УДК 517.929

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ТЕОРІЯ ФАВАРА – АМЕРІО ДЛЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ БЕЗ ВИКОРИСТАННЯ $\mathcal{H}$-КЛАСІВ ЦИХ РІВНЯНЬ

The Favard – Amerio theory is constructed for almost periodic functional-differential equations in a Banach space without the use of $\mathcal{H}$-classes of these equations. For linear equations, we present the first example of an almost periodic operator, which has no analogs in the classical Favard – Amerio theory.

Построена теория Фавара – Америо для почти периодических функционально-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве без использования $\mathcal{H}$-классов этих уравнений. Для линейных уравнений впервые приведен пример почти периодического оператора, для которого нет аналогов в классической теории Фавара – Америо.

1. Майже періодичні функції й оператори та основний об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{K}$ — поле $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ дійсних або комплексних чисел відповідно і E — довільний банаховий простір над полем $\mathbb{K}$ з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через C^n, $n \in \mathbb{N}$, банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt}, \ldots, \dfrac{d^n x}{dt^n} \in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^n} = \max\left\{ \|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}, \ldots, \left\|\frac{d^n x}{dt^n}\right\|_{C^0} \right\}.$$

У просторах $C^0, C^1, \ldots, C^n$ визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Означення 1. *Елемент $y \in C^n$, де $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, називається майже періодичним (за Бохнером, див. [1 – 3]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^n є компактною підмножиною цього простору, тобто з кожної послідовності $(S_{h_n} y)_{n\geq 1}$ можна виділити збіжну в C^n підпослідовність.*

Множини майже періодичних елементів просторів $C^0, C^1, \ldots, C^n$ є підпросторами цих просторів відповідно з нормами $\|\cdot\|_{C^0}$, $\|\cdot\|_{C^1}$, $\ldots$, $\|\cdot\|_{C^n}$. Ці підпростори будемо позначати через $B^0, B^1, \ldots, B^n$ відповідно.

Нехай $B_{C^n}[a, r]$ — замкнена куля в C^n з центром у точці $a \in C^n$ і радіусом r, тобто множина $\{x \in C^n : \|x - a\|_{C^n} \leq r\}$.

Означення 2. *Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, називається майже періодичним, якщо для кожних елемента $a \in C^n$, числа $r \in (0, +\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1\to\infty,\, l_2\to\infty} \sup_{x \in B_{C^n}[a,r]} \left\| S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x - S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x \right\|_{C^m} = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора H рівносильне означенню, що використовувалося Е. Мухамадієвим [4] при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі C^0.

Означення 3. *Оператор* $H\colon C^n \to C^m$, *де* $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *називається автономним, якщо для всіх* $h \in \mathbb{R}$

$$S_h H S_{-h} = H.$$

Очевидно, що автономний оператор є майже періодичним у сенсі означення 2.

Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset E$ і $R(x)$ — множина значень функції $x = x(t)$, тобто множина $\{x(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. Для компактних множин $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ позначимо через $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$ множину всіх елементів $x \in C^n$, для кожного з яких

$$R(x) \subset K_0, \quad R\left(\frac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \ldots, R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n.$$

Зручним для подальшого є наступне означення майже періодичного оператора, вперше наведене автором у випадку дискретних рівнянь [5].

Означення 4. *Оператор* $H\colon C^n \to C^m$, *де* $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *називається майже періодичним, якщо для кожних множин* $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ *і послідовності* $(h_k)_{k \geq 1}$ *дійсних чисел існує підпослідовність* $(h_{k_l})_{l \geq 1}$, *для якої*

$$\lim_{l_1 \to \infty,\ l_2 \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}} \left\| S_{h_{k_{l_1}}} H S_{-h_{k_{l_1}}} x - S_{h_{k_{l_2}}} H S_{-h_{k_{l_2}}} x \right\|_{C^m} = 0.$$

Зауважимо, що майже періодичний у сенсі означення 4 оператор H може не бути майже періодичним у сенсі означення 2 (відповідний приклад наведено в п. 5).

Розглянемо функціонально-диференціальне рівняння

$$\mathfrak{F} x = y, \tag{2}$$

де $\mathfrak{F}\colon C^n \to C^0$ — майже періодичний у сенсі означення 4 оператор і $y \in B^0$.

Основним об'єктом досліджень у статті є умови майже періодичності обмежених неперервних розв'язків рівняння (2), що не використовують елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Очевидно, що окремими випадками рівняння (2) є звичайні диференціальні рівняння, лінійні і нелінійні функціонально-диференціальні рівняння загаювального, нейтрального і випереджувального типів (див. класифікацію рівнянь, наприклад, у [6]), а також рівняння загального типу з відхильним аргументом, що залежить як від часу, так і від розв'язку.

