УДК 519.64

Э. Г. Халилов (Азерб. гос. ун-т нефти и пром-сти, Баку)

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We present the substantiation of the collocation method for a system surface integral equations of the boundary-value problem of conjugation for the Helmholtz equations. Moreover, we construct a sequence convergent to the exact solution of the boundary-value problem of conjugation and estimate its error.

Наведено обґрунтування методу колокації для системи поверхневих інтегральних рівнянь граничної задачі спряження для рівнянь Гельмгольца. Крім того, побудовано послідовність, що збігається до точного розв'язку граничної задачі спряження, і наведено оцінку похибки.

1. Введение и постановка задачи. Известно, что процесс распространения акустических волн в однородной изотропной среде описывается волновым уравнением, решение которого исследовано, например, в работах [1 – 4] приближенными методами. Одним из методов решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца является приведение их к интегральному уравнению. А поскольку интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в некоторых случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием. Отметим, что ряд работ (см. [5 – 17]) посвящен исследованию приближенных решений интегральных уравнений различных краевых задач для уравнения Гельмгольца. В настоящей работе изучается приближенное решение граничной задачи сопряжения для уравнений Гельмгольца в трехмерном пространстве методом интегральных уравнений.

Рассмотрим распространение акустических волн в однородной изотропной среде $D \subset \mathbb{R}^3$ со скоростью распространения звука c_0 и коэффициентом поглощения γ_0. Тогда потенциал скоростей U_0 удовлетворяет диссипативному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \gamma_0 \frac{\partial U_0}{\partial t} - c_0^2 \Delta U_0 = 0,$$

и, следовательно, для гармонически зависящих от времени акустических волн вида $U_0(x,t) = u_0(x)e^{-i\omega_0 t}$ с частотой $\omega_0 > 0$ амплитуда u_0 удовлетворяет уравнению Гельмгольца (см. [18, с. 78])

$$\Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0 \qquad \text{в} \quad D, \tag{1.1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $k_0^2 = \omega_0(\omega_0 + i\gamma_0)/c_0^2$. Выберем k_0 так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im} k_0 \geq 0$. Кроме того, рассматривая распространение акустических волн в однородной изотропной среде $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$ со скоростью распространения звука c и коэффициентом поглощения γ, получаем, что амплитуда u удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}, \tag{1.2}$$

где $k^2 = \omega(\omega + i\gamma)/c^2$, $\omega > 0$ — частота акустической волны вида $U(x,t) = u(x)\, e^{-i\omega t}$. Выберем k опять-таки так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Пусть D — ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S. Известно (см. [18, с. 112]), что математическая формулировка задачи дифракции акустических волн на теле D с различными акустическими характеристиками в $\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}$ и D приводит к задаче сопряжения, которая заключается в следующем: найти две функции $u \in \in C^2\left(\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}\right)\bigcap C\left(\mathbb{R}^3\backslash D\right)$ и $u_0 \in C^2(D)\bigcap C(\bar{D})$, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца (1.1) и (1.2), условию излучения

$$\left(\frac{x}{|x|}, \mathrm{grad} u(x)\right) - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и условиям сопряжения

$$\mu u - \mu_0 u_0 = f \qquad \text{на} \qquad S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}} = g \qquad \text{на} \qquad S,$$

где $\vec{n}(x)$ — единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$, f и g — заданные непрерывные функции на S, а μ и μ_0 — заданные комплексные числа, причем $\mu + \mu_0 \neq 0$. Здесь второе граничное условие понимается в том смысле, что

$$\lim_{h \to +0}\left(\frac{\partial u\left(x + h\,\vec{n}(x)\right)}{\partial \vec{n}(x)} - \frac{\partial u_0\left(x - h\,\vec{n}(x)\right)}{\partial \vec{n}(x)}\right) = g(x), \quad x \in S,$$

равномерно по x на S. С физической точки зрения надлежащий выбор постоянных μ и μ_0 гарантирует непрерывность давления и нормальной скорости акустических волн при переходе через границу S.

В монографии [18, с. 114] показано, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x) = \int\limits_S \left\{\frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\psi(y) + \mu\,\Phi_k(x,y)\varphi(y)\right\} dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\bar{D},$$

$$u_0(x) = \int\limits_S \left\{\frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\psi(y) + \mu_0 \Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y)\right\} dS_y, \quad x \in D,$$

