УДК 519.21

В. В. Фомичев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕНСИВНОСТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ УРОВНЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ОБРАЗА МЕРЫ ЛЕБЕГА ПОД ДЕЙСТВИЕМ БРОУНОВСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА

We compute the level-crossing intensity for the density of the image of the Lebesgue measure under the action of a Brownian stochastic flow, which is a smooth approximation of the Arratia flow, and determine its asymptotic behavior as the height of the level tends to infinity.

Обчислено інтенсивність перетинів рівня для щільності образу міри Лебега під дією броунівського стохастичного потоку, що є гладким наближенням потоку Арратья, та визначено її асимптотичну поведінку при прямуванні висоти рівня до нескінченності.

1. Введение. Рассмотрим стохастическое интегральное уравнение

$$x(u,t) = u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x(u,s)-q)\, W(dq,ds), \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $u \in \mathbb{R}$ — фиксированный параметр, W — винеровский лист на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, а функция $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

i) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, т. е. φ неотрицательна, бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель;

ii) $\varphi(q) = \varphi(-q),\ q \in \mathbb{R}$;

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(q)\, dq = 1$.

При таких условиях на функцию φ уравнение (1) имеет единственное сильное решение для каждого $u \in \mathbb{R}$. При этом для некоторого множества Ω полной вероятности (не ограничивая общности, будем считать, что это есть все множество элементарных событий) отображения

$$x(\omega,\cdot,t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad t\ge 0, \quad \omega\in\Omega, \tag{2}$$

являются C^∞-диффеоморфизмами и стохастический поток $\{\varphi_{s,t}(u), u\in\mathbb{R}, 0\le s\le t<+\infty\}$, задаваемый равенством

$$\varphi_{s,t}(\omega,u) := x(\omega, x^{-1}(\omega,u,s),t), \quad u\in\mathbb{R}, \qquad 0\le s\le t<+\infty, \quad \omega\in\Omega, \tag{3}$$

где $x^{-1}(\omega,\cdot,s)$ — отображение, обратное к отображению $x(\omega,\cdot,s)$ (в дальнейшем переменную ω будем, как правило, опускать), является броуновским стохастическим потоком C^∞-диффеоморфизмов (см. [1, 8], а также [11]).

Ковариационной функцией данного броуновского стохастического потока является функция

$$\Phi(z) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(z+q)\varphi(q)\, dq, \quad z\in\mathbb{R}.$$

Другими словами, для любых $u,v\in\mathbb{R}$ совместная квадратическая характеристика винеровских процессов $\{x(u,t), t\ge 0\}$ и $\{x(v,t), t\ge 0\}$ имеет вид

$$\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \Phi(x(u,s) - x(v,s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что функция Φ принимает значение 1 в точке 0 и имеет компактный носитель, диаметр которого не превышает $2d(\varphi)$, где $d(\varphi)$ — диаметр носителя функции φ. Поэтому при стремлении $d(\varphi)$ к нулю функция Φ поточечно сходится к функции

$$\mathbb{I}_{\{0\}}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z = 0, \\ 0, & \text{если} \quad z \neq 0. \end{cases}$$

В работе [8] было показано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ в пространстве $C\big([0;1], \mathbb{R}^n\big)$ имеет место слабая сходимость

$$\big(x(u_1,\cdot), \ldots, x(u_n,\cdot)\big) \xrightarrow{w} \big(x_0(u_1,\cdot), \ldots, x_0(u_n,\cdot)\big), \quad d(\varphi) \to 0+,$$

где $\{x_0(u,t), u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ — поток Арратья, т. е. броуновский стохастический поток с ковариационной функцией $\mathbb{I}_{\{0\}}$.

Напомним, что поток Арратья был построен в работе [5] как слабый предел семейств склеивающихся простых случайных блужданий и неформально его можно описать как поток броуновских частиц, в котором любые две частицы движутся независимо до момента встречи, а встретившись, склеиваются и дальше движутся вместе. Кроме того, известно (см. [5, 9]), что для любого $t > 0$ и для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}$ множество $x_0(\mathbb{R}, t) \cap I$ конечно почти наверное.

Рассмотрим случайные меры

$$\lambda_t := \lambda \circ x^{-1}(\cdot, t), \quad t \geq 0,$$

где λ — одномерная мера Лебега. В силу диффеоморфности отображений (2) эти меры являются абсолютно непрерывными. При этом легко проверить, что для соответствующих плотностей имеет место представление $\Big($строгая положительность производной $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)$ следует из приводимой ниже леммы 3.1$\Big)$

$$\frac{d\lambda_t}{d\lambda}(u) \equiv p_t(u) = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\big(x^{-1}(u,t), t\big)}, \qquad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Если мы положим

$$\lambda_t^0 := \lambda \circ x_0^{-1}(\cdot, t), \quad t \geq 0,$$

то естественно ожидать, что при $d(\varphi) \to 0+$ случайные меры λ_t в каком-либо смысле сходятся к случайным мерам λ_t^0. Поэтому области концентрации мер λ_t или, другими словами, области, в которых плотности p_t принимают большие значения, соответствуют атомам мер λ_t^0, которыми, очевидно, являются кластеры в потоке Арратья.

Изучение таких выбросов плотностей p_t за высокие уровни целесообразно начинать с исследования их интенсивностей пересечений этих уровней. Напомним соответствующее определение.

Пусть $\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\}$ — случайный процесс, траектории которого с вероятностью единица непрерывны и не равны тождественно данному фиксированному числу $c \in \mathbb{R}$ ни на каком интервале. Тогда число $N([0;1];c)$ пересечений случайным процессом ξ уровня c на отрезке $[0;1]$ корректно определено и величина

$$\mu(c) := \mathbf{E}N\big([0;1];c\big)$$

называется интенсивностью пересечений случайным процессом ξ уровня c.

Для некоторых классов случайных процессов $\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\}$ значение $\mu(c)$ может быть вычислено по известной формуле Райса (см. обзорную работу [13], в которой рассматриваются пересечения уровня снизу вверх, и ссылки в ней). В качестве примера приведем теорему, попутно отметив, что в ней и всюду в дальнейшем $\pi[\eta](\cdot)$ и $\pi[\eta,\zeta](\cdot,\cdot)$ обозначают соответственно плотность распределения случайной величины η и плотность совместного распределения случайных величин η и ζ.