При дослідженні рівняння (2) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, що є елементами множини

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{K_0,K_1,\ldots,K_n \in \mathcal{K}} \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}. \tag{3}$$

2. Функціонал δ. Зафіксуємо множини $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ множину всіх розв'язків рівняння (2), для кожного з яких

$$R(x) \subset K_0, \quad R\left(\frac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \ldots, R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n.$$

Припустимо, що

$$N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n) \neq \varnothing.$$

Розглянемо елемент $x^* \in N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$, для якого діаметр $\operatorname{diam} R\,(x^*)$ множини $R\,(x^*)$, тобто число $\sup\{\|x_1 - x_2\|_E \colon x_1, x_2 \in R\,(x^*)\}$, не дорівнює 0. Також розглянемо додатне число

$$r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n) = \max_{l \in \{0,1,\ldots,n\}} \sup\left\{\|x_l - y_l\|_E : x_l \in R\left(\frac{d^l x^*}{dt^l}\right), y_l \in K_l\right\},$$

де $\dfrac{d^0 x^*}{dt^0} = x^*$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n)]$.

Позначимо через $\Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)$ множину всіх елементів $z \in C^n$, для кожного з яких

$$R(z) \subset K_0, \quad R\left(\frac{dz}{dt}\right) \subset K_1, \ldots, R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right) \subset K_n$$

і

$$\|z - x^*\|_{C^n} \geq \varepsilon.$$

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)} \|\mathfrak{F}z - \mathfrak{F}x^*\|_{C^0}. \tag{4}$$

Тут $\mathfrak{F}x^*$ можна замінити на y, де y — права частина рівняння (2).

Використаємо функціонал δ для дослідження рівняння (2).

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (2), що на відміну від теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [3, 7] не використовують $\mathcal{H}$-клас рівняння (2) та умову відокремленості розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Теорема 1. *Нехай $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$, $x^* \in N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$, $\operatorname{diam} R\,(x^*) \neq 0$ і*

$$\delta\,(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0 \tag{5}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n))$. Тоді x^* належить B^n.

Зауваження 1. Розв'язок $x^* \in N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ рівняння (2), для якого $\operatorname{diam} R\,(x^*) = 0$, очевидно, майже періодичний.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $x^* \in N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ рівняння (2) не є елементом простору B^n. Тоді існує послідовність $\left(S_{h_p} x^*\right)_{p \geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p} x^*\right)_{p \geq 1}$ буде розбіжною в C^n. Отже,

$$\left\|S_{k_{p_r}} x^* - S_{k_{q_r}} x^*\right\|_{C^n} \geq \gamma, \quad r \geq 1,$$

для деяких послідовностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, \rho)$, де

$$\rho = \operatorname{diam} \bigcup_{k=0}^{n} R\left(\frac{d^k x^*}{dt^k}\right).$$

Тому

$$S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* \in \Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma), \quad r \geq 1.$$

Не обмежуючи загальності доведення можна вважати, що на підставі включення $y \in B^0$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_{-k_{p_r}} y - S_{-k_{q_r}} y \right\|_{C^0} = 0. \tag{6}$$

Зауважимо, що $\rho \leq r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n)$. Також можна вважати, що послідовність $(S_{k_p} \mathfrak{F} S_{-k_p} x)_{p\geq 1}$ збігається рівномірно по x на $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}$. Тому

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}} \left\| S_{k_p} \mathfrak{F} S_{-k_p} x - S_{k_q} \mathfrak{F} S_{-k_q} x \right\|_{C^0} = 0. \tag{7}$$

Покажемо, що

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma) = 0. \tag{8}$$

Очевидно, що на підставі (4) і (7)

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \gamma) = \inf_{z\in\Omega(x^*,K_0,K_1,\ldots,K_n,\gamma)} \|\mathfrak{F} z - \mathfrak{F} x^*\|_{C^0} \leq$$
$$\leq \left\| \mathfrak{F} S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* - \mathfrak{F} x^* \right\|_{C^0}, \quad r \geq 1. \tag{9}$$

Оскільки

$$\left\| \mathfrak{F} S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* - \mathfrak{F} x^* \right\|_{C^0} =$$
$$= \left\| S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{p_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{p_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{q_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{q_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} \leq$$
$$\leq \left\| S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{p_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{p_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{q_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} +$$
$$+ \left\| S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{q_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{q_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{q_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} =$$
$$= \left\| \left(S_{k_{p_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{p_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* - \left(S_{k_{q_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{q_r}}\right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} + \left\| S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} y - S_{-k_{q_r}} S_{k_{q_r}} y \right\|_{C^0} \leq$$
$$\leq \sup_{x\in\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}} \left\| S_{k_{p_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{p_r}} x - S_{k_{q_r}} \mathfrak{F} S_{-k_{q_r}} x \right\|_{C^0} + \left\| S_{-k_{p_r}} y - S_{-k_{q_r}} y \right\|_{C^0}, \quad r \geq 1,$$

то на підставі (6), (7) і (9) справджується рівність (8). Це суперечить співвідношенню (5). Отже, припущення, що розв'язок $x^* \in N(\mathfrak{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ рівняння (2) не є елементом простору B^0, хибне.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Вимога виконання співвідношення (5) є суттєвою. У випадку її невиконання обмежені розв'язки рівняння (2) можуть не бути майже періодичними. Також ця вимога не є необхідною для майже періодичності розв'язків рівняння (2), що підтверджується наступним прикладом.

