемо результат такого продовження у випадку, коли D — круг радіуса r з центром у центрі області D, тобто круг

$$|z| < r. \tag{109}$$

У цьому випадку r — радіус збіжності ряду Маклорена функції f, який дорівнює ∞, коли f — ціла функція, та менший ніж ∞, коли функція f на його границі втрачає аналітичність, має особливість.

Запропонований алгоритм визначення функції s — такий собі метод послідовного визначення $w^{(k)}(0),\ k \in \mathbb{N}$, — дозволяє, хоча й неявно, визначити радіус збіжності ряду

$$\sum_0 \frac{w^{(k)}(0)}{k!} z^k, \tag{110}$$

як аналітичного продовження функції w, існування якої для z із круга (102) доведено теоремою 1.

Нехай R — радіус збіжності ряду (110). Тоді $R \le r$ і функція w є визначеною й аналітичною для z із круга

$$|z| < R. \tag{111}$$

Із теореми про єдиність випливає, що аналітичне продовження w із круга (102) в круг (111) зберігає рівність (101). Отже, рівність (101), яка мала місце для z із круга (102), залишається справедливою й для z із круга (111). Звідси випливає нерівність

$$r' \le R \tag{112}$$

та справедливість (101) для z із круга (111).

Таким чином, доведено наступний наслідок із теореми 1.

Наслідок 2. *Нехай функція* $f : z \to f(z)$ *задовольняє умови теореми* 1. *Тоді для* r' *із теореми* 1 *справджується нерівність*

$$r' \le R,$$

де R *— радіус збіжності ряду Маклорена функції середніх значень* s *із теореми* 1.

Очевидним є наступне твердження, як наслідок теореми 1.

***Наслідок* 3.** *Нехай функція $f : z \to f(z)$ задовольняє умови теореми 1 та набуває дійсних значень для дійсних z. Тоді функція середніх значень s із теореми 1 набуває для дійсного значення z: одне і лише одне дійсне значення для непарного n, а саме те, що відповідає значенню r_n для $w(0)$, та два і лише два дійсних значення для парного n, а саме ті, що відповідають значенням $\pm r_n$ для $w(0)$.*

Дійсно, оскільки згідно з алгоритмом визначення функції $w : z \to w(z) = \dfrac{s(z)}{z}$ із теореми 1 $w^{(k)}(0)$ для дійсних $f^{(k)}$ та дійсних $w(0)$ є дійсним, то ряд Маклорена функції w в цьому випадку має дійсні коефіцієнти, а отже, визначає функцію w такою, що набуває дійсних значень для дійсних z із круга (111). Але серед значень $w(0)$ лише наведені в наслідку є дійсними. Це й завершує доведення наслідку 3.

Ще один наслідок з теореми 1 ми отримаємо таким чином. Рівність (101), записану у вигляді

$$f'(s(z)) = \int\limits_0^1 f'(z\tau)d\tau, \tag{113}$$

перетворимо так:

$$f'(s(z)) - f'(0) = \int\limits_0^1 (f'(z\tau) - f'(0))d\tau,$$

$$\int\limits_0^{s(z)} f''(\eta)d\eta = \int\limits_0^1 (f'(z\tau) - f'(0))d\tau,$$

$$f''(s(z))s'(z) = \int\limits_0^1 f''(z\tau)\tau d\tau. \tag{114}$$

Домноживши (114) на z^2, отримаємо

$$z^2 f''(s(z))s'(z) = \int\limits_0^z f''(\eta)\eta d\eta =$$

$$= f'(z)z - \int\limits_0^z f'(\eta)d\eta = f'(z)z - (f(z) - f(0)). \tag{115}$$

Із (114) та (115) отримуємо рівність правих частин результату домноження (114) на z^2 та (115), тобто рівність

$$f'(z)z - (f(z) - f(0)) = \int\limits_0^1 f''(z\tau)\tau d\tau z^2,$$

або остаточно

$$f(z) = f(0) + f'(z)z - \int_0^1 f''(z\tau)\tau d\tau z^2. \tag{116}$$

Рівність (116) справедлива для z із круга (102), а отже, згідно з теоремою про єдиність, для z із області $D \subseteq \mathbb{C}$.

Таким чином, ми отримали наступний наслідок із теореми 1.

