УДК 519.21

К. С. Акбаш (Кіровоград. держ. пед. ун-т ім. В. Винниченка)

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ ОЦІНКИ ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ

Exponential estimates are obtained in the law of iterated logarithm for the extreme values of sequence of independent random variables.

Получены экспоненциальные оценки в законе повторного логарифма для экстремальных значений последовательности независимых случайных величин.

1. Вступ. Нехай при $2 < n \in N$ (γ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які мають стандартний нормальний розподіл, і

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n)) + \ln(4\pi)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right),$$

$$\beta_n = \sqrt{2\ln(n)}.$$

У роботі [1] було показано, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left(\beta_n\left|\max_{1\le k\le n}\gamma_k - \alpha_n\right| > x\right) \le C_1 e^{-C_2 x} \tag{1}$$

для кожного натурального $n > 2$ і дійсного $x > 0$.

У даній роботі ми істотно посилимо оцінку (1) із роботи [1] та узагальнимо її на досить широкі класи розподілів.

Нехай (ξ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з абсолютно неперервною функцією розподілу $F(x)$, причому існує таке число x_0, що

$$F'(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0; +\infty]. \tag{2}$$

Покладемо

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \forall n > n_0 = \left[\frac{1}{1 - F(x_0)}\right] + 1, \tag{3}$$

а також

$$z_n = \max_{n_0 \le i \le n} \xi_i \quad \forall n > n_0,$$

де $[t]$ — ціла частина числа t, $F^{-1}(y)$ — обернена функція до $F(x)$, визначена на відрізку $[x_0; +\infty]$.

Із роботи [2] відомо, що властивості слабкої збіжності $\{z_n\}$ тісно пов'язані з поведінкою функції f, визначеної таким чином:

$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)} \quad \forall x \in [x_0; +\infty].$$

У статті [3] встановлено, що визначити поведінку $\{z_n\}$ можна, знаючи поведінку функції

$$g(x) = f(x) \ln \left(\ln \left(\frac{1}{1 - F(x)} \right) \right) \quad \forall x \in [x_0; +\infty].$$

2. Асимптотичні оцінки для схеми максимуму. Для встановлення відповідних асимптотичних оцінок доведемо таку лему.

Лема 1. *Нехай для функції* $\psi \colon R \to R$ *існує таке число* $t_0 \in R$, *що*

$$\psi'(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0; +\infty]$$

і

$$q(t) = \frac{\ln(\psi(t))}{\psi'(t)} > 0 \quad \forall t \in [t_0; +\infty].$$

Тоді:

1) *якщо* $\psi'(t)$ *зростає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то для всіх* $x > 0$ *і* $t > t_0$ *виконується нерівність*

$$\frac{\psi\left(t + xq(t)\right) - \psi(t)}{\ln(\psi(t))} \geq x; \tag{4}$$

2) *якщо* $\psi'(t)$ *спадає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то для всіх* x *і* t *таких, що* $x > 0$, $t > t_0$ *і* $t - xq(t) > t_0$, *виконується нерівність*

$$\frac{\psi\left(t - xq(t)\right) - \psi(t)}{\ln(\psi(t))} \leq -x. \tag{5}$$

Доведення. 1. Зафіксуємо $x > 0$ і $t > t_0$, тоді за теоремою Лагранжа існує таке число

$$\tau \in [t; t + xq(t)],$$

що

$$\frac{\psi\left(t + xq(t)\right) - \psi(t)}{xq(t)} = \psi'(\tau).$$

Оскільки $\psi'(z)$ зростає на $[t_0; +\infty]$, то $\psi'(\tau) \geq \psi'(t)$ і відповідно маємо

$$\frac{\psi\left(t + xq(t)\right) - \psi(t)}{\ln(\psi(t))} = \frac{x\psi'(\tau)}{\psi'(t)} \geq x.$$

2. Зафіксуємо $x > 0$ і $t > t_0$, тоді за теоремою Лагранжа існує число

$$\eta \in [t - xq(t); t],$$

для якого

$$\frac{\psi(t) - \psi\left(t - xq(t)\right)}{xq(t)} = \psi'(\eta).$$

Оскільки $\psi'(z)$ спадає на $[t_0; +\infty]$, то $\psi'(\eta) \geq \psi'(t)$ і відповідно маємо

$$\frac{\psi(t) - \psi\left(t - xq(t)\right)}{\ln(\psi(t))} = \frac{x\psi'(\eta)}{\psi'(t)} \geq x,$$

звідки й випливає (5).