***Приклад* 1.** Розглянемо простори C^0 і C^1 у випадку $E = \mathbb{R}$ та рівняння

$$\mathcal{G}x = 0, \tag{10}$$

де $\mathcal{G}\colon C^1 \to C^0$ — майже періодичне у сенсі означення 4 відображення і 0 — нульовий елемент простору C^0. Припустимо, що також $\mathcal{G}y = 0$, якщо $\|y\|_{C^1} \leq 1$. Множина таких відображень є непорожньою множиною. Елементом цієї множини є відображення $\mathcal{H}\colon C^1 \to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{H}x)(t) = H\left(x(t), \frac{dx(t-1)}{dt}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої $H(x, y) = 0$, якщо $|x| \leq 1$ і $|y| \leq 1$.

Очевидно, що кожна диференційовна на $\mathbb{R}$ функція $x^* = x^*(t)$, для якої $R(x^*) \subset [-1/4, 1/4]$ і $R\,(dx^*/dt) \subset [-1/4, 1/4]$ (ця функція може бути елементом множини $C^1 \setminus B^1$ або множини B^1), є розв'язком рівняння (10) і

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \varepsilon) = 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1))$, де $K_0 = K_1 = [-1/2, 1/2]$.

4. Випадок лінійних рівнянь. Застосуємо теорему 1 для дослідження лінійних майже періодичних функціонально-диференціальних рівнянь.

Позначимо через $L(C^k, C^l)$, де $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, банаховий простір усіх лінійних неперервних операторів $A\colon C^k \to C^l$ з нормою

$$\|A\|_{L(C^k, C^l)} = \sup_{\|x\|_{C^k}=1} \|Ax\|_{C^l}.$$

Розглянемо лінійний неперервний і майже періодичний у сенсі означення 4 оператор $\mathcal{L}\colon C^n \to C^0$, що визначається за допомогою рівності

$$\mathcal{L}x = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k x}{dt^k}.$$

Тут $A_k\colon C^0 \to C^0$, $k = \overline{0, m}$, — лінійні неперервні та майже періодичні у сенсі означення 4 оператори. Також розглянемо лінійне рівняння

$$\mathcal{L}x = h, \tag{11}$$

де $h \in B^0$. Очевидно, що це рівняння є окремим випадком рівняння (2).

На підставі теореми 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $K_0, K_1, \ldots, K_n$ належать $\mathcal{K}$. Якщо функціонально-диференціальне рівняння* (11) *має розв'язок $x^* \in N(\mathcal{L}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ і виконується співвідношення*

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0 \tag{12}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Окремим випадком теореми 2 є наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо функціонально-диференціальне рівняння* (11) *має розв'язок* $x^* \in \mathfrak{S}_n$ *і виконується співвідношення*

$$\inf_{x \in \mathfrak{S}_n, \|x\|_{C^n}=1} \|\mathcal{L}x\|_{C^0} > 0, \tag{13}$$

то цей розв'язок є майже періодичним.

Справді, нехай $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ і $x^* \in N(\mathcal{L}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$. Завдяки (13) та лінійності оператора $\mathcal{L}$

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon > 0$. Тому на підставі теореми 2 розв'язок x^* рівняння (11) є майже періодичним.

***Зауваження* 3.** У теоремах 2 і 3 оператор $\mathcal{L}$ може не бути майже періодичним у сенсі означення 2.

***Зауваження* 4.** Множина необоротних лінійних неперервних і майже періодичних у сенсі означення 4 операторів $\mathcal{L} \colon C^n \to C^0$, що задовольняють співвідношення (13), не є порожньою множиною.

5. Приклад лінійного необоротного майже періодичного у сенсі означення 4 оператора, що задовольняє співвідношення (13) при $n = 1$. Будемо вважати, що E є банаховим простором l_1 числових послідовностей $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ над полем $\mathbb{K}$, для кожної з яких $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, з нормою

$$\|a\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Покажемо, що існує майже періодичний у сенсі означення 4 лінійний неперервний оператор $\mathcal{L} \colon C^n \to C^0$, що не є майже періодичним у сенсі означення 2, для нього виконується співвідношення (13) при $n = 1$ і $\ker \mathcal{L} \neq \{0\}$ (тоді оператор $\mathcal{L}$ не буде мати неперервного оберненого).

Побудову оператора $\mathcal{L}$ виконаємо у пп. 5.1 – 5.5.

***5.1. Підпростір* $\mathfrak{S}_0$.** Очевидно, що $x + y, \alpha x \in \mathfrak{S}_0$, якщо $x, y \in \mathfrak{S}_0$ і $\alpha \in \mathbb{K}$ (тут $\mathfrak{S}_0$ — множина, що визначена за допомогою (3) при $n = 0$). Тому $\mathfrak{S}_0$ — векторний простір. Цей простір, очевидно, також є нормованим простором з нормою $\|\cdot\|_{C^0}$.

Покажемо, що простір $\mathfrak{S}_0$ є повним, тобто замикання множини значень кожного елемента множини $\overline{\mathfrak{S}_0}$ — компактна множина.