Теорема 1.1 [6]. *Пусть случайный процесс $\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\}$ имеет непрерывно дифференцируемые траектории и удовлетворяет следующим условиям*:

(i) *отображение $(u,z) \mapsto \pi[\xi(u)](z)$ непрерывно при $u \in [0;1]$ и $z \in U_c$, где U_c — некоторая окрестность точки $c \in \mathbb{R}$*;

(ii) *отображение $(u,z_1,z_2) \mapsto \pi[\xi(u),\xi'(u)](z_1,z_2)$ непрерывно при $u \in [0;1]$, $z_1 \in U_c$ и $z_2 \in \mathbb{R}$*;

(iii) *$\mathbf{E}w(\xi';\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$, где $w(\xi';\delta)$ — модуль непрерывности случайного процесса ξ' на отрезке $[0;1]$.*

Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mu(c) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{+\infty} |z|\,\pi\big[\xi(u),\xi'(u)\big](c,z)\,dz\,du. \tag{4}$$

Однако зачастую условия на случайный процесс, обеспечивающие справедливость формулы (4) для *всех* уровней $c \in \mathbb{R}$, труднопроверяемы (например, в приведенной теореме таковым является условие (iii)), и их выполнение доказано лишь для случайных процессов, близких к гауссовским. Легче проверяются условия, обеспечивающие справедливость подобных формул для *почти всех* уровней $c \in \mathbb{R}$.

В данной работе мы используем следующий вариант формулы Райса (см. [6], упражнение 3.8; ср. с [13], формула (3)), называемый также формулой Банаха.

Теорема 1.2 [6]. *Пусть случайный процесс $\{\xi(u), 0 \le u \le 1\}$ таков, что почти все его траектории абсолютно непрерывны, а также для любого $u \in [0;1]$ распределение случайной величины $\xi(u)$ имеет плотность $\pi[\xi(u)](\cdot)$ и условное математическое ожидание $\mathbf{E}\big(|\xi'(u)| \mid \xi(u) = c\big)$ корректно определено. Тогда для почти всех $c \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\mu(c) = \int\limits_0^1 \mathbf{E}\big(|\xi'(u)| \mid \xi(u) = c\big)\pi[\xi(u)](c)\,du.$$

Основной целью настоящей работы является проверка корректной определенности интенсивности $\mu_t(c)$ пересечений уровня $c > 0$ случайным процессом $\{p_t(u), u \in \mathbb{R}\}$ для любого $t > 0$ и доказательство соотношения

$$\mu_t(c) = \overline{\mu}_t(c) \quad \text{для почти всех} \quad c > 0, \tag{5}$$

где

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{\sqrt{2L''}e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi L'\sqrt{\pi t}} \frac{1}{\sqrt{c}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \dfrac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1 + \dfrac{2 \operatorname{ch} v}{c} + \dfrac{1}{c^2}}} \, dv$$

с постоянными

$$L' := \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'^2(q) \, dq > 0$$

и

$$L'' := \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi''^2(q) \, dq > 0,$$

а также установление асимптотического равенства

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L''}}{\pi\sqrt{2L'}} \sqrt{\frac{c}{\ln c}} \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right](1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty. \tag{6}$$

Коротко опишем структуру основной части данной работы. В пункте 2 доказана стационарность случайного процесса $\{x(u,t) - u, u \in \mathbb{R}\}$ и θ-однородность (см. определение 2.2) случайного процесса $\{(p_t(u), p_t'(u)), u \in \mathbb{R}\}$ (производная здесь понимается в обычном смысле), в пункте 3 найдена плотность совместного распределения случайных величин $p_t(u)$ и $p_t'(u)$, а в пункте 4 установлены соотношения (5), (6).

2. Стационарность и θ-однородность. Для доказательства стационарности при фиксированном t случайного процесса $\{x(u,t) - u, u \in \mathbb{R}\}$ воспользуемся вариантом дискретной схемы приближений Эйлера–Маруямы, используемой в работе [14]. Для $t > 0$ и $n \geq 1$ положим

$$x_0^n(u,t) \equiv u, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$x_{k+1}^n(u,t) := x_k^n(u,t) + \xi_{k+1}^n(x_k^n(u,t), t), \qquad u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

где

$$\xi_{k+1}^n(u,t) := \int\limits_{\frac{kt}{n}}^{\frac{(k+1)t}{n}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(u-q) \, W(dq, ds), \qquad u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Согласно теореме 4 из работы [14], определенный таким рекуррентным способом случайный процесс $\{x_n^n(u,1), u \in \mathbb{R}\}$ приближает случайный процесс $\{x(u,1), u \in \mathbb{R}\}$ в равномерной метрике на отрезке $[0;1]$. Однако приведенное доказательство этой теоремы легко переносится mutatis mutandis на случай произвольных момента времени $t > 0$ и отрезка $[a;b]$, и поэтому ее соответствующее обобщение можно сформулировать в следующем (немного упрощенном, но достаточном для наших целей) виде.

Теорема 2.1. *Для любого $t > 0$ и отрезка $[a;b] \subset \mathbb{R}$ существует такая константа $C > 0$, зависящая от момента времени t, длины отрезка $[a;b]$ и функции φ, что для всех $n \geq 1$*

$$\mathbf{E}\|x_n^n(\cdot,t) - x(\cdot,t)\|_{[a;b]} \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

где $\|\cdot\|_{[a;b]}$ — супремум-норма на отрезке $[a;b]$.

Теорема 2.2. *При каждом $t \geq 0$ случайный процесс $\{x(u,t) - u, u \in \mathbb{R}\}$ является стационарным (в узком смысле).*

Доказательство. Зафиксируем произвольный момент времени $t > 0$ (в случае $t = 0$ доказывать нечего).

Методом математической индукции, используя характеристические функции и учитывая независимость ξ_{k+1}^n от $\mathcal{F}_{\frac{kt}{n}}$ при любом $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, где $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ — фильтрация, порождаемая винеровским листом W (и пополненная множествами нулевой вероятности), можно показать, что все случайные процессы $\{x_k^n(u,t) - u, u \in \mathbb{R}\}$, $0 \leq k \leq n$, стационарны.