с непрерывными плотностями ψ и φ является решением задачи сопряжения, если ψ и φ — решения системы интегральных уравнений

$$\begin{gathered}(\mu + \mu_0)\,\psi + (\mu\, K - \mu_0 K_0)\,\psi + \left(\mu^2 L - \mu_0^2 L_0\right)\varphi = 2f, \\ (\mu + \mu_0)\,\varphi - (T - T_0)\psi - \left(\mu\,\tilde{K} - \mu_0 \tilde{K}_0\right)\varphi = -2g,\end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$\Phi_k(x,y) = e^{ik|x-y|}/(4\pi|x-y|), \qquad \Phi_{k_0}(x,y) = \Phi_k(x,y)|_{k=k_0}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y,$$

$$(K\psi)(x) = 2\int\limits_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\psi(y)\,dS_y, \qquad K_0 = K|_{k=k_0}, \quad x \in S,$$

$$(T\psi)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)}\left(\int\limits_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\,\psi(y)\,dS_y\right), \qquad T_0 = T|_{k=k_0}, \quad x \in S,$$

$$(L\varphi)(x) = 2\int\limits_S \Phi_k(x,y)\varphi(y)\,dS_y, \qquad L_0 = L|_{k=k_0}, \quad x \in S,$$

$$(\tilde{K}\varphi)(x) = 2\int\limits_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(x)}\,\varphi(y)\,dS_y, \qquad \tilde{K}_0 = \tilde{K}|_{k=k_0}, \quad x \in S.$$

В пространстве $C(S) \times C(S)$ введем оператор

$$A = \frac{1}{\mu + \mu_0}\begin{pmatrix} \mu\, K - \mu_0 K_0 & \mu^2 L - \mu_0^2 L_0 \\ T_0 - T & \mu_0 \tilde{K}_0 - \mu\,\tilde{K} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1.3) можно записать в виде

$$(I + A)\chi = h, \tag{1.4}$$

где I — единичный оператор в $C(S)\times C(S)$, $\chi = \begin{pmatrix}\psi \\ \varphi\end{pmatrix}$ и $h = \dfrac{2}{\mu+\mu_0}\begin{pmatrix} f \\ -g\end{pmatrix}$. Следует заметить, что $C(S) \times C(S)$ является банаховым пространством с нормой $\|\chi\|_\infty = \max\{\|\psi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty\}$, где $\|f\|_\infty = \max_{x\in S}|f(x)|$.

К сожалению, до сих пор не исследованы приближенные методы решения систем интегральных уравнений (1.3). В этой статье мы постарались устранить этот пробел.

2. Построение кубатурной формулы. Разобьем S на элементарные области $S = \bigcup_{l=1}^N S_l^N$ такие, что:

1) для каждого $l = \overline{1,N}$ область S_l^N замкнута и множество $\overset{0}{S_l^N}$ ее внутренних относительно S точек не пусто, причем $\operatorname{mes}\overset{0}{S_l^N} = \operatorname{mes} S_l^N$ и $\overset{0}{S_l^N} \bigcap \overset{0}{S_j^N} = \varnothing$ при $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, $j \neq l$;

2) для каждого $l = \overline{1,N}$ область S_l^N представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

3) для каждого $l = \overline{1,N}$ существует так называемая опорная точка $x_l \in S_l^N$ такая, что:

3.1) $r_l(N) \sim R_l(N)$ ($r_l(N) \sim R_l(N) \Leftrightarrow C_1 \le r_l(N)/R_l(N) \le C_2$, C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от N), где $r_l(N) = \min_{x\in\partial S_l^N}|x - x_l|$ и $R_l(N) = \max_{x\in\partial S_l^N}|x - x_l|$;

3.2) $R_l(N) \le d/2$, где d — радиус стандартной сферы (см. [19, с. 400]);

3.3) $r_j(N) \sim r_l(N)$ для каждого $j = \overline{1,N}$.

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$ и $\lim_{N\to\infty} R(N) = 0$, где $R(N) = \max_{l=\overline{1,N}} R_l(N)$, $r(N) = \min_{l=\overline{1,N}} r_l(N)$.

Такое разбиение, как и разбиение единичной сферы на элементарные части, было проведено в [20].

Пусть $S_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$ — части соответственно поверхности S и касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x \in S$, заключенные внутри сферы $B_d(x)$ радиуса d с центром в точке x. Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ — проекция точки $y \in S$. Тогда

$$|x-\tilde{y}| \le |x-y| \le c_1(S)\,|x-\tilde{y}| \qquad \text{и} \qquad \operatorname{mes} S_d(x) \le c_2(S) \operatorname{mes} \Gamma_d(x), \tag{2.1}$$