Нехай $z \in \overline{\mathfrak{S}_0}$ і ε — довільне додатне число. Існує елемент $w \in \mathfrak{S}_0$, для якого

$$\|z - w\|_{C^0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

і тому

$$\inf \left\{ \|a - b\|_{l_1} : a \in \overline{R(z)}, b \in \overline{R(w)} \right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

Нехай M — скінченна $\dfrac{\varepsilon}{2}$-сітка [8] для компактної множини $\overline{R(w)}$. Тоді на підставі (14) множина M буде скінченною ε-сіткою для множини $\overline{R(z)}$.

Отже, завдяки довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ множина $\overline{R(z)}$ компактна і $\mathfrak{S}_0$ — підпростір банахового простору C^0.

5.2. Підпростір $\overline{\mathbf{span}\,(\boldsymbol{Y})}$**.** Використаємо елементи

$$x_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}, \ldots), \quad k \in \mathbb{N},$$

простору l_1, де δ_{kl} — символ Кронекера. Очевидно, що для довільних чисел $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$ і $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ ($k_i \neq k_j$, якщо $i \neq j$)

$$\left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{k_l} \right\|_{l_1} = \sum_{l=1}^{p} |\beta_l|. \tag{15}$$

Розглянемо попарно неперетинні проміжки $I_1 = (-\infty, 1)$ і $I_k = [a_{k-1}, a_k),\ k \geq 2$, де

$$a_k = \sum_{l=m}^{k} \frac{1}{m},$$

об'єднання яких, очевидно, збігається з $\mathbb{R}$.

Визначимо функцію $y\colon \mathbb{R} \to l_1$ рівністю

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n(t) x_n, \tag{16}$$

де

$$\omega_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad t < 0, \\ 1 - t, & \text{якщо} \quad t \in [0, 1), \\ 0, & \text{якщо} \quad t \geq 1, \end{cases}$$

і

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t < a_{n-1}, \\ n^2(t - a_{n-1}), & \text{якщо} \quad a_{n-1} \leq t < a_{n-1} + n^{-2}, \\ 1, & \text{якщо} \quad a_{n-1} + n^{-2} \leq t < a_n - n^{-2}, \\ -n^2(t - a_n), & \text{якщо} \quad a_n - n^{-2} \leq t < a_n, \\ 0, & \text{якщо} \quad t \geq a_n, \end{cases} \qquad n \geq 2. \tag{17}$$

Очевидно, що ця функція є елементом простору C^0.

Розглянемо множину $Y = \{S_h y\colon h \in \mathbb{R}\}$, де S_h — оператор зсуву, що визначається формулою (1), і лінійну оболонку $\operatorname{span}(Y)$ цієї множини, тобто сукупність усіх елементів

$$u = \sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y,$$

де $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots \beta_p \in \mathbb{C}$ і $h_1, \ldots h_p \in \mathbb{R}$ (вважається, що $h_p > h_{p-1} > \ldots > h_1$, якщо $p > 1$). Очевидно, що $\operatorname{span}(Y)$ — мінімальний векторний підпростір простору C^0, що містить Y. Цей простір є нормованим простором з нормою $\|\cdot\|_{C^0}$.

Корисним для подальшого є наступне твердження.

Лема. *Нехай* $u = \sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y$ — *довільний ненульовий елемент простору* $\operatorname{span}(Y)$ (*тут* $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$, $h_1, \ldots, h_p \in \mathbb{R}$ *і* $h_i \neq h_j$, *якщо* $i \neq j$).

Тоді:

1) *для кожного числа* $\varepsilon > 0$ *існують такі число* τ_ε *і множина* $M_\varepsilon \subset [\tau_\varepsilon, +\infty)$, *міра Лебега* $\mu(M_\varepsilon)$ *якої менша за* ε, *що виконується співвідношення*

$$\left\| \left(\sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y \right)(t) \right\|_{l_1} = \sum_{l=1}^{p} |\beta_l| \tag{18}$$

для всіх $t \in [\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$;

2) *замикання множини значень елемента* $u = u(t)$ *у просторі* l_1 *не є компактною множиною в цьому просторі.*

Доведення. Зауважимо, що

$$u(t) = \left(\sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y \right)(t) = \sum_{l=1}^{p} \beta_l y(t + h_l) \tag{19}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Із означень функцій $y = y(t)$ і $\omega_n(t)$, $n \geq 2$ (див. (16) і (17)), та вимог до чисел $h_1, \ldots, h_p$ випливає, що для кожного числа $\varepsilon > 0$ існують такі достатньо велике число τ_ε і множина $M_\varepsilon \subset [\tau_\varepsilon, +\infty)$, міра Лебега $\mu(M_\varepsilon)$ якої менша за ε, що кожному $t \in [\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$ відповідають елементи $x_{1,t}, \ldots, x_{p,t} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, що попарно не збігаються між собою, для яких

$$y(t + h_l) = x_{l,t}, \quad l = \overline{1, p}. \tag{20}$$

Тому на підставі (15), (19) і (20) виконується співвідношення (18) для всіх $t \in [\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$, тобто перше твердження леми доведено.