Для доказательства стационарности случайного процесса $\{x(u,t) - u, u \in \mathbb{R}\}$ заметим, что из теоремы 2.1 вытекает, что для любых $u_1,\ldots,u_m \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{E}\max_{1\leq k\leq m}|x_n^n(u_k,t) - x(u_k,t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

и, следовательно,

$$(x_n^n(u_1,t) - u_1,\ldots,x_n^n(u_m,t) - u_m) \xrightarrow{w}$$

$$\xrightarrow{w} (x(u_1,t) - u_1,\ldots,x(u_m,t) - u_m), \quad n \to \infty.$$

Поэтому для произвольного $h > 0$ и любых борелевских множеств $\Delta_1,\ldots,\Delta_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{[x(u_1+h,t) - (u_1+h)] \in \Delta_1,\ldots,[x(u_m+h,t) - (u_m+h)] \in \Delta_m\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{[x_n^n(u_1+h,t) - (u_1+h)] \in \Delta_1,\ldots,[x_n^n(u_m+h,t) - (u_m+h)] \in \Delta_m\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{[x_n^n(u_1,t) - u_1] \in \Delta_1,\ldots,[x_n^n(u_m,t) - u_m] \in \Delta_m\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{[x(u_1,t) - u_1] \in \Delta_1,\ldots,[x(u_m,t) - u_m] \in \Delta_m\right\}.$$

Значит, распределения случайных векторов

$$(x(u_1+h,t) - (u_1+h),\ldots,x(u_m+h,t) - (u_m+h))$$

и

$$(x(u_1,t) - u_1,\ldots,x(u_m,t) - u_m)$$

совпадают.

Теорема 2.2 доказана.

***Следствие* 2.1.** *Для любого $t \geq 0$ трехмерный случайный процесс*

$$\left\{\left(x(u,t) - u, \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)\right), u \in \mathbb{R}\right\}$$

является стационарным.

Теперь нам понадобятся несколько определений (см. [15], глава 5).

Определение 2.1. *Семейство отображений* $\{\theta_z : \Omega \to \Omega, z \in \mathbb{R}\}$ *называется семейством* (*пространственных*) *сдвигов*, *если*

(i) *отображение* $\mathbb{R} \times \Omega \ni (z, \omega) \mapsto \theta_z(\omega) \in \Omega$ *измеримо*;

(ii) $\theta_y \circ \theta_z = \theta_{y+z}$ *для любых* $y, z \in \mathbb{R}$;

(iii) θ_0 — *тождественное отображение*;

(iv) $\mathbf{P} \circ \theta_z^{-1} = \mathbf{P}$ *для любого* $z \in \mathbb{R}$.

Определение 2.2. *Случайный процесс* $\{\xi(u), u \in \mathbb{R}\}$ *называется* θ*-однородным случайным процессом*, *если*

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u, z \in \mathbb{R}\colon \quad \xi(\theta_z \omega, u) = \xi(\omega, u + z).$$

Определение 2.3. *Отображение* $G\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется* θ*-однородным случайным преобразованием*, *если*

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u, z \in \mathbb{R}\colon \quad G(\theta_z \omega, u) = G(\omega, u + z) - z.$$

Определение 2.4. *Отображение* $A\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to E$, *принимающее значения в некотором измеримом пространстве* $(E, \mathcal{E})$, *называется* θ*-однородным случайным полем*, *если оно измеримо по совокупности переменных и*

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u, z \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \geq 0\colon \quad A(\theta_z \omega, u, t) = A(\omega, u + z, t).$$

Определение 2.5. *Стохастический поток* $\{\varphi_{s,t}(u), u \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t < \infty\}$ *называется* θ*-однородным стохастическим потоком*, *если*

$$\forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \quad \forall\, s, t \geq 0, s \leq t\colon \quad \varphi_{s,t}(\theta_z \omega, u) = \varphi_{s,t}(\omega, u + z) - z.$$

Лемма 2.1. *Для любого* $t \geq 0$ *случайные процессы*

$$\left\{\left(x(u,t) - u, \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)\right), u \in \mathbb{R}\right\}$$

и

$$\big\{(p_t(u), p_t'(u)), u \in \mathbb{R}\big\}$$

являются θ*-однородными.*

Доказательство. Достаточно заметить, что каноническое представление случайного процесса

$$\left\{\left(x(u,t) - u, \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)\right), u \in \mathbb{R}\right\}$$

на пространстве

$$\Omega = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \;\big|\; \omega_1 \in C^2(\mathbb{R}),\, \omega_1' > -1,\, \omega_2 = \omega_1' + 1,\, \omega_3 = \omega_1''\big\}$$

с борелевской σ-алгеброй, порождаемой расстоянием, метризующим равномерную сходимость на компактах, является θ-однородным относительно стандартных пространственных сдвигов (для этих сдвигов выполнение условий (ii) и (iii) определения 2.1 очевидно, выполнение условия (i) вытекает из их непрерывности по совокупности переменных, а выполнение условия (iv) — из следствия 2.1). После этого непосредственно проверяется θ-однородность сначала случайного процесса $\{x^{-1}(u,t) - u, u \in \mathbb{R}\}$, а затем и случайного процесса $\{(p_t(u), p_t'(u)), u \in \in \mathbb{R}\}$.

Результаты третьего пункта данной работы существенно опираются на следующую теорему.

Теорема 2.3 ([15], глава 5, теорема 4.11). *Пусть* $\{\varphi_{s,t} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t < +\infty\}$ — θ-*однородный стохастический поток* C^1-*диффеоморфизмов,* $A \colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to E$ — θ-*однородное случайное поле, принимающее значения в некотором измеримом пространстве* $(E, \mathcal{E})$. *Тогда для любых* $s, t \geq 0,\ s \leq t$, *справедливы следующие утверждения*:

(i) *случайное преобразование* $\varphi_{s,t}^{-1}(\cdot)$ *является* θ-*однородным диффеоморфизмом*;

(ii) *случайный процесс* $\dfrac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial u}(\cdot)$ *является* θ-*однородным*;

(iii) *случайный процесс* $\dfrac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial u}(\varphi_{s,t}^{-1}(\cdot))$ *является* θ-*однородным*;

(iv) *для любой* $\mathcal{E}$-*измеримой функции* $f \colon E \to \mathbb{R}_+$ *и любого* $u \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{E} f(A(\varphi_{s,t}(u), t)) = \mathbf{E} \left[f(A(0,t)) \, \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial u}(\varphi_{s,t}^{-1}(0))} \right],$$

если только математическое ожидание в правой части определено и конечно.

3. Плотность совместного распределения случайных величин $p_t(u)$ и $p'_t(u)$. В этом пункте мы покажем, что совместное распределение случайных величин $p_t(u)$ и $p'_t(u)$ имеет плотность, и найдем ее вид.

Для начала докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Имеет место представление*

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) = \exp\left[-\frac{1}{2} L' t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q) \, W(dq, ds) \right], \qquad t \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

причем для любого $u \in \mathbb{R}$ *случайный процесс*

$$w_u(t) := \frac{1}{\sqrt{L'}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q) \, W(dq, ds), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

является стандартным винеровским процессом.