Лему 1 доведено.

Теорема 1. *Нехай для послідовності випадкових величин* (ξ_n) *виконуються умови* (2), (3). *Покладемо*

$$\mu(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - F(x)}\right),$$

$$V_1 = \sup_{n > n_0} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln(\ln(n))}.$$

Якщо існує таке $t_0 \in R$, *що функція* $\mu'(t)$ *зростає на проміжку* $[t_0; +\infty]$, *то існують додатні сталі* C_3, C_4 *такі, що*

$$\mathbf{P}(V_1 > x) \leq C_3 e^{-C_4 x} \quad \forall x \in [t_0^*; +\infty],$$

де

$$t_0^* = \max\{x_0; t_0\},$$

зокрема

$$\mathbf{E}e^{\varepsilon V} < \infty, \tag{6}$$

якщо $0 < \varepsilon < C_4$ *та існує таке* γ, *що*

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in [-\infty; \gamma].$$

Доведення. Насамперед переконаємось у коректності відповідних величин.

При $n > n_0$ маємо

$$n > \frac{1}{1 - F(x_0)},$$

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - (1 - F(x_0)) = F(x_0),$$

і оскільки функція $F(x)$ строго зростає на проміжку $[x_0; +\infty]$, то послідовність

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n_0 < n \in N,$$

є строго зростаючою,

$$a_n > x_0 \quad \forall n > n_0,$$

а також

$$f(a_n) = \frac{1 - F(a_n)}{F'(a_n)} > 0 \quad \forall n > n_0.$$

Оцінимо зверху величину $\mathbf{P}(V_1 > x)$ при заданому $x > 0$. Позначимо

$$P_1 = \mathbf{P}(V_1 > x) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n>n_0} \left\{\frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} > x\right\}\right),$$

$$u_n(x) = a_n + xf(a_n)\ln(\ln(n)).$$

Тоді маємо

$$P_1 = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n>n_0} \{z_n > u_n(x)\}\right) \le \mathbf{P}\left(\bigcup_{n>n_0} \left\{\xi_n > \min_{k\ge n} u_k(x)\right\}\right). \tag{7}$$

Оскільки $u_n(x) \to \infty$ при $n \to \infty$, то існує таке число $k_n = k_n(x)$, що

$$u_{k_n}(x) = \min_{k\ge n} u_k(x).$$

Таким чином, із нерівності (7) випливає оцінка

$$P_1 \le \sum_{n>n_0} \mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right).$$

Якщо

$$\mu(x) = \ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right),$$

то

$$q(x) = \frac{\ln(\mu(x))}{\mu'(t)} = \frac{1-F(x)}{F'(x)}\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right)\right) = f(x)\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right)\right) = g(x).$$

Використовуючи оцінку (4), при $t > t_0$ отримуємо

$$\frac{\mu\left(t + xg(t)\right) - \mu(t)}{\ln(\mu(t))} = \frac{\ln\left(\dfrac{1-F(t)}{1-F(t+xg(t))}\right)}{\ln\left(\ln\left(\dfrac{1}{1-F(t)}\right)\right)} \ge x,$$

звідки

$$1 - F(t + xg(t)) \le (1 - F(t))\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right)^{-x}.$$

Нехай

$$n_1 = \inf_{n_0<n\in N}\{n \mid a_n \ge t_0\}.$$

Підставивши $t = a_n$, для $n > n_1$ отримаємо

$$g(a_n) = f(a_n)\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F(a_n)}\right)\right) = f(a_n)\ln(\ln(n)),$$

звідки

$$1 - F(a_n + xf(a_n)\ln(\ln(n)) \leq (1 - F(a_n))\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(a_n)}\right)\right)^{-x} = \frac{(\ln n)^{-x}}{n}.$$

У загальному випадку маємо

$$P_1 \leq \sum_{a_n \leq t_0^*} \mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right) + \sum_{a_n > t_0^*} \mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right),$$

однак в залежності від значення t_0^* остання формула набирає різного вигляду.

Зрозуміло, що при $t_0 > x_0$ виконується нерівність

$$P_1 \leq \sum_{a_n \leq t_0} \mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right) + \sum_{a_n > t_0} \mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right). \tag{8}$$

Якщо $t_0 \leq x_0$, то

$$P_1 \leq \sum_{n > n_0} \mathbf{P}(\xi > u_{k_n}(x)).$$

Без обмеження загальності доведемо нерівність (8).