Для доведення другого твердження леми розглянемо довільну зростаючу послідовність $(t_n)_{n \geq 1}$ елементів множини $[\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$ (тут ε — число, що розглядалось при обґрунтуванні першого твердження леми), для якої

$$t_{n+1} - t_n > \max_{i \neq j} |h_i - h_j|, \quad n \geq 1.$$

Тоді буде виконуватися співвідношення

$$\{x_{1,t_i}, \ldots, x_{p,t_i}\} \cap \{x_{1,t_j}, \ldots, x_{p,t_j}\} = \varnothing,$$

якщо $i \neq j$, $i \geqslant n, j \geqslant n$ і число n є достатньо великим. Тому для довільних достатньо великих натуральних чисел i і j $(i \neq j)$ для ненульового елемента $u = u(t)$ виконується співвідношення

$$\|u(t_i) - u(t_j)\|_{l_1} = \left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l y(t_i + h_l) - \sum_{l=1}^{p} \beta_l y(t_j + h_l) \right\|_{l_1} =$$

$$= \left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{l,t_i} - \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{l,t_j} \right\|_{l_1} = 2 \sum_{l=1}^{p} |\beta_l| > 0.$$

Звідси випливає, що замикання множини значень елемента $u = u(t)$ у просторі l_1 не є компактною множиною.

Лему доведено.

Таким чином, на підставі леми замикання множини значень кожного ненульового елемента $u = \sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y \in \mathrm{span}\,(Y)$ не є компактною множиною, тобто $u \notin \mathfrak{S}_0$, якщо $u \neq 0$.

Далі покажемо, що всі елементи множини $\overline{\mathrm{span}\,(Y)}$ мають аналогічні властивості.

Нехай $z \in \overline{\mathrm{span}\,(Y)}$ і $(z_k)_{k\geq 1}$ — послідовність елементів із $\mathrm{span}\,(Y)$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_{C^0} = 0. \tag{21}$$

Оскільки для кожного $k \geq 1$ існують такі числа $p_k \in \mathbb{N}$, $\delta_{1,k}, \ldots, \delta_{p_k,k} \in \mathbb{R}$ і $h_{1,k}, \ldots, h_{p_k,k} \in \mathbb{R}$ ($h_{i,k} \neq h_{j,k}$, якщо $i \neq j$), що елемент $z_k = z_k(t)$ має вигляд

$$z_k(t) = \sum_{l=1}^{p_k} \delta_{l,k} y(t + h_{l,k}),$$

то на підставі леми

$$\|z_k\|_{C^0} = \sum_{l=1}^{p_k} |\delta_{l,k}|, \quad k \geq 1.$$

Аналогічно, як і при доведенні другого твердження леми, для кожного $k \geq 1$ існує зростаюча послідовність $(t_{k,n})_{n\geq 1}$, для якої $\lim_{n\to\infty} t_{k,n} = +\infty$, така, що

$$\|z_k(t_{k,i}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} \geq 2\|z_k\|_{C^0}$$

для всіх натуральних чисел i і j, що не збігаються між собою. Із цих нерівностей випливає, що

$$\begin{gathered}\|z(t_{k,i}) - z(t_{k,j})\|_{l_1} \geq \|z_k(t_{k,i}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} - \|(z(t_{k,i}) - z_k(t_{k,i})) - (z(t_{k,j}) - z_k(t_{k,j}))\|_{l_1} \geq \\ \geq \|z_k(t_{k,i}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} - \|z(t_{k,i}) - z_k(t_{k,i})\|_{l_1} - \|z(t_{k,j}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} \geq \\ \geq 2\|z_k\|_{C^0} - 2\|z - z_k\|_{C^0}, \quad k \geq 1, \quad i \neq j.\end{gathered}$$

Звідси та з включення $z \in \overline{\mathrm{span}\,(Y)}$ на підставі (21) отримуємо, що для деякого числа $\gamma > 0$ і достатньо великого натурального числа k_0

$$\|z(t_{k_0,i}) - z(t_{k_0,j})\|_{l_1} \geq \gamma, \quad i \neq j,$$

що означає некомпактність множини $\overline{R(z)}$ у просторі l_1.

Отже, $\overline{\mathrm{span}\,(Y)}$ — підпростір банахового простору C^0.

5.3. Оператор L_1. Побудуємо майже періодичний у сенсі означення 4 лінійний неперервний оператор $L_1 \colon C^0 \to C^0$, для якого $\ker L_1 \neq \{0\}$ і виконується співвідношення (13) при $n = 0$, що не є майже періодичним у сенсі означення 2.