Доказательство. Из свойств интеграла по винеровскому листу следует, что случайный процесс $\{w_u(t), t \geq 0\}$, определяемый равенством (8), является непрерывным $(\mathcal{F}_t)$-согласованным мартингалом с квадратической характеристикой

$$\langle w_u \rangle_t = \frac{1}{L'} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'^2(x(u,s) - q) \, dq \, ds = t, \quad t \geq 0,$$

а значит, по теореме Леви о характеризации броуновского движения, — стандартным винеровским процессом.

Далее, дифференцирование обеих частей уравнения для $x(u,t)$ (см. [11], теорема 3.3.3) приводит к равенству

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q) \frac{\partial x}{\partial u}(u,s) \, W(dq, ds), \quad t \geq 0. \tag{9}$$

С помощью формулы Ито легко показать, что случайный процесс, определяемый правой частью равенства (7), удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (9) $\Big($относительно неизвестного случайного процесса $\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t), t \geq 0\right\}\Big)$. Поэтому равенство (7) следует из единственности сильного решения этого уравнения.

***Следствие* 3.1.** *Для любых $t > 0$ и $u \in \mathbb{R}$ распределение случайной величины $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)$ имеет плотность вида*

$$\pi\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)\right](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L' t}} \exp\left[-\frac{\left(\ln z + \dfrac{3}{2}L't\right)^2}{2L't} + L't\right], \quad z > 0.$$

Теорема 3.1. *Для любых $t > 0$ и $u \in \mathbb{R}$ распределение случайной величины $p_t(u)$ имеет плотность вида*

$$\pi[p_t(u)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L' t}} \exp\left[-\frac{\left(\ln z + \dfrac{3}{2}L't\right)^2}{2L't} + L't\right], \quad z > 0. \tag{10}$$

Доказательство. Положим

$$E := (0; +\infty),$$

$$\mathcal{E} := \mathcal{B}((0; +\infty))$$

и для фиксированного $t_0 > 0$

$$A(u,t) := p_{t_0}(u), \qquad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что отображение $(\omega, u, t) \mapsto A(\omega, u, t)$ сейчас измеримо по совокупности переменных, поскольку таковым является отображение $(\omega, u, t) \mapsto x(\omega, u, t)$.

Поэтому для стохастического потока (3) и функции

$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\{z \in \Delta\}, \quad z \in E,$$

где множество $\Delta \in \mathcal{E}$ произвольно, при $s = 0$ и $t = t_0$ согласно теореме 2.3 имеем (чтобы не загромождать запись, до конца доказательства будем писать t вместо t_0)

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{p_t(x(u,t))} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{p_t(x(u,t)) \in \Delta\right\}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{p_t(0)} \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{p_t(0) \in \Delta\right\} p_t(0)\right],$$

т. е.

$$\mathbf{P}\left\{p_t(0) \in \Delta\right\} = \mathbf{E}\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t) \cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)} \in \Delta\right\}\right]. \tag{11}$$

Однако, из следствия 3.1 вытекает

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)\cdot \mathbb{I}\left\{\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)}\in\Delta\right\}\right]=$$

$$=\int\limits_{\Delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi L't}}\exp\left[-\frac{\left(\ln z+\dfrac{3}{2}L't\right)^2}{2L't}+L't\right]dz. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12), в силу произвольности множества Δ, приводят к требуемому утверждению.

Теорема 3.1 доказана.

***Замечание* 3.1.** Таким образом, для любых $t>0$ и $u\in\mathbb{R}$ справедливо равенство по распределению

$$p_t(u)\overset{d}{=}\frac{\partial x}{\partial u}(u,t).$$

***Следствие* 3.2.** *Для любых $t>0$ и $u\in\mathbb{R}$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{p_t(u)>c\right\}=\frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L't}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{c}\ln c}\exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right](1+\overline{o}(1)),\quad c\to+\infty.$$

Доказательство. Достаточно записать левую часть в виде интеграла от плотности распределения случайной величины $p_t(u)$ из формулы (10), затем с помощью замены переменной свести его к интегралу от плотности $\mathfrak{p}$ стандартного гауссовского распределения и, наконец, воспользоваться известным (см., например, [3], глава 1) соотношением

$$\int\limits_c^{+\infty}\mathfrak{p}(u)\,du=\frac{1}{c}\mathfrak{p}(c)(1+\overline{o}(1)),\quad c\to+\infty.$$

Для доказательства следующего результата нам понадобится вспомогательная лемма о вычислении условного математического ожидания от стохастического интеграла Ито по винеровскому процессу.

Лемма 3.2. *Пусть непрерывный случайный процесс $\{\xi_t,t\geq 0\}$ не зависит от винеровского процесса $\{\beta_t,t\geq 0\}$ и стохастический интеграл Ито*

$$\int\limits_0^t\xi_s\,d\beta_s,\quad t\geq 0,$$

корректно определен. Тогда для любого борелевского множества $\Delta\subset\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}\left(\mathbb{I}\left\{\int\limits_0^t\xi_s\,d\beta_s\in\Delta\right\}\middle|\,\xi\right)=$$

$$=\int\limits_{\Delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_t^2}}\,dv\cdot\mathbb{I}\left\{\sigma_t>0\right\}+\mathbb{I}\left\{0\in\Delta\right\}\cdot\mathbb{I}\left\{\sigma_t=0\right\},$$

где

$$\sigma_t := \left(\int_0^t \xi_s^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Доказательство проводится стандартно путем приближения индикаторных функций гладкими ограниченными функциями и поэтому опускается.

Зафиксируем теперь произвольное $u \in \mathbb{R}$ и определим случайные процессы

$$X_1(t) := \frac{\partial x}{\partial u}(u,t), \quad t \ge 0,$$

$$X_2(t) := \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)}{\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)}, \quad t \ge 0.$$

Лемма 3.3. *Для любого $t > 0$ совместное распределение случайных величин $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеет плотность вида*

$$\pi\big[X_1(t), X_2(t)\big](z_1, z_2) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L'' t}} \frac{1}{\sqrt{z_1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}} \operatorname{sh} v \sin \dfrac{\pi v}{L't}}{\left((1 + 2z_1 \operatorname{ch} v + z_1^2) + \dfrac{L'}{L''} z_2^2 \right)^{3/2}} \, dv, \qquad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Заметим, что из представления (7) следует равенство

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi''(x(u,s) - q) \frac{\partial x}{\partial u}(u,s) \, W(dq, ds), \quad t \ge 0. \tag{13}$$

Из (9) и (13) получаем

$$X_1(t) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s) - q) X_1(s) \, W(dq, ds), \quad t \ge 0,$$

$$X_2(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi''(x(u,s) - q) X_1(s) \, W(dq, ds), \quad t \ge 0.$$