где $c_1(S)$ и $c_2(S)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от S (если S — сфера, то $c_1(S)=\sqrt{2}$ и $c_2(S)=2$).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1 [20]. *Существуют не зависящие от N постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, для которых при любых $l, j \in \{1,2,\ldots,N\}$, $j \ne l$, и любом $y \in S_j^N$ выполняется следующее неравенство*:

$$C_0'\,|y-x_l| \le |x_j-x_l| \le C_1'\,|y-x_l|\,. \tag{2.2}$$

Пусть $\mathbb{C}^{2N}$ — пространство векторов $z^{2N}=\left(z_1^{2N}, z_2^{2N}, \ldots, z_{2N}^{2N}\right)^{\mathrm{T}}$, $z_l^{2N} \in \mathbb{C}$, $l=\overline{1,2N}$, с нормой $\left\|z^{2N}\right\| = \max_{l=\overline{1,2N}} \left|z_l^{2N}\right|$, а p^{2N}: $C(S)\times C(S) \to \mathbb{C}^{2N}$ — линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^{2N}\chi = p^{2N}\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = \Big(\psi\left(x_1\right), \psi\left(x_2\right), \ldots, \psi\left(x_N\right), \varphi\left(x_1\right), \varphi\left(x_2\right), \ldots, \varphi\left(x_N\right)\Big)^{\mathrm{T}}$$

и называемый оператором простого сноса, где запись a^{T} означает транспонирование вектора a. Кроме того, для функции $\chi \in C(S)\times C(S)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\chi,\delta) = \delta \sup_{\tau \ge \delta} \frac{\bar{\omega}(\chi,\tau)}{\tau}, \quad \delta > 0, \qquad \text{где} \quad \bar{\omega}(\chi,\tau) = \max_{\substack{|x-y|\le \tau\\ x,y\in S}} |\chi(x)-\chi(y)|\,,$$

и рассмотрим $2N$-мерную матрицу $A^{2N} = (a_{lj})_{l,j=1}^{2N}$ с элементами

$$a_{lj} = \frac{|\operatorname{sgn}(l-j)|}{\mu+\mu_0}\left(\mu\frac{\partial\Phi_k\left(x_l,x_j\right)}{\partial\vec{n}\left(x_j\right)} - \mu_0\frac{\partial\Phi_{k_0}\left(x_l,x_j\right)}{\partial\vec{n}\left(x_j\right)}\right)\operatorname{mes} S_j^N$$

при $l=\overline{1,N}$ и $j=\overline{1,N}$;

$$a_{lj} = \frac{|\operatorname{sgn}(l-j+N)|}{\mu+\mu_0}\left(\mu^2\Phi_k\left(x_l,x_{j-N}\right) - \mu_0^2\Phi_{k_0}\left(x_l,x_{j-N}\right)\right)\operatorname{mes} S_{j-N}^N$$

при $l=\overline{1,N}$ и $j=\overline{N+1,2N}$;

$$a_{lj} = \frac{|\operatorname{sgn}(l-j-N)|}{\mu+\mu_0}\frac{\partial}{\partial\vec{n}\left(x_{l-N}\right)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_{k_0}\left(x_{l-N},x_j\right)-\Phi_k\left(x_{l-N},x_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x_j\right)}\right)\operatorname{mes} S_j^N$$

при $l=\overline{N+1,2N}$ и $j=\overline{1,N}$;

$$a_{lj} = \frac{|\operatorname{sgn}(l-j)|}{\mu+\mu_0}\left(\mu_0\frac{\partial\Phi_{k_0}\left(x_{l-N},x_{j-N}\right)}{\partial\vec{n}\left(x_{l-N}\right)} - \mu\frac{\partial\Phi_k\left(x_{l-N},x_{j-N}\right)}{\partial\vec{n}\left(x_{l-N}\right)}\right)\operatorname{mes} S_{j-N}^N$$

при $l=\overline{N+1,2N}$ и $j=\overline{N+1,2N}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\chi = \begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix}$ принадлежит пространству $C(S)\times C(S)$. Тогда выражение*

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{N} a_{l\,j}\psi\left(x_j\right)+\sum\limits_{j=1}^{N} a_{l,N+j}\,\varphi\left(x_j\right) \\ \sum\limits_{j=1}^{N} a_{N+l,j}\,\psi\left(x_j\right)+\sum\limits_{j=1}^{N} a_{N+l,N+j}\,\varphi\left(x_j\right) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

в точках x_l, $l=\overline{1,N}$, *является кубатурной формулой для* $(A\chi)(x)$, *причем справедлива оценка*

$$\left\|p^{2N}(A\chi)-A^{2N}(p^{2N}\chi)\right\|\le M\left[\|\chi\|_\infty R(N)|\ln R(N)|+\omega(\chi,R(N))\right]. \tag{2.4}$$

Здесь и далее через M обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Доказательство. В работе [21] доказано, что выражения

$$(L\varphi)^N(x_l)=2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N}\Phi_k\left(x_l,x_j\right)\varphi\left(x_j\right)\operatorname{mes}S_j^N,$$

$$(K\psi)^N(x_l)=2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N}\frac{\partial\Phi_k\left(x_l,x_j\right)}{\partial\vec{n}\left(x_j\right)}\,\psi\left(x_j\right)\operatorname{mes}S_j^N,$$

$$\left(\tilde{K}\varphi\right)^N(x_l)=2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N}\frac{\partial\Phi_k\left(x_l,x_j\right)}{\partial\vec{n}\left(x_l\right)}\,\varphi\left(x_j\right)\operatorname{mes}S_j^N,$$

$$((T-T_0)\psi)^N(x_l)=2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{N}\frac{\partial}{\partial\vec{n}\left(x_l\right)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k\left(x_l,x_j\right)-\Phi_{k_0}\left(x_l,x_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x_j\right)}\right)\psi\left(x_j\right)\operatorname{mes}S_j^N$$