***Наслідок* 4.** *Якщо функція $f : z \to f(z)$ аналітична для z із області $D \subseteq \mathbb{C}$, то*

$$f(z) = f(0) + f'(z)z - \int_0^1 f''(z\tau)\tau d\tau z^2.$$

Для нелінійної функції f наслідок 4 доведено, для лінійної він є очевидним.

Наведемо деякі інтерпретації отриманих результатів.

Насамперед зауважимо, що для лінійної функції, єдиної з аналітичних функцій в околі точки 0, для яких

$$\operatorname{tind}_{f'}(0) = \infty,$$

рівність із наслідку 4 можна інтерпретувати в термінах теорії диференціальних рівнянь таким чином: довільна лінійна однорідна функція є розв'язком задачі Коші

$$zf' = f, \quad f(0) = 0 \tag{117}$$

та визначає однопараметричну сім'ю інтегральних кривих рівняння (117).

Аналогічну інтерпретацію можна надати функції середніх значень s.

Дійсно, оскільки $s(z)$ є розв'язком рівняння

$$f'(s) = \int_0^1 f'(z\tau)d\tau, \tag{118}$$

то $s(z)$ — розв'язок диференціального рівняння

$$f''(s)s' = \int_0^1 f''(z\tau)\tau d\tau, \tag{119}$$

отриманого диференціюванням (118). Отже, (118) — це рівняння інтегралів диференціального рівняння (119), що визначаються умовами

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = w(0), \quad |s(z)| < |z| \tag{120}$$

для z із круга (111). Ці інтеграли утворюють в $\mathbb{C}^2$ „мережу” із n інтегральних кривих рівняння (119), які перетинаються в початку координат $\mathbb{C}^2$.

Зауважимо також, що згідно з (101) та формулою, виведеною в [1] для функції f, для якої $\mathrm{tind}_{f'}(0) = n$, а саме, згідно з (101) та формулою

$$f'(z) = f'(0) + \frac{z^n}{(n-1)!} \int\limits_0^1 f^{(n+1)}(z\tau)(1-\tau)^{n-1} d\tau \tag{121}$$

для $z \in D$, рівняння для функції w, що приводить до (101), тобто рівняння

$$f'(zw) = \int\limits_0^1 f'(z\tau) d\tau, \tag{122}$$

можна записати у вигляді

$$w^n \int\limits_0^1 f^{(n+1)}(zw\tau)(1-\tau)^{n-1} d\tau = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f^{(n+1)}(zt\tau)(1-\tau)^{n-1} t^n d\tau dt. \tag{123}$$

Варто зауважити також, що (123) — це запис рівняння (51) не через ряд Маклорена функції f, а через саму функцію f.

Наведемо тепер оцінки для r'. Нехай $r' < r$. Тоді в кільці

$$r' \leq |z| < r \tag{124}$$

можуть бути точки, які задовольняють рівність (101) та не задовольняють нерівність наслідку 1. Це такі точки $(z_0, s(z_0))$, що $r' \leq |z_0| < r$,

$$s(z_0) = 0, \tag{125}$$

та такі $(z_0', s(z_0'))$, що $r' \leq |z_0'| < r$,

$$s(z_0') = z_0'. \tag{126}$$

Отже, згідно з викладеним, перші з них задовольняють рівність

$$f'(0) = \int\limits_0^1 f'(z_0\tau) d\tau, \tag{127}$$

другі — рівність

$$f'(z_0') = \int\limits_0^1 f'(z_0'\tau) d\tau. \tag{128}$$

Та із точок, що задовольняють умови (125), (127) та (126), (128), яка по модулю найменша або лежить на границі круга $|z| < r'$, або знаходиться найближче до цієї границі зовні, якщо позначити її через z^*, приводить до оцінки

$$r' \leq z^*. \tag{129}$$

Якщо ж z^* не існує, а отже ні (127), ні (128) не справджується, то припущення $r' < r$ може не мати місця. Отже, тоді може бути справедливою рівність

$$r' = r. \tag{130}$$

Рівність (127) означає, що $z_0 \neq 0$ є коренем рівняння

$$f'(0) = \int\limits_0^1 f'(z\tau)d\tau, \tag{131}$$

а рівність (128) — що $z_0' \neq 0$ є коренем рівняння

$$f'(z) = \int\limits_0^1 f'(z\tau)d\tau. \tag{132}$$

Отже, $z^* \neq 0$ — найменший по модулю із коренів рівнянь (131), (132), зокрема $z^* \neq 0$ може бути коренем рівняння

$$f'(0) = f'(z), \tag{133}$$

яке є наслідком рівнянь (131), (132).