В силу свойств интеграла по винеровскому листу имеем

$$\langle X_1 \rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'^2(x(u,s) - q) X_1^2(s) \, dq \, ds = L' \int_0^t X_1^2(s) \, ds, \quad t \ge 0,$$

$$\langle X_2 \rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi''^2(x(u,s) - q) X_1^2(s) \, dq \, ds = L'' \int_0^t X_1^2(s) \, ds, \quad t \ge 0,$$

$$\langle X_1, X_2\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x(u,s)-q)\varphi''(x(u,s)-q)X_1^2(s)\,dq\,ds = 0, \quad t \geq 0.$$

Поскольку с вероятностью единица $X_1(t) > 0$ для всех $t \geq 0$, то, используя теорему Дуба (см. [2], глава 5, теорема 5.12), получаем, что пара случайных процессов X_1 и X_2 является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} X_1(t) &= 1 + \sqrt{L'} \int_0^t X_1(s)\,dW_1(s), \quad t \geq 0, \\ X_2(t) &= \sqrt{L''} \int_0^t X_1(s)\,dW_2(s), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где винеровские процессы $\{W_1(t), t \geq 0\}$ и $\{W_2(t), t \geq 0\}$ могут быть определены равенствами

$$W_1(t) = \frac{1}{\sqrt{L'}} \int_0^t \frac{dX_1(s)}{X_1(s)}, \quad t \geq 0,$$

$$W_2(t) = \frac{1}{\sqrt{L''}} \int_0^t \frac{dX_2(s)}{X_1(s)}, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что сейчас винеровские процессы W_1 и W_2 независимы, поскольку

$$\langle W_1, W_2\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{L'L''}} \int_0^t \frac{d\langle X_1, X_2\rangle_s}{X_1^2(s)} = 0, \quad t \geq 0.$$

Решая систему (14), получаем представления

$$X_1(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}L't + \sqrt{L'}W_1(t)\right], \quad t \geq 0,$$

$$X_2(t) = \sqrt{L''} \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{2}L's + \sqrt{L'}W_1(s)\right] dW_2(s), \quad t \geq 0.$$

Теперь для нахождения плотности совместного распределения случайных величин $X_1(t)$ и $X_2(t)$ при $t > 0$ заметим, что для любых борелевских множеств $\Delta_1 \subset (0; +\infty)$ и $\Delta_2 \subset \mathbb{R}$ имеем

$$\mathbf{P}\{X_1(t) \in \Delta_1, X_2(t) \in \Delta_2\} = \mathbf{E}\big[1\!\!1\{X_1(t) \in \Delta_1\} \cdot \mathbf{E}\big(1\!\!1\{X_2(t) \in \Delta_2\} \mid X_1\big)\big].$$

Но поскольку, как легко видеть, фильтрации, порождаемые случайными процессами X_1 и W_1 (и пополненные множествами нулевой вероятности), совпадают и W_1 и W_2 независимы, то X_1 и W_2 также независимы и, следовательно, в силу леммы 3.2

$$\mathbf{E}\big(\mathbb{1}\big\{X_2(t)\in\Delta_2\big\}\,\big|\,X_1\big)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\mathbb{1}\left\{\sqrt{L''}\int\limits_0^t X_1(s)\,dW_2(s)\in\Delta_2\right\}\,\middle|\,X_1\right)=\frac{1}{\sqrt{L''}}\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{v^2}{2L''\sigma_t^2}}\,dv,$$

где

$$\sigma_t:=\left(\int\limits_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}>0.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{X_1(t)\in\Delta_1,X_2(t)\in\Delta_2\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left(\mathbb{1}\{X_1(t)\in\Delta_1\}\frac{1}{\sqrt{L''}}\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{v^2}{2L''\sigma_t^2}}\,dv\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{L''}}\int\limits_{\Delta_2}\mathbf{E}\left(\mathbb{1}\big\{X_1(t)\in\Delta_1\big\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{v^2}{2L''\sigma_t^2}}\right)dv.$$

Плотность совместного распределения случайных величин $X_1(t)$ и $\sigma_t^2\equiv\int_0^t X_1^2(s)\,ds$ имеет вид (см. [7, с. 265], формула 1.10.8)

$$\pi\big[X_1(t),\sigma_t^2\big](z_1,z_2)=\frac{\exp\left[-\dfrac{L't}{8}-\dfrac{1+z_1^2}{2L'z_2}\right]}{2z_1^{3/2}z_2}i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'z_2}\right),\quad z_1,z_2>0,$$

где (см. [7, с. 644])

$$i_y(z):=\frac{ze^{\frac{\pi^2}{4y}}}{\pi\sqrt{\pi y}}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left[-z\operatorname{ch}v-\frac{v^2}{4y}\right]\operatorname{sh}v\sin\frac{\pi v}{2y}\,dv,\quad y,z>0.$$

Поэтому (во втором равенстве мы просто переобозначаем v через z_2 и z_2 через v)

$$\mathbf{P}\left\{X_1(t)\in\Delta_1,X_2(t)\in\Delta_2\right\}=$$

$$=\int\limits_{\Delta_2}dv\int\limits_{\Delta_1}dz_1\int\limits_0^{+\infty}dz_2\left[\frac{\exp\left[-\dfrac{v^2}{2L''z_2}-\dfrac{L't}{8}-\dfrac{1+z_1^2}{2L'z_2}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}z_1^{3/2}z_2^{3/2}}i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'z_2}\right)\right]=$$

$$=\int\limits_{\Delta_2}dz_2\int\limits_{\Delta_1}dz_1\int\limits_0^{+\infty}dv\left[\frac{\exp\left[-\dfrac{z_2^2}{2L''v}-\dfrac{L't}{8}-\dfrac{1+z_1^2}{2L'v}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}z_1^{3/2}v^{3/2}}i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'v}\right)\right]=$$

$$= \int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2}\left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{\exp\left[-\dfrac{z_2^2}{2L''v}-\dfrac{L't}{8}-\dfrac{1+z_1^2}{2L'v}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}z_1^{3/2}v^{3/2}}i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'v}\right)dv\right]dz_1\,dz_2.$$