в точках x_l, $l=\overline{1,N}$, являются кубатурными формулами для интегралов $(L\varphi)(x)$, $(K\psi)(x)$, $(\tilde{K}\varphi)(x)$ и $((T-T_0)\psi)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(L\varphi)(x_l)-(L\varphi)^N(x_l)\right|\le M\left(\|\varphi\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega\left(\varphi,R(N)\right)\right),$$

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|(K\psi)(x_l)-(K\psi)^N(x_l)\right|\le M\left(\|\psi\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega\left(\psi,R(N)\right)\right),$$

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|\left(\tilde{K}\varphi\right)(x_l)-\left(\tilde{K}\varphi\right)^N(x_l)\right|\le M\left(\|\varphi\|_\infty R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega\left(\varphi,R(N)\right)\right),$$

$$\max_{l=\overline{1,N}}\left|((T-T_0)\psi)(x_l)-((T-T_0)\psi)^N(x_l)\right|\le$$

$$\le M(\|\psi\|_\infty R(N)|\ln R(N)|+\omega(\psi,R(N))).$$

Следовательно, выражения

$$\sum_{j=1}^{N} a_{l\,j}\psi\left(x_j\right)+\sum_{j=1}^{N} a_{l,N+j}\,\varphi\left(x_j\right)$$

и

$$\sum_{j=1}^{N} a_{N+l,j}\,\psi\left(x_j\right) + \sum_{j=1}^{N} a_{N+l,N+j}\,\varphi\left(x_j\right),$$

в точках $x_l,\ l = \overline{1,N}$, являются кубатурными формулами для интегралов

$$\frac{1}{\mu+\mu_0}\left((\mu\, K\psi - \mu_0 K_0\psi)(x) + \left(\mu^2 L\varphi - \mu_0^2 L_0\varphi\right)(x)\right)$$

и

$$\frac{1}{\mu+\mu_0}\Big(\left(T_0\psi - T\psi\right)(x) + \left(\mu_0\tilde{K}_0\varphi - \mu\tilde{K}\varphi\right)(x)\Big)$$

соответственно. Значит, выражение

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{l\,j}\psi\left(x_j\right) + \sum_{j=1}^{N} a_{l,N+j}\,\varphi\left(x_j\right) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{N+l,j}\,\psi\left(x_j\right) + \sum_{j=1}^{N} a_{N+l,N+j}\,\varphi\left(x_j\right) \end{pmatrix}$$

в точках $x_l,\ l = \overline{1,N}$, является кубатурной формулой для $(A\chi)(x)$. Кроме того, принимая во внимание оценки погрешностей кубатурных формул для интегралов $(L\varphi)(x)$, $(K\psi)(x)$, $(\tilde{K}\varphi)(x)$ и $\big((T-T_0)\psi\big)(x)$, убеждаемся в справедливости оценки (2.4).

Теорема 2.1 доказана.

3. Обоснование метода коллокации. Использовав кубатурную формулу (2.3), систему интегральных уравнений (1.3) заменим системой алгебраических уравнений относительно $z^{2N} \in \mathbb{C}^{2N}$, являющегося приближенным значением $p^{2N}\chi$ $\big($здесь $z_l^{2N},\ l = \overline{1,N}$, является приближенным значением $\psi(x_l)$, а $z_{N+l}^{2N},\ l = \overline{1,N}$, — приближенным значением $\varphi(x_l)\big)$. Эту систему, в свою очередь, запишем в виде

$$\left(I^{2N} + A^{2N}\right)z^{2N} = h^{2N}, \tag{3.1}$$

где $h^{2N} = p^{2N}h$ и $I^{\,2N}$ — единичный оператор в $\mathbb{C}^{2N}$.

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 3.1. *Пусть h принадлежит пространству $C(S)\times C(S)$. Тогда уравнения* (1.4) *и* (3.1) *имеют единственные решения $\chi_* \in C(S)\times C(S)$ и $z_*^{2N} \in \mathbb{C}^{2N}$* (*при $N \ge N_0$*) *соответственно, при этом $\lim_{N\to\infty}\left\|z_*^{2N} - p^{2N}\chi_*\right\| = 0$ с оценкой скорости сходимости*

$$\left\|z_*^{2N} - p^{2N}\chi_*\right\| \le M\left[R(N)\left|\ln R(N)\right| + \omega(h, R(N))\right].$$

Доказательство. Вначале отметим, что здесь мы будем пользоваться теоремой Г. М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [22]). При этом воспользуемся обозначениями, необходимыми определениями и предложениями из работы [22].