Ми довели наступний наслідок із теореми 1, який визначає обмеження на величину r'.

***Наслідок* 5.** *Нехай функція $f : z \to f(z)$ задовольняє умови теореми* 1. *Тоді якщо рівняння*

$$f'(z) = f'(0)$$

та

$$f(z) = f(0) + f'(0)z$$

мають у крузі $|z| < r$ ненульові корені та $z^* \neq 0$ є найменшим по модулю серед них, то

$$r' \leq |z^*|,$$

в протилежному випадку

$$r' \leq r.$$

Розглянемо ілюстративні приклади, в яких функція s знаходиться явно.

Нехай

$$f(z) = z^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді рівняння для s має вигляд

$$(n+1)s^n = z^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\operatorname{tind}_{f'}(0) = n,\ z^*$ — відсутнє. Маємо

$$s(z) = zw(0), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай

$$f(z) = e^z, \quad \operatorname{tind}_{f'}(0) = 1.$$

Тоді рівняння для s має вигляд

$$e^s = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_1 \frac{z^{k-1}}{k!},$$

$z^* = 2\pi i,\ s'(0) = \dfrac{1}{2},\ R = 2\pi = |z^*|,$

$$s(z) = \ln \frac{e^z - 1}{z} = \ln \sum_1 \frac{z^{k-1}}{k!},$$

для z із круга

$$|z| < 2\pi,$$

де $\ln$ — головна частина Ln, дійсна для дійсних значень z.

В обох наведених прикладах функції f є цілими.

Нехай

$$f(z) = \ln(z+1), \quad |z| < 1.$$

Тоді рівняння для s набирає вигляду

$$\frac{1}{s+1} = \frac{\ln(z+1)}{z} = \sum_1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^{k-1},$$

$\operatorname{tind}_{f'}(0) = 1,\ s'(0) = \dfrac{1}{2},\ z^*$ — відсутнє, $R < 1$. Маємо

$$s(z) = \frac{z}{\ln(z+1)} - 1 = \frac{1}{\sum_1 \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} z^{k-1}} - 1$$

для z із круга

$$|z| < 1,$$

радіус якого визначається тим, що функція s в точці -1 має особливість, яка збігається з особливістю в точці -1 функції f.

Насамкінець зауважимо, що в загальному випадку, коли D — зіркова область $\mathbb{C}$, функцію середніх значень s можна аналітично продовжити з круга $|z| < r'$ у підобласть $U \subseteq D$, що суттєво змінює локальність тверджень теореми 1. Звичайно, при такому продовженні потрібно перейти до розвинення функції середніх значень s в околах точок $z_0 \neq 0$ в ряд Тейлора, а не Маклорена.

Зазначимо також, що близькими до даної роботи є роботи [6–8].

Література

1. *Самойленко А. М.* Деякі результати локальної теорії гладких функцій // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 2. — С. 231–267.
2. *Савчук В. В.* До теореми про середнє для аналітичних функцій // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 8. — С. 1143–1147.
3. *Радзиевская Е. И., Радзиевский Г. В.* Для голоморфной в области функции остаточный член в ряде Тейлора допускает запись в форме Лагранжа // Сиб. мат. журн. — 2003. — **44**, № 2. — С. 402–414.
4. *Abel U., Ivan M., Riedel T.* The mean value theorem of Flett and divided differences // J. Math. Anal. and Appl. — 2004. — **295**, № 1 — P. 1–9.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. Начала теории. – 2-е изд. — М.: Наука, 1967. — 486 с.
6. *Арнольд В. И.* Особенности гладких отображений // Успехи мат. наук. — 1968. — **23**, № 1(139). — С. 3–44.
7. *Самойленко А. М.* Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критический точки конечного типа // Функцион. анализ. — 1968. — **2**, № 4. — С. 63–69.
8. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Наука, 1982. — 302 с.

Одержано 15.05.17