Оскільки

$$\mu(t_0^*) = \frac{F'(t_0^*)}{1 - F(t_0^*)} > 0$$

і $\mu'(z)$ зростає на проміжку $[t_0^*; +\infty]$, то

$$\mu'(z) \geq \mu(t_0^*) \quad \forall z \in [t_0^*; +\infty],$$

звідки

$$\int\limits_{t_0^*}^{t} \mu'(z)dz \geq \int\limits_{t_0^*}^{t} \mu(t_0^*)dz \quad \forall t \in [t_0^*; +\infty],$$

$$\mu(t) \leq A_1 t + B_1 \quad \forall t \in [t_0^*; +\infty]$$

для деяких сталих $A_1 > 0$ і B_1, тому

$$1 - F(x) = e^{-\mu(x)} \leq A_2 e^{-B_2 x} \quad \forall x \in [t_0^*; +\infty]$$

для деяких додатних сталих A_2, B_2.

Отже, існують такі сталі $C_1, C_2 > 0$, що

$$\sum_{a_n \leq t_0} \mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right) \leq n_3 \mathbf{P}\left(\xi > C_1 + C_2 x\right) =$$

$$= n_3\left(1 - F(C_1 + C_2 x)\right) \leq n_3 C_3^* e^{-C_4 x} = C_3 e^{-C_4 x}.$$

Оскільки при $n > n_1$

$$\mathbf{P}\left(\xi > u_{k_n}(x)\right) = (1 - F(u_{k_n})) \leq \frac{[\ln(k_n)]^{-x}}{k_n} \leq \frac{(\ln n)^{-x}}{n},$$

то

$$\sum_{a_n>t_0}\mathbf{P}\left(\xi>u_{k_n}(x)\right)\le\sum_{a_n>t_0}\frac{(\ln n)^{-x}}{n}\le\sum_{a_n>t_0}\frac{(\ln n)^{-2}}{n}(\ln 3)^{-(x-2)}=C_5e^{-C_6x},$$

адже

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-2}}{n}<+\infty.$$

Покажемо, що

$$\mathbf{E}e^{\varepsilon V}<\infty.$$

Зафіксуємо натуральне $l>t_0$ і розглянемо $l<r\in N$, тоді

$$\int\limits_l^r e^{\varepsilon x}d(F_{V_1}(x))=\sum_{n=l}^{r-1}\int\limits_n^{n+1}e^{\varepsilon x}d(F_{V_1}(x))\le$$

$$\le\sum_{n=l}^{r-1}\int\limits_n^{n+1}e^{\varepsilon(n+1)}d(F_{V_1}(x))\le\sum_{n=l}^{r-1}e^{\varepsilon(n+1)}e^{-C_4n}<\sum_{n=l}^{\infty}e^{\varepsilon(n+1)-C_4n}<\infty,$$

звідки випливає потрібне.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай для послідовності випадкових величин* (ξ_n) *виконуються умови* (2), (3). *Покладемо*

$$\mu(x)=\ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right),$$

$$V_2=\sup_{n>n_0}\frac{a_n-z_n}{f(a_n)\ln(\ln(n))}.$$

Якщо існує таке $t_0\in R$, *що* $F(t_0)=0,\ F(t)>0\ \forall t>t_0$ *і функція* $\mu'(t)$ *спадає на проміжку* $[t_0;+\infty]$, *то існують такі додатні сталі* $C_5,\ C_6$, *що*

$$\mathbf{P}(V_2>x)\le C_5e^{-C_6x}\quad\forall x\in[t_0^{**};+\infty],\tag{9}$$

де

$$t_0^{**}=\max\{x_0;3\},$$

зокрема

$$\mathbf{E}e^{\varepsilon V_2}<\infty,\tag{10}$$

якщо $0<\varepsilon<C_4$.