Проверим выполнение условий теоремы 4.2 из работы [22, с. 14]. В работе [18, с. 114] доказано, что $\operatorname{Ker}(I+A) = \{0\}$. Очевидно, что операторы $I^{2N} + A^{2N}$ фредгольмовы с нулевым индексом и система операторов простого сноса $P = \left\{p^{2N}\right\}$ является связывающей для пространств $C(S) \times C(S)$ и $\mathbb{C}^{2N}$. Тогда по определению 1.2 из работы [22, с. 7] $h^{2N} \xrightarrow{P} h$, а согласно теореме 2.1 и определению 2.1 из работы [22, с. 10] $I^{2N} + A^{2N} \xrightarrow{PP} I + A$. Поскольку по определению 3.2 из работы [22, с. 11] $I^{2N} \to I$ устойчиво, то согласно предложению 3.5 из работы [22, с. 12] и определению 3.3 из работы [22, с. 11] осталось проверить условие компактности, которое в силу предложения 1.1 из работы [22, с. 8] равносильно условию: для любой последовательности $\left\{z^{2N}\right\}$, $z^{2N} \in \mathbb{C}^{2N}$, $\left\|z^{2N}\right\| \leq M$, существует относительно компактная последовательность $\left\{A_{2N} z^{2N}\right\} \subset C(S) \times C(S)$ такая, что

$$\left\|A^{2N} z^{2N} - p^{2N}\left(A_{2N} z^{2N}\right)\right\| \to 0 \qquad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В качестве $\left\{A_{2N} z^{2N}\right\}$ выберем последовательность

$$\left(A_{2N} z^{2N}\right)(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2N} a_j^{(1)}(x)\, z_j^{2N} \\ \sum\limits_{j=1}^{2N} a_j^{(2)}(x)\, z_j^{2N} \end{pmatrix},$$

где

$$a_j^{(1)}(x) = \frac{2}{\mu + \mu_0}\left(\mu \int\limits_{S_j^N} \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} dS_y - \mu_0 \int\limits_{S_j^N} \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} dS_y\right)$$

при $j = \overline{1, N}$,

$$a_j^{(1)}(x) = \frac{2}{\mu + \mu_0}\left(\mu^2 \int\limits_{S_{j-N}^N} \Phi_k(x,y) dS_y - \mu_0^2 \int\limits_{S_{j-N}^N} \Phi_{k_0}(x,y) dS_y\right)$$

при $j = \overline{N+1, 2N}$,

$$a_j^{(2)}(x) = \frac{2}{\mu + \mu_0} \int\limits_{S_j^N} \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)}\left(\frac{\partial\big(\Phi_{k_0}(x,y) - \Phi_k(x,y)\big)}{\partial \vec{n}(y)}\right) dS_y$$

при $j = \overline{1, N}$,

$$a_j^{(2)}(x) = \frac{2}{\mu + \mu_0}\left(\mu_0 \int\limits_{S_{j-N}^N} \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \vec{n}(x)} dS_y - \mu \int\limits_{S_{j-N}^N} \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(x)} dS_y\right)$$

при $j = \overline{N+1, 2N}$.

Очевидно, что

$$\left|\left(A_{2N} z^{2N}\right)(x)\right| \leq M\left\|z^{2N}\right\| \quad \forall x \in S. \tag{3.2}$$

Возьмем любые точки $x', x'' \in S$ такие, что $|x' - x''| = \delta < d/2$. Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{2N} a_j^{(1)}(x')z_j^{2N} - \sum_{j=1}^{2N} a_j^{(1)}(x'')z_j^{2N}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2\,|\mu|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y + \frac{2\,|\mu|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y + \frac{2\,|\mu|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S\setminus\left(S_{\delta/2}(x')\bigcup S_{\delta/2}(x'')\right)}\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)} - \frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu_0|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\frac{\partial\Phi_{k_0}(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y + \frac{2\,|\mu_0|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\frac{\partial\Phi_{k_0}(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu_0|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\frac{\partial\Phi_{k_0}(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y + \frac{2\,|\mu_0|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\frac{\partial\Phi_{k_0}(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu_0|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S\setminus\left(S_{\delta/2}(x')\bigcup S_{\delta/2}(x'')\right)}\left|\frac{\partial\Phi_{k_0}(x',y)}{\partial\vec{n}(y)} - \frac{\partial\Phi_{k_0}(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y +$$