Спочатку покажемо, що для кожного елемента $z = z(t)$ простору $\overline{\mathrm{span}\,(Y)}$ існує границя $\lim_{t\to-\infty} z(t)$ і для деякого числа $\alpha \in \mathbb{K}$, що залежить від z,

$$\lim_{t\to-\infty} z(t) = \alpha x_1. \tag{22}$$

Очевидно, що на підставі (16) і (19) для кожного елемента $u = u(t) \in \mathrm{span}\,(Y)$ існує границя

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = \left(\sum_{l=1}^{p} \beta_l\right) x_1.$$

Нехай $(z_k)_{k\geq 1}$ — послідовність елементів простору $\operatorname{span}(Y)$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_{C^0} = 0, \tag{23}$$

і

$$\lim_{t\to-\infty} z_k(t) = \alpha_k x_1, \tag{24}$$

де $\alpha_k \in \mathbb{K}$. Припустимо, що послідовність $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ є збіжною (ця вимога не зменшує загальність доведення), тобто для деякого числа $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha. \tag{25}$$

Очевидно, що для всіх $t \in \mathbb{R}$ і $k \geq 1$

$$z(t) = (z(t) - z_k(t)) + (z_k(t) - \alpha_k x_1) + (\alpha_k a - \alpha x_1) + \alpha x_1.$$

Тому

$$\|z(t) - \alpha x_1\|_{l_1} \leq \|z(t) - z_k(t)\|_{l_1} + \|z_k(t) - \alpha_k x_1\|_{l_1} + \|\alpha_k x_1 - \alpha x_1\|_{l_1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1.$$

Звідси та з (24) випливає, що

$$0 \leq \overline{\lim_{t\to-\infty}} \|z(t) - \alpha x_1\|_{l_1} \leq \overline{\lim_{t\to-\infty}} \|z(t) - z_k(t)\|_{l_1} +$$

$$+ \overline{\lim_{t\to-\infty}} \|z_k(t) - \alpha_k x_1\|_{l_1} + \overline{\lim_{t\to-\infty}} \|\alpha_k x_1 - \alpha x_1\|_{l_1} \leq \|z - z_k\|_{C^0} + \|(\alpha_k - \alpha) x_1\|_{l_1}.$$

Оскільки ці співвідношення виконуються для всіх $k \geq 1$, то на підставі (23) і (25) виконується співвідношення (22).

Розглянемо підпростір $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_0 \oplus \overline{\operatorname{span}(Y)}$ простору C^0. Зазначимо, що кожний елемент $x \in \mathfrak{X}$ єдиним чином зображується у вигляді $x = u + v$, де $u \in \mathfrak{S}_0$ і $v \in \overline{\operatorname{span}(Y)}$. Дійсно, якщо існують два такі зображення

$$x = u_1 + v_1, \quad x = u_2 + v_2 \quad (u_1, u_2 \in \mathfrak{S}_0,\ v_1, v_2 \in \overline{\operatorname{span}(Y)}),$$

то $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ і, отже, при $u_1 = u_2$ отримуємо $v_1 = v_2$, а при $u_1 \neq u_2$ буде $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$, що суперечить тому, що $u_1 - u_2 \in \mathfrak{S}_0$, оскільки $v_2 - v_1 \in \overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \{0\}$ і $\mathfrak{S}_0 \cap \left(\overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \{0\}\right) = \varnothing$.

Також розглянемо підпростір $\mathcal{Y} = \{kx_1 : k \in \mathbb{K}\}$ простору l_1. Використаємо лінійний неперервний функціонал $\psi : \mathcal{Y} \to \mathbb{K}$, що визначається рівністю

$$\psi(kx_1) = k.$$

Очевидно, що $\|\psi\| = 1$.

Далі розглянемо лінійний функціонал $\varphi\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$, для якого $\|\varphi\| = 1$ і який кожному елементу $x = u + v$ $(u \in \mathfrak{S}_0,\ v \in \overline{\operatorname{span}(Y)})$ ставить у відповідність число

$$\varphi(x) = \varphi(u) + \varphi(v),$$

де

$$\varphi(u) = 0$$

і

$$\varphi(v) = \psi\left(\lim_{t\to-\infty} v(t)\right).$$

На підставі теореми Сухомлінова про продовження лінійного неперервного функціонала в комплексному просторі [9] існує лінійний неперервний функціонал $l\colon C^0 \to \mathbb{K}$, для якого $l(x) = \varphi(x)$ для всіх $x \in \mathfrak{X}$ і $\|l\| = \|\varphi\|$.

Тепер перейдемо до побудови оператора L_1. Визначимо лінійний неперервний оператор C : $C^0 \to C^0$ за допомогою формули

$$Cx = l(x)y, \quad x \in C^0. \tag{26}$$

Покажемо, що цей оператор майже періодичний у сенсі означення 4 і не є майже періодичним у сенсі означення 2.

На підставі (26)

$$S_hCS_{-h}x = l(S_{-h}x)S_hy, \quad h \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

для всіх $x \in C^0$ і

$$l(S_{-h}x) = 0, \quad h \in \mathbb{R},$$

для всіх $x \in \mathfrak{S}_0$. Тому для кожної компактної множини $K \subset E$ замикання множини $\{S_hCS_{-h}x : h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{D}_K\}$ у просторі C^0 компактне в C^0, оскільки ця множина збігається з $\{0\}$. Отже, оператор C є майже періодичним у сенсі означення 4. Однак замикання множини $\{S_hCS_{-h} : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі $L(C^0, C^0)$ не є компактним в $L(C^0, C^0)$. Справді, завдяки (26) і (27) для елемента y, що визначається за допомогою (16), виконується співвідношення

$$S_hCS_{-h}y = S_hy, \quad h \in \mathbb{R},$$

і тому

$$\{S_hCS_{-h}\colon h \in \mathbb{R}\}y = \{S_hy\colon h \in \mathbb{R}\}. \tag{28}$$