Следовательно, при $z_1>0$ и $z_2\in\mathbb{R}$

$$\pi[X_1(t),X_2(t)](z_1,z_2)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\exp\left[-\dfrac{z_2^2}{2L''v}-\dfrac{L't}{8}-\dfrac{1+z_1^2}{2L'v}\right]}{2\sqrt{2\pi L''}z_1^{3/2}v^{3/2}}i_{\frac{L't}{2}}\left(\frac{z_1}{L'v}\right)dv=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{2\pi^2L'\sqrt{L'L''t}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{z_2^2}{2L''v}-\frac{1+z_1^2}{2L'v}}}{\sqrt{z_1}v^{5/2}}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{z_1}{L'v}\operatorname{ch}r-\frac{r^2}{2L't}}\operatorname{sh}r\sin\frac{\pi r}{L't}\,dr\right)dv=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{2\pi^2L'\sqrt{L'L''t}}\frac{1}{\sqrt{z_1}}\int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{\exp\left[-\dfrac{1}{2v}\left(\dfrac{z_2^2}{L''}+\dfrac{1+2z_1\operatorname{ch}r+z_1^2}{L'}\right)\right]}{v^{5/2}}\,dv\right]e^{-\frac{r^2}{2L't}}\operatorname{sh}r\sin\frac{\pi r}{L't}\,dr.$$

Наконец, поскольку при $K>0$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{v^{5/2}}e^{-\frac{K}{2v}}\,dv=\frac{\sqrt{2\pi}}{K^{3/2}},$$

то

$$\pi\big[X_1(t),X_2(t)\big](z_1,z_2)=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{2\pi^2L'\sqrt{L'L''t}}\frac{1}{\sqrt{z_1}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\left(\dfrac{z_2^2}{L''}+\dfrac{1+2z_1\operatorname{ch}v+z_1^2}{L'}\right)^{3/2}}\sqrt{2\pi}\,dv=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}}\frac{1}{\sqrt{z_1}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\left((1+2z_1\operatorname{ch}v+z_1^2)+\dfrac{L'}{L''}z_2^2\right)^{3/2}}\,dv.$$

Лемма 3.3 доказана.

***Замечание* 3.2.** Плотность совместного распределения случайных величин $X_1(t)$ и $X_2(t)$ симметрична по второй переменной:

$$\pi\big[X_1(t),X_2(t)\big](z_1,-z_2)=\pi\big[X_1(t),X_2(t)\big](z_1,z_2),\qquad z_1>0,\quad z_2\in\mathbb{R}.$$

Теорема 3.2. *При любых $t>0$ и $u\in\mathbb{R}$ совместное распределение случайных величин $p_t(u)$ и $p_t'(u)$ имеет плотность вида*

$$\pi\bigl[p_t(u),p'_t(u)\bigr](z_1,z_2)=\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{z_1^{3/2}e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh}v\sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\left((z_1^2+2z_1^3\operatorname{ch}v+z_1^4)+\dfrac{L'}{L''}z_2^2\right)^{3/2}}\,dv,$$

$$z_1\geq 0,\quad z_2\in\mathbb{R},\quad z_1^2+z_2^2\neq 0.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Положим

$$E=(0;+\infty)\times\mathbb{R},$$

$$\mathcal{E}=\mathcal{B}\bigl((0;+\infty)\times\mathbb{R}\bigr)$$

и для фиксированного $t_0>0$

$$A(u,t):=\bigl(p_{t_0}(u),p'_{t_0}(u)\bigr),\qquad u\in\mathbb{R},\quad t\geq 0.$$

Заметим, что отображение $(\omega,u,t)\mapsto A(\omega,u,t)$ сейчас измеримо по совокупности переменных, поскольку таковым является отображение $(\omega,u,t)\mapsto x(\omega,u,t)$.

Поэтому для стохастического потока (3) и функции

$$f(z_1,z_2)=\frac{1}{z_1}\cdot 1\!\!\mathrm{I}\{z_1\in\Delta_1,z_2\in\Delta_2\},\quad (z_1,z_2)\in E,$$

где $\Delta_1\in\mathcal{B}((0;+\infty))$ и $\Delta_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ произвольны, при $s=0$ и $t=t_0$ согласно теореме 2.3 имеем (чтобы не загромождать запись, до конца доказательства будем писать t вместо t_0)

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,t)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)}\in\Delta_1,-\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,t)}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,t)\right)^3}\in\Delta_2\right\}\right]=$$

$$=\mathbf{E}\left[\frac{1}{p_t(0)}\cdot 1\!\!\mathrm{I}\bigl\{p_t(0)\in\Delta_1,p'_t(0)\in\Delta_2\bigr\}p_t(0)\right].$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{p_t(0)\in\Delta_1,p'_t(0)\in\Delta_2\right\}=\mathbf{E}\left[X_1(t)\cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{X_1(t)}\in\Delta_1,-\frac{X_2(t)}{X_1^2(t)}\in\Delta_2\right\}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}v_1\cdot 1\!\!\mathrm{I}\left\{\frac{1}{v_1}\in\Delta_1,-\frac{v_2}{v_1^2}\in\Delta_2\right\}\pi\bigl[X_1(t),X_2(t)\bigr](v_1,v_2)\,dv_1\,dv_2=$$

$$=\begin{bmatrix} z_1=\dfrac{1}{v_1}\\[2ex] z_2=-\dfrac{v_2}{v_1^2}\end{bmatrix}=\int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{z_1^5}\pi\bigl[X_1(t),X_2(t)\bigr]\left(\frac{1}{z_1},-\frac{z_2}{z_1^2}\right)dz_1\,dz_2.$$

Отсюда и из замечания 3.2 следует, что совместное распределение случайных величин $p_t(0)$ и $p'_t(0)$ имеет плотность и для нее имеет место представление

$$\pi\big[p_t(0), p_t'(0)\big](z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^5}\pi\big[X_1(t), X_2(t)\big]\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1^2}\right), \qquad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Поэтому из леммы 3.3 получаем, что при $z_1 > 0$ и $z_2 \in \mathbb{R}$

$$\pi\big[p_t(0), p_t'(0)\big](z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^5}\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}}\sqrt{z_1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v \sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\left(\dfrac{1 + 2z_1\operatorname{ch} v + z_1^2}{z_1^2} + \dfrac{L'}{L''}\dfrac{z_2^2}{z_1^4}\right)^{3/2}}\,dv =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}}z_1^{3/2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v \sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\left((z_1^2 + 2z_1^3\operatorname{ch} v + z_1^4) + \dfrac{L'}{L''}z_2^2\right)^{3/2}}\,dv.$$

Остается заметить, что в силу леммы 2.1 плотность совместного распределения $p_t(u)$ и $p_t'(u)$ не зависит от $u \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2 доказана.