$$+\frac{2|\mu^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\Phi_k(x',y)\right|dS_y + \frac{2|\mu^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\Phi_k(x'',y)\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\Phi_k(x'',y)\right|dS_y + \frac{2\,|\mu^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\Phi_k(x',y)\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S\setminus\left(S_{\delta/2}(x')\bigcup S_{\delta/2}(x'')\right)}\left|\Phi_k(x',y) - \Phi_k(x'',y)\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu_0^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\Phi_{k_0}(x',y)\right|dS_y + \frac{2\,|\mu_0^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\,|\mu_0^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dS_y + \frac{2\,|\mu_0^2|\,\|z^{2N}\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\Phi_{k_0}(x',y)\right|dS_y +$$

$$+\frac{2\left|\mu_0^2\right|\left\|z^{2N}\right\|}{|\mu+\mu_0|}\int\limits_{S\setminus\left(S_{\delta/2}(x')\bigcup S_{\delta/2}(x'')\right)}\left|\Phi_{k_0}(x',y)-\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dS_y. \tag{3.3}$$

Используя неравенство

$$\left|\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|\le\frac{M}{|x-y|}\quad\forall x,y\in S,\quad x\ne y,$$

и формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получаем

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y\le M\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\frac{1}{|x'-y|}\,dS_y\le\,M\delta,$$

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y\le\,M\delta.$$

Кроме того, принимая во внимание неравенства $|x''-y|\ge\delta/2\ \forall y\in S_{\delta/2}(x')$ и $|x'-y|\ge$ $\ge\delta/2\ \forall y\in S_{\delta/2}(x'')$, имеем

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y\le M\int\limits_{S_{\delta/2}(x')}\frac{1}{|x''-y|}\,dS_y\le\frac{2M}{\delta}\,\mathrm{mes}\left(S_{\delta/2}(x')\right)\le M\delta,$$

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')}\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y\le M\delta.$$

Учитывая, что

$$\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|\le\frac{M\delta}{|x'-y|^2}\quad\forall y\in S\setminus\left(S_{\delta/2}(x')\bigcup S_{\delta/2}(x'')\right),$$

находим

$$\int\limits_{S\setminus\left(S_{\delta/2}(x')\bigcup S_{\delta/2}(x'')\right)}\left|\frac{\partial\Phi_k(x',y)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial\Phi_k(x'',y)}{\partial\vec{n}(y)}\right|dS_y\le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Оценивая остальные слагаемые в неравенстве (3.3), получаем

$$\left|\sum_{j=1}^{2N}a_j^{(1)}(x')z_j^{2N}-\sum_{j=1}^{2N}a_j^{(1)}(x'')z_j^{2N}\right|\le$$

$$M\left\|z^{2N}\right\|\left|x'-x''\right|\left|\ln\left|x'-x''\right|\right|\quad\forall x',x''\in S.$$

Аналогично можно показать, что

$$\left|\sum_{j=1}^{2N}a_j^{(2)}(x')z_j^{2N}-\sum_{j=1}^{2N}a_j^{(2)}(x'')z_j^{2N}\right|\le$$

$$\le M \left\| z^{2N} \right\| \left| x' - x'' \right| \left| \ln \left| x' - x'' \right| \right| \quad \forall x', x'' \in S.$$

В результате имеем

$$\left| \left(A_{2N} z^{2N} \right)(x') - \left(A_{2N} z^{2N} \right)(x'') \right| \le$$
$$\le M \left\| z^{2N} \right\| \left| x' - x'' \right| \left| \ln \left| x' - x'' \right| \right| \quad \forall x', x'' \in S, \tag{3.4}$$

а значит, $\left\{ A_{2N} z^{2N} \right\} \subset C(S) \times C(S)$.

Относительная компактность последовательности $\left\{ A_{2N} z^{2N} \right\}$ следует из теоремы Арцела. Действительно, при условии $\left\| z^N \right\| \le M$ равномерная ограниченность непосредственно следует из неравенства (3.2), а равностепенная непрерывность — из оценки (3.4). Кроме того, принимая во внимание способ разбиения поверхности S на элементарные части и лемму 2.1, получаем

$$\left\| A^{2N} z^{2N} - p^{2N} \left(A_{2N} z^{2N} \right) \right\| \to 0 \qquad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Тогда, применяя теорему 4.2 из работы [22, с. 14], убеждаемся, что уравнения (1.4) и (3.1) имеют единственные решения $\chi_* \in C(S) \times C(S)$ и $z_*^{2N} \in \mathbb{C}^{2N}$, $N \ge N_0$, соответственно, причем

$$m_0 \, \delta_N \le \left\| z_*^{2N} - p^{2N} \chi_* \right\| \le M_0 \, \delta_N,$$

где

$$m_0 = 1 / \sup_{N \ge N_0} \left\| I^{2N} + A^{2N} \right\| > 0, \qquad M_0 = \sup_{N \ge N_0} \left\| \left(I^{2N} + A^{2N} \right)^{-1} \right\| < +\infty,$$
$$\delta_N = \left\| \left(I^{2N} + A^{2N} \right) \left(p^{2N} \chi_* \right) - h^{2N} \right\|.$$