Доведення. Зрозуміло, що $x_0\ge t_0$. Оцінимо зверху величину $\mathbf{P}(V_2>x)$ при заданому $x>t_0^{**}$. Позначимо

$$P_2=\mathbf{P}(V_2>x)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{n>2}\left\{\frac{z_n-a_n}{f(a_n)\ln\ln n}\le -x\right\}\right).$$

Тоді, згідно з оцінкою (5), якщо $t - xq(t) > t_0$, то

$$\frac{\mu\left(t - xg(t)\right) - \mu(t)}{\ln(\mu(t))} = \frac{\ln\left(\dfrac{1 - F(t)}{1 - F(t - xg(t))}\right)}{\ln\left(\ln\left(\dfrac{1}{1 - F(t)}\right)\right)} \leq -x.$$

Нехай

$$u_n(-x) = a_n - xf(a_n)\ln\ln n,$$
$$\tau_n(-x) = n(1 - F(u_n(-x))).$$

Якщо покласти $t = a_n$, то умова $(t - xq(t)) > t_0$ еквівалентна умові $u_n(-x) > t_0$. Звідси при $u_n(-x) > t_0$ отримуємо

$$1 - F(a_n - xf(a_n)\ln\ln n) \geq [1 - F(a_n)]\left(\ln\left[\frac{1}{1 - F(a_n)}\right]\right)^x = \frac{(\ln n)^x}{n},$$
$$\tau_n(-x) \geq (\ln n)^x.$$

Використаємо відому оцінку

$$\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \leq \exp(-z) \quad \text{для} \quad 0 \leq z \leq n,$$

причому нехай

$$n_2 = \inf_{n_0 < k \in N} \left\{k \mid u_n(-x) > t_0 \ \ \forall n \geq k\right\}.$$

Тоді

$$P_2 \leq \sum_{n=n_0}^{n_2-1} \mathbf{P}(z_n < u_n(-x)) + \sum_{n \geq n_2} \mathbf{P}(z_n < u_n(-x)) = \sum_{n \geq n_2} F(u_n(-x)).$$

Дійсно, якщо $u_j(-x) < t_0$, то $F(u_j(-x)) = 0$ і

$$\sum_{n=n_0}^{n_2-1} \mathbf{P}(z_n < u_n(-x)) = 0.$$

Відповідно

$$P_2 \leq \sum_{n \geq n_2} \left(1 - \frac{\tau_n(-x)}{n}\right)^n \leq \sum_{n \geq n_2}^{\infty} e^{-\tau_n(-x)} \leq$$
$$\leq \sum_{n \geq n_2} e^{-(\ln n)^x} = \sum_{n \geq n_2} e^{-(\ln n)^2 (\ln n)^{x-2}}.$$

Нехай

$$n_4 = \max\{n_2; 27\},$$

тоді

$$\ln(n) > 3 \quad \forall n \geq n_4.$$

Оскільки $b^z \geq bz$ для кожного $b > 3$ і $z \geq 1$, адже для функції $r(z) = b^z - bz$

$$r'(z) = \ln(b)b^z - b > 0 \quad \forall z \geq 1$$

та

$$r(1) = 0,$$

то маємо

$$\sum_{n>n_4} e^{-(\ln n)^2(\ln n)^{x-2}} \leq \sum_{n>n_4} e^{-(\ln n)^2-(\ln n)^{x-2}} \leq$$

$$\leq \sum_{n>n_4} e^{-2(\ln n)-(x-2)(\ln n)} = \sum_{n>n_4} \frac{1}{n^2} e^{-(x-2)\ln n} =$$

$$= \sum_{n>n_4} \frac{1}{n^x} \leq \int\limits_{n_4}^{+\infty} z^{-x} dz = \frac{n_4^{1-x}}{x-1} \leq C_3 e^{-C_4 x}.$$

При $n_2 \leq n \leq n_4$

$$\sum_{n=n_2}^{n_4} e^{-(\ln n)^x} \leq (n_4 - n_2) e^{-(\ln n_2)^x} \leq C_5 e^{-(C_6)^x} \leq C_5 e^{-C_7 x}.$$

Отже, оцінку (9) також встановлено. Оцінка (10) доводиться аналогічно до (6).

Література

1. *Matsak I. K.* Weak convergence of extreme values of independent gaussian random elements in the spaces l_p, $1 \leq p < \infty$ // Theor. Probab. and Math. Statist. – 1997. – №. 54. – P. 115 – 120.
2. *von Mises R.* La distribution de la plus grande de n valeurs. Selected Papers II // Amer. Math. Soc. – 1936. – P. 271 – 294.
3. *de Haan L.* The rate of growth of sample maxima // Ann. Math. Statist. – 1972. – **43**. – P. 1185 – 1196.

Одержано 02.04.14,
після доопрацювання — 09.03.17