***Замечание* 3.3.** Плотность совместного распределения случайных величин $p_t(u)$ и $p_t'(u)$ симметрична по второй переменной:

$$\pi\big[p_t(u), p_t'(u)\big](z_1, -z_2) = \pi\big[p_t(u), p_t'(u)\big](z_1, z_2), \qquad z_1 > 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Интенсивность пересечений уровня случайным процессом p_t. В силу леммы 2.1 случайный процесс $\{p_t(u), u \in \mathbb{R}\}$ является стационарным (в узком смысле), а в силу теоремы 3.1 все его одномерные распределения непрерывны. Отсюда следует (см. [12, с. 146, 147]), что для любого $c \in \mathbb{R}$ он почти наверное не равен тождественно c ни на каком отрезке и, значит, для него корректно определены число $N_t([0;1];c)$ пересечений уровня c на отрезке $[0;1]$ и интенсивность $\mu_t(c)$ пересечений этого уровня.

Теорема 4.1. *Для всех $t > 0$ справедливо соотношение*

$$\mu_t(c) = \frac{\sqrt{2L''}\cdot e^{\frac{\pi^2}{2L't} - \frac{L't}{8}}}{\pi L'\sqrt{\pi t}}\frac{1}{\sqrt{c}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v \sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1 + \dfrac{2\operatorname{ch} v}{c} + \dfrac{1}{c^2}}}\,dv \quad \text{\textit{для почти всех}} \quad c > 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что случайный процесс $\{p_t(u), u \in [0;1]\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2, а значит,

$$\mu_t(c) = \overline{\mu}_t(c) \quad \text{для почти всех} \quad c > 0,$$

где

$$\overline{\mu}_t(c) := \int\limits_0^1 \mathbf{E}\big(|p_t'(u)| \mid p_t(u) = c\big)\pi\big[p_t(u)\big](c)\,du.$$

Однако в силу теоремы 3.2, строгой положительности плотности $\pi[p_t(u)](z)$ при $z > 0$, вытекающей из теоремы 3.1, и замечания 3.3 имеем

$$\int_0^1 \mathbf{E}\big(|p_t'(u)| \mid p_t(u)=c\big)\pi\big[p_t(u)\big](c)\,du =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |z|\pi\big[p_t(u), p_t'(u)\big](c,z)\,dz\,du = 2\int_0^{+\infty} z\pi\big[p_t(0), p_t'(0)\big](c,z)dz$$

и, следовательно,

$$\overline{\mu}_t(c) = 2\int_0^{+\infty} z\pi\big[p_t(0), p_t'(0)\big](c,z)\,dz. \tag{16}$$

Поэтому в силу той же теоремы 3.2

$$\overline{\mu}_t(c) = 2\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{2\pi L''t}} z \int_0^{+\infty} \frac{c^{3/2}e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v \sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\left((c^2+2c^3\operatorname{ch} v + c^4) + \dfrac{L'}{L''}z^2\right)^{3/2}}\,dv\right]dz =$$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{\pi L''t}} c^{3/2}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{z\,dz}{\left((c^2+2c^3\operatorname{ch} v + c^4) + \dfrac{L'}{L''}z^2\right)^{3/2}}\right] e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v \sin\frac{\pi v}{L't}\,dv.$$

А так как для любых $A, B > 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{z\,dz}{(A+Bz^2)^{3/2}} = \frac{1}{B\sqrt{A}},$$

то окончательно получаем

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi\sqrt{\pi L''t}} c^{3/2}\int_0^{+\infty}\frac{L''e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v\sin\dfrac{\pi v}{L't}}{L'\sqrt{c^2+2c^3\operatorname{ch} v + c^4}}\,dv =$$

$$= \frac{\sqrt{2L''}e^{\frac{\pi^2}{2L't}-\frac{L't}{8}}}{\pi L'\sqrt{\pi t}}\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{v^2}{2L't}}\operatorname{sh} v\sin\dfrac{\pi v}{L't}}{\sqrt{1+\dfrac{2\operatorname{ch} v}{c}+\dfrac{1}{c^2}}}\,dv.$$

Теорема 4.1 доказана.

Нахождение асимптотики $\overline{\mu}_t(c)$ при $c \to +\infty$ прямыми аналитическими методами представляется затруднительным. Тем не менее эту асимптотику удается установить с помощью вероятностного подхода[1]

[1]Автор выражает благодарность проф. А. А. Дороговцеву за совет использовать этот подход.

Теорема 4.2. *Для любого* $t > 0$ *справедливо соотношение*

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{e^{-\frac{L't}{8}}\sqrt{L''}}{\pi\sqrt{2L'}}\sqrt{\frac{c}{\ln c}}\exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't}\right](1+\overline{o}(1)), \quad c \to +\infty.$$

Доказательство. Из равенств (16) и (15) получаем

$$\overline{\mu}_t(c) = 2\int\limits_0^{+\infty} z\pi\big[p_t(0), p_t'(0)\big](c,z)\,dz =$$

$$= \frac{2}{c^5}\int\limits_0^{+\infty} z\pi\big[X_1(t), X_2(t)\big]\left(\frac{1}{c}, \frac{z}{c^2}\right)dz =$$

$$= \frac{2}{c}\int\limits_0^{+\infty} z\pi\big[X_1(t), X_2(t)\big]\left(\frac{1}{c}, z\right)dz.$$

Заметим, что поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty} z\pi[X_1(t), X_2(t)]\left(\frac{1}{c}, z\right)dz = \pi\big[X_1(t)\big]\left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{E}\left((X_2(t))_+ \;\middle|\; X_1(t) = \frac{1}{c}\right),$$

где

$$(z)_+ := \begin{cases} z, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

то

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{2}{c}\pi\big[X_1(t)\big]\left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{E}\left((X_2(t))_+ \middle| X_1(t) = \frac{1}{c}\right) =$$

$$= \frac{2}{c}\pi\big[X_1(t)\big]\left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left[\left(\sqrt{L''}\int\limits_0^t X_1(s)\,dW_2(s)\right)_+ \middle| X_1\right] \middle| X_1(t) = \frac{1}{c}\right).$$

При этом стандартными рассуждениями, использующими приближение стохастического интеграла частичными суммами, независимость случайного процесса X_1 от винеровского процесса W_2 и тот факт, что если $\xi \sim \mathcal{N}(0;\sigma^2)$, то

$$\mathbf{E}(\xi)_+ = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

можно показать, что

$$\mathbf{E}\left(\left(\sqrt{L''}\int\limits_0^t X_1(s)\,dW_2(s)\right)_+ \middle| X_1\right) = \frac{\sqrt{L''}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}.$$

Значит,

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{2}{c}\pi[X_1(t)]\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\sqrt{L''}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{E}\left(\left(\int\limits_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}\middle| X_1(t) = \frac{1}{c}\right).$$