Принимая во внимание равенство

$$p^{2N} h = p^{2N} \chi_* + p^{2N} (A \chi_*)$$

и оценку (2.4), находим

$$\delta_N \le M \left(\| \chi_* \|_\infty R(N) \left| \ln R(N) \right| + \omega(\chi_*, R(N)) \right).$$

Как и при доказательстве оценки (3.4), можно показать, что

$$\left| (A \chi_*)(x') - (A \chi_*)(x'') \right| \le M \, \| \chi_* \| \left| x' - x'' \right| \left| \ln \left| x' - x'' \right| \right| \quad \forall x', x'' \in S,$$

т. е.

$$\omega \left(A \chi_*, R(N) \right) \le M \, \| \chi_* \| \, R(N) \left| \ln R(N) \right|.$$

Тогда, принимая во внимание неравенства

$$\| \chi_* \|_\infty \le \left\| (I + A)^{-1} \right\| \| h \|_\infty$$

и

$$\omega \left(\chi_*, R(N) \right) = \omega \left(h - A \chi_*, R(N) \right) \le \omega \left(h, R(N) \right) + \omega \left(A \chi_*, R(N) \right),$$

завершаем доказательство теоремы.

***Следствие* 3.1.** *Пусть* $z_*^{2N} = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{2N}^*)^{\mathrm{T}}$ *— решение системы алгебраических уравнений* (3.1). *Тогда последовательность*

$$u^N(x^*) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \Phi_k\,(x^*, x_j)}{\partial \vec{n}\,(x_j)}\, z_j^* + \mu\, \Phi_k\,(x^*, x_j)\, z_{N+j}^* \right) \operatorname{mes} S_j, \quad x^* \in \mathbb{R}^3 / \bar{D},$$

сходится к $u(x^*)$, *а последовательность*

$$u_0^N(x_*) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \Phi_{k_0}\,(x_*, x_j)}{\partial \vec{n}\,(x_j)}\, z_j^* + \mu_0\, \Phi_{k_0}\,(x_*, x_j)\, z_{N+j}^* \right) \operatorname{mes} S_j, \quad x_* \in D,$$

— к $u_0(x_*)$, *причем*

$$\left| u^N(x^*) - u(x^*) \right| \le M\,[R(N)\,|\ln R(N)| + \omega(h, R(N))],$$

$$\left| u_0^N(x_*) - u_0(x_*) \right| \le M\,[R(N)\,|\ln R(N)| + \omega(h, R(N))].$$

Доказательство. Известно, что если функция $\chi_* = \begin{pmatrix} \psi_* \\ \varphi_* \end{pmatrix} \in C(S) \times C(S)$ является решением уравнения (1.4), то функции

$$u(x) = \int\limits_S \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\, \psi_*(y) + \mu\, \Phi_k(x,y) \varphi_*(y) \right\} dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D},$$

и

$$u_0(x) = \int\limits_S \left\{ \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} \psi_*(y) \, + \mu_0 \Phi_{k_0}(x,y) \varphi_*(y) \right\} dS_y, \quad x \in D,$$

являются решениями граничной задачи сопряжения. Пусть $x^* \in \mathbb{R}^3 / \bar{D}$. Нетрудно показать, что

$$u(x^*) - u^N(x^*) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j^N} \frac{\partial \Phi_k\,(x^*, y)}{\partial \vec{n}(y)}\, (\psi_*(y) - \psi_*\,(x_j))\, dS_y +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j^N} \frac{\partial \Phi_k\,(x^*, y)}{\partial \vec{n}(y)}\, \left(\psi_*\,(x_j) - z_j^*\right) dS_y +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j^N} \left(\frac{\partial \Phi_k\,(x^*, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial \Phi_k\,(x^*, x_j)}{\partial \vec{n}\,(x_j)} \right) \psi_*(y)\, dS_y +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j^N} \left(\frac{\partial \Phi_k\,(x^*, x_j)}{\partial \vec{n}\,(x_j)} - \frac{\partial \Phi_k\,(x^*, y)}{\partial \vec{n}(y)} \right) (\psi_*(y) - \psi_*\,(x_j))\, dS_y +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j^N}\left(\frac{\partial\Phi_k\left(x^*,x_j\right)}{\partial\vec{n}\left(x_j\right)}-\frac{\partial\Phi_k\left(x^*,y\right)}{\partial\vec{n}(y)}\right)\left(\psi_*\left(x_j\right)-z_j^*\right)dS_y+$$

$$+\mu\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j^N}\Phi_k\left(x^*,y\right)\left(\varphi_*(y)-\varphi_*\left(x_j\right)\right)dS_y+$$

$$+\mu\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j^N}\Phi_k\left(x^*,y\right)\left(\varphi_*\left(x_j\right)-z_{N+j}^*\right)dS_y+$$

$$+\mu\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j^N}\left(\Phi_k\left(x^*,y\right)-\Phi_k\left(x^*,x_j\right)\right)\varphi_*(y)\,dS_y+$$

$$+\mu\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j^N}\left(\Phi_k\left(x^*,x_j\right)-\Phi_k\left(x^*,y\right)\right)\left(\varphi_*(y)-\varphi_*\left(x_j\right)\right)dS_y+$$

$$+\mu\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j^N}\left(\Phi_k\left(x^*,x_j\right)-\Phi_k\left(x^*,y\right)\right)\left(\varphi_*\left(x_j\right)-z_{N+j}^*\right)dS_y.$$