Якщо оператор C майже періодичний у сенсі означення 2, тобто множина $\{S_hCS_{-h}\colon h \in \mathbb{R}\}$ передкомпактна у просторі $L(C^0, C^0)$, то також передкомпактною в C^0 є множина $\{S_hCS_{-h} : h \in \mathbb{R}\}y$. На підставі рівності (28) передкомпактною в просторі C^0 має бути і множина $\{S_hy : h \in \mathbb{R}\}$. Однак множина $\{S_hy\colon h \in \mathbb{R}\}$ не наділена такою властивістю, оскільки елемент y не є майже періодичним.

Оператор $L_1 : C^0 \to C^0$ визначимо за допомогою формули

$$L_1x = Ix - Cx, \quad x \in C^0,$$

де $I\colon C^0 \to C^0$ — одиничний оператор. Оператор I є автономним і, отже, майже періодичним у сенсі означення 2. Оскільки оператор $C\colon C^0 \to C^0$ майже періодичний у сенсі означення 4 і не є майже періодичним у сенсі означення 2, то аналогічну властивість має й оператор L_1.

Оскільки $L_1 x = Ix$ для всіх $x \in \mathfrak{S}_0$, то для L_1 виконується співвідношення (13) при $n = 0$. Із співвідношень $Cy = y$ і $L_1 y = Iy - Cy = y - y = 0$ отримуємо, що $\ker L_1 \neq \{0\}$.

Отже, побудову оператора L_1 з потрібними властивостями завершено.

5.4. Оператор $\boldsymbol{L_2}$. Розглянемо лінійний неперервний оператор $L_2\colon C^1 \to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(L_2 x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко перевірити, що:

1) оператор L_2 має неперервний обернений

$$\left(L_2^{-1} z\right)(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^s z(t+s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R};$$

2) оператори L_2 і L_2^{-1} автономні і, отже, майже періодичні в сенсі означення 2;

3) $L_2 x \in \mathfrak{S}_0$ для всіх $x \in \mathfrak{S}_1$;

4) $L_2^{-1} z \in \mathfrak{S}_1$ для всіх $z \in \mathfrak{S}_0$.

5.5. Оператор $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Визначимо оператор $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$ за допомогою рівності

$$\mathcal{L} x = L_1 L_2 x,$$

де $x \in C^1$. Очевидно, що для всіх $x \in \mathfrak{S}_1$

$$\mathcal{L} x = L_2 x. \tag{29}$$

Тому на підставі властивостей оператора L_2 оператор $\mathcal{L}$ є майже періодичним у сенсі означення 4 при $n = 1$ і $m = 0$. Однак оператор $\mathcal{L}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2 при тих самих n і m, оскільки замикання множини $\{S_h \mathcal{L} S_{-h} \colon h \in \mathbb{R}\}$ в $L(C^1, C^0)$ не є компактним в $L(C^1, C^0)$. Щоб переконатися в цьому, достатньо показати, що не компактним в C^0 є замикання множини $\{S_h \mathcal{L} S_{-h} u^* \colon h \in \mathbb{R}\}$ в C^0, де $u^* = L_2^{-1} y$ і y — елемент простору C^0, визначений рівністю (16). Оскільки завдяки рівності $\mathcal{L} = L_1 L_2$ та автономності оператора L_2

$$\begin{gathered}
\{S_h \mathcal{L} S_{-h} u^* \colon h \in \mathbb{R}\} = \{S_h L_1 L_2 S_{-h} u^* \colon h \in \mathbb{R}\} = \\
= \{S_h L_1 S_{-h} S_h L_2 S_{-h} u^* \colon h \in \mathbb{R}\} = \{S_h L_1 S_{-h} L_2 u^* \colon h \in \mathbb{R}\} = \\
= \{S_h L_1 S_{-h} y \colon h \in \mathbb{R}\} = \{S_h (I - C) S_{-h} y \colon h \in \mathbb{R}\} = \\
= \{(I - S_h C S_{-h}) y \colon h \in \mathbb{R}\} = \{y - S_h C S_{-h} y \colon h \in \mathbb{R}\}
\end{gathered}$$

і замикання множини $\{S_h C S_{-h} y \colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^0 не є компактним у цьому просторі, що показано в пп. 5.3, то і замикання множини $\{S_h \mathcal{L} S_{-h} u^* \colon h \in \mathbb{R}\}$ в C^0 не є компактним в C^0. Отже, оператор $\mathcal{L}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2 при $n = 1$ і $m = 0$.

Із (29) (з урахуванням оборотності оператора L_2) також випливає, що для оператора $\mathcal{L}$ виконується співвідношення (13) при $n = 1$.

Також для $\mathcal{L}$ виконується співвідношення $\ker\,\mathcal{L} \neq \{0\}$. Дійсно, для ненульового елемента $u^* = L_2^{-1}y$ простору C^1
$$\mathcal{L}u^* = L_1 L_2 u^* = L_1 y = 0,$$
тобто $u^* \in \ker\,\mathcal{L}$.