Однако

$$\mathbf{E}\left(\left(\int\limits_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}\middle| X_1(t) = \frac{1}{c}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\left(\int\limits_0^t \exp\left[-L's + 2\sqrt{L'}\left(\frac{s}{t}W_1(t) + \widetilde{B}(s)\right)\right] ds\right)^{1/2}\middle| W_1(t) = \frac{1}{\sqrt{L'}}\left(\frac{1}{2}L't - \ln c\right)\right),$$

где

$$\widetilde{B}(s) := W_1(s) - \frac{s}{t}W_1(t), \quad 0 \le s \le t.$$

Поскольку случайный процесс $\left\{\widetilde{B}(s),\, 0 \le s \le t\right\}$ не зависит от случайной величины $W_1(t)$, то

$$\mathbf{E}\left(\left(\int\limits_0^t X_1^2(s)\,ds\right)^{1/2}\middle| X_1(t) = \frac{1}{c}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int\limits_0^t \exp\left[-L's + 2\sqrt{L'}\frac{s}{t}\frac{1}{\sqrt{L'}}\left(\frac{1}{2}L't - \ln c\right) + 2\sqrt{L'}\widetilde{B}(s)\right] ds\right)^{1/2} =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int\limits_0^t \exp\left[-2\ln c \cdot \frac{s}{t} + 2\sqrt{L'}\widetilde{B}(s)\right] ds\right)^{1/2}.$$

Положим

$$B(s) := \frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{B}(st), \quad 0 \le s \le 1.$$

Тогда $\left\{B(s),\, 0 \le s \le 1\right\}$ — стандартный броуновский мост и

$$\mathbf{E}\left(\int\limits_0^t \exp\left[-2\ln c \cdot \frac{s}{t} + 2\sqrt{L'}\widetilde{B}(s)\right] ds\right)^{1/2} =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int\limits_0^t \exp\left[-2\ln c \cdot \frac{s}{t} + 2\sqrt{L'}\sqrt{t}B\left(\frac{s}{t}\right)\right] ds\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{t}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^1 \exp\left[-2\ln c \cdot s + 2\sqrt{L't}B(s)\right] ds\right)^{1/2}.$$

Определим теперь функции $h_c\colon [0;1] \to \mathbb{R},\ c > 1$, равенством

$$h_c(s) := \frac{2c^2 \ln c}{c^2 - 1} e^{-2\ln c \cdot s}, \qquad 0 \le s \le 1, \quad c > 1,$$

и заметим, что они удовлетворяют следующим условиям:

1) $h_c(s) \ge 0,\ s \in [0;1],\ c > 1$;

2) $\int_0^1 h_c(s)\, ds = 1,\ c > 1$;

3) $\forall\, \varepsilon \in (0;1)\colon \lim_{c\to+\infty} \int_\varepsilon^1 h_c(s)\, ds = 0$.

Поэтому

$$\lim_{c\to+\infty} \int\limits_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}B(s)}\, ds = e^{2\sqrt{L't}B(0)} = 1.$$

Поскольку же для любого $n \ge 1$ имеем

$$\mathbf{E} \sup_{c>1} \left(\int\limits_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}B(s)}\, ds \right)^n \le \mathbf{E} \sup_{c>1} \left(\int\limits_0^1 h_c(s)\, ds\, e^{2\sqrt{L't} \max\limits_{0\le s\le 1} B(s)} \right)^n =$$

$$= \mathbf{E} \sup_{c>1} e^{2n\sqrt{L't} \max\limits_{0\le s\le 1} B(s)} = \mathbf{E} e^{2n\sqrt{L't} \max\limits_{0\le s\le 1} B(s)} < +\infty,$$

то семейство случайных величин

$$\left(\int\limits_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}B(s)}\, ds \right)^{1/2}, \quad c > 1,$$

является равномерно интегрируемым и, следовательно,

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbf{E} \left(\int\limits_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}B(s)}\, ds \right)^{1/2} = \mathbf{E} \lim_{c\to+\infty} \left(\int\limits_0^1 h_c(s) e^{2\sqrt{L't}B(s)}\, ds \right)^{1/2} = 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{E} \left(\int\limits_0^1 \exp\left[-2\ln c \cdot s + 2\sqrt{L't}B(s) \right] ds \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\ln c}}(1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty.$$

Таким образом, учитывая следствие 3.1, окончательно получаем

$$\overline{\mu}_t(c) = \frac{2}{c} \frac{e^{-\frac{L't}{8}}}{\sqrt{2\pi L't}} c^{3/2} \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't} \right] \frac{\sqrt{L''}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{2\ln c}} (1 + \overline{o}(1)) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{L't}{8}} \sqrt{L''}}{\pi \sqrt{2L'}} \sqrt{\frac{c}{\ln c}} \exp\left[-\frac{(\ln c)^2}{2L't} \right] (1 + \overline{o}(1)), \quad c \to +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВiМС, 1995. – 246 с.
4. *Adler R. J.* On excursion sets, tube formulas and maxima of random fields // Ann. Appl. Probab. – 2000. – **10**, № 1. – P. 1 – 74.
5. *Arratia R. A.* Coalescing Brownian motions on the line: PhD thesis. – Madison, 1979. – iv + 128 p.
6. *Azaïs J.-M., Wschebor M.* Level sets and extrema of random processes and fields. – John Wiley & Sons, Inc., 2009. – xi + 393 p.
7. *Borodin A. N., Salminen P.* Handbook of Brownian motion – facts and formulae. – 2nd ed. – Birkhäuser, 2002. – xvi + 658 p.
8. *Dorogovtsev A. A.* One Brownian stochastic flow // Theory Stochast. Process. – 2004. – **10(26)**, № 3-4. – P. 21 – 25.
9. *Harris T. E.* Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 // Stochast. Process. and Appl. – 1984. – **17**. – P. 187 – 210.
10. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. – 2nd ed. – Springer, 2002. – xx + 638 p.
11. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge Univ. Press, 1990. – 346 p.
12. *Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzén H.* Extremes and related properties of random sequences and processes. – Springer-Verlag, 1983. – xii + 336 p.
13. *Leadbetter M. R., Spaniolo G. V.* Reflections on Rice's formulae for level crossings – history, extensions and use // Austral. and New Zealand J. Statist. – 2004. – **46**, № 1. – P. 173 – 180.
14. *Nishchenko I. I.* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory Stochast. Process. – 2011. – **17(33)**, № 1. – P. 70 – 78.
15. *Zirbel C. L.* Stochastic flows: dispersion of a mass distribution and Lagrangian observations of a random field: PhD thesis. – Princeton Univ., 1993. – 162 p.

Получено 16.03.16