Кроме того, функции $p(y)=\dfrac{\partial\Phi_k(x^*,y)}{\partial\vec{n}(y)}$ и $q(y)=\Phi_k(x^*,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми на поверхности S и, следовательно,

$$\max_{j=\overline{1,N}}\left|\,p(y)-p\left(x_j\right)\right|\le\|\operatorname{grad}p\|_\infty\,R(N)\quad\forall y\in S,$$

$$\max_{j=\overline{1,N}}\left|\,q(y)-q\left(x_j\right)\right|\le\|\operatorname{grad}q\|_\infty\,R(N)\quad\forall y\in S.$$

Тогда, принимая во внимание теорему 3.1, получаем

$$\left|u^N(x^*)-u(x^*)\right|\le M\big[R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(h,R(N))\big].$$

Аналогично можно показать, что если $x_*\in D$, то

$$\left|u_0^N(x_*)-u_0(x_*)\right|\le M\big[R(N)\left|\ln R(N)\right|+\omega(h,R(N))\big].$$

Литература

1. *Михайлов Г. А., Чешкова А. Ф.* Решение разностной задачи Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца методом Монте-Карло // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 1. – С. 99 – 106.
2. *Радин А. М., Шестопалов В. П.* Дифракция плоской волны на сфере с круговым отверстием // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 5. – С. 1232 – 1243.
3. *Свешников А. Г.* Численные методы в теории дифракции // Тр. Междунар. конгр. математиков. – Ванкувер, 1974. – С. 437 – 442.

4. *Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П.* Свободные колебания электромагнитного поля в одномерно-периодических решетках // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1987. – **24**, № 2. – С. 262 – 271.
5. *Абдуллаев Ф. А., Халилов Э. Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса граничных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 1. – С. 82 – 86.
6. *Булыгин В. С.* Скалярная третья краевая задача математической теории дифракции на плоском экране и ее дискретная математическая модель // Вестн. Харьков. нац. ун-та. Мат. моделирование. Информ. технологии. Автомат. системы управления. – 2007. – Вып. 7, № 775. – С. 62 – 72.
7. *Гандель Ю. В.* Краевые задачи для уравнения Гельмгольца и их дискретные математические модели // Соврем. математика. Фундам. направления. – 2010. – **36**. – С. 36 – 49.
8. *Каширин А. А.* Об условно-корректных интегральных уравнениях и численном решении стационарных задач дифракции акустических волн // Вестн. ТОГУ. – 2012. – № 3(26). – С. 33 – 40.
9. *Каширин А. А., Смагин С. И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2012. – **52**, № 8. – С. 1492 – 1505.
10. *Купрадзе В. Д.* Метод интегральных уравнений в теории дифракции // Мат. сб. – 1934. – **41**, № 4. – С. 561 – 581.
11. *Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А.* Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2014. – **54**, № 8. – С. 1319 – 1331.
12. *Плещинский И. Н., Плещинский Н. Б.* Интегральные уравнения задачи сопряжения полуоткрытых диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Сер. мат. – 2007. – № 5(540). – С. 63 – 80.
13. *Халилов Э. Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2016. – **56**, № 7. – С. 1340 – 1348.
14. *Халилов Э. Г.* О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 9. – С. 1277 – 1283.
15. *Harris P. J., Chen K.* On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem // J. Comput. and Appl. Math. – 2003. – **156**. – P. 303 – 318.
16. *Khalilov E. H.* On approximate solution of external Dirichlet boundary value problem for Laplace equation by collocation method // Azerb. J. Math. – 2015. – **5**, № 2. – P. 13 – 20.
17. *Kress R.* Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. Comput. Modelling. – 1991. – **15**, № 3-5. – P. 229 – 243.
18. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
19. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
20. *Кустов Ю. А., Мусаев Б. И.* Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения. – М., 1981. – 60 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 4281-8.
21. *Khalilov E. H.* Cubic formula for class of weakly singular surface integrals // Proc. Inst. Math. and Mech. Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. – 2013. – **39(47)**. – P. 69 – 76.
22. *Вайникко Г. М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1979. – **16**. – С. 5 – 53.

Получено 22.02.16,
после доработки — 19.01.17