Таким чином, побудову оператора $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$ з потрібними властивостями завершено.

6. Умови існування обмежених розв'язків рівняння (2). При дослідженні рівняння (2) важливою є вимога, щоб для функції $y \in B^0$ множина обмежених розв'язків цього рівняння не була порожньою.

Розглянемо один випадок, коли ця вимога виконується.

Наведемо умови, коли для множини $R(\mathfrak{F})$ значень оператора $\mathfrak{F}\colon C^n \to C^0$ справджується рівність
$$R(\mathfrak{F}) = C^0. \tag{30}$$

Позначимо через $\mathcal{E}(C^n, C^0)$ множину всіх операторів $\mathcal{A} \in L(C^n, C^0)$, кожний з яких має неперервний обернений $\mathcal{A}^{-1}$.

Якщо $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(C^n, C^0)$, то рівняння (2) рівносильне рівнянню
$$x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x - \mathfrak{F}x + y).$$

Припустимо, що для кожного числа $H \geq 0$ існують такі число $r_H > 0$ і оператор $\mathcal{A}_H \in \mathcal{E}(C^n, C^0)$, що
$$\sup_{\|x\|_{C^n} \leq r_H} \|\mathfrak{F}x - \mathcal{A}_H x\|_{C^0} \leq \frac{r_H}{\|\mathcal{A}_H^{-1}\|_{L(C^0, C^n)}} - H.$$
Легко переконатися, що тоді куля $B_{C^n}[0, r_H] = \{x\colon \|x\|_{C^n} \leq r_H\}$ для кожної функції $y \in B_{C^0}[0, H]$ є інваріантною по відношенню до оператора
$$\mathcal{G}_H x = \mathcal{A}_H^{-1}(\mathcal{A}_H x - \mathfrak{F}x + y).$$
Отже, задача про існування обмеженого розв'язку рівняння (2), якщо $\|y\|_{C^0} \leq H$, зводиться до задачі про існування нерухомої точки оператора $\mathcal{G}_H : B_{C^n}[0, r_H] \to B_{C^n}[0, r_H]$.

Якщо для кожних числа $H \geq 0$ і функції $y \in B_{C^0}[0, H]$ множина нерухомих точок оператора $\mathcal{G}_H$ не є порожньою множиною, то буде виконуватися співвідношення (30). Ця умова реалізується, якщо, наприклад, $\dim E < \infty$ і оператор $\mathfrak{F}\colon C^n \to C^0$ є оператором вигляду
$$(\mathfrak{F}x)(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + (Fx)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
де $F\colon C^n \to C^0$ — c-цілком неперервний оператор (див. [10]). У цьому випадку в якості множини $\mathcal{E}(C^n, C^0)$ потрібно використовувати множину всіх оборотних операторів вигляду
$$(\mathcal{A}x)(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + (Ax)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
де $A\colon C^n \to C^0$ — лінійний c-цілком неперервний оператор.

Зазначимо, що у випадку $\dim E < \infty$ умови оборотності лінійних функціонально-диференціальних операторів можна знайти в [11 – 13].

7. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Функціонали, аналогічні δ, використовувались автором у [5, 14 – 26] при дослідженні майже періодичних різницевих, дискретних, функціональних та диференціальних рівнянь, а також диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

Твердження про майже періодичні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь (2) і (11) (у пп. 3 і 4) є новими. На відміну від теорем Амеріо [3, 7] і Фавара [3, 27] у теоремах 1 – 3 не використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь (2) і (11). Також у теоремі 1 не використовуються умова відокремлення розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу рівняння (2).

Наведений у п. 5 приклад лінійного неперервного необоротного майже періодичного в сенсі означення 4, що не є майже періодичним у сенсі означення 2, диференціального оператора, до якого застосовна теорема 3, також є новим.

Дослідженню майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші результати про майже періодичні розв'язки отримано Фаваром у роботі [27], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [7]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь, а в [7] також використовується відокремленість обмежених розв'язків рівнянь. Вагомий додаток до теорії Фавара зроблено Е. Мухамадієвим [4]. Узагальнення теорем Мухамадієва наведено в [11, 12]. Важливі результати з теорії майже періодичних рівнянь також належать Б. М. Левітану [2], Амеріо [28] та В. В. Жикову [29].

Література

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119 – 147. II Teil. – P. 383 – 409.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407 – 418.
6. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
7. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
8. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
9. *Сухомлинов Г. А.* О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве // Мат. сб. – 1938. – **3**. – С. 353 – 358.
10. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 5. – С. 135 – 160.
11. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
12. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.
13. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 118 – 124.
15. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.

16. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.
17. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків, не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384 – 393.
18. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211 – 215.
19. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139 – 160.
20. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277 – 285.
21. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 112–119.
22. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних рівнянь, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 230 – 244.
23. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 838 – 848.
24. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та стійкі за Пуассоном розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1707 – 1714.
25. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 142 – 148.
26. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125 – 138.
27. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31 – 81.
28. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288 – 301.
29. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.

Одержано 19